層流振動流れの助走距離*

近江宗一**・井口 学**・赤尾不二雄***

Inlet Length in Oscillatory Laminar Duct Flow*

Munekazu Ohmi**・Manabu Iguchi**・Fujio Akao***

Abstract

Inlet length in an incompressible oscillatory laminar duct flow is studied. If a fluid particle which can reach farthest from a given cross-section of a duct of semi-infinite length reaches just the entrance from where it never goes out, any of the particles located in this cross-section has no concern with the entrance. Therefore, it is reasonable to define an inlet length in terms of the distance between this cross-section and the entrance. Calculations of inlet length were made for a circular duct and four kinds of rectangular ducts. The results show that the inlet length L_e is a function of a Reynolds number based on the velocity amplitude of oscillation and of a dimensionless frequency for a circular duct and a function of these two parameters as well as the aspect ratio for a rectangular duct. The inlet length L_e is directly proportional to the Reynolds number and inversely to the dimensionless frequency. The proportional constant k was graphically shown for each duct.

1. 緒 言

助走区間が問題となるような短い管路内の層流非定常流れの特性を明らかにすることは油圧機器の動特性の評価にとって重要な問題の一つである。この分野の研究で従来行なわれてきたものは、流量が過渡的に変化する場合^{1),2)}と逆流の生じない脈動流れの場合に限られている³⁾が、いずれも理論と実験の両面からかなり詳しく追求されて来た。最近の中野ら^{4)~6)}の研究成果が報告されるに及んで、これら二種類の非定常流れの特性はその全容がほぼ理解されたといってよいであろう。ところで油圧機器をはじめとする各種管路網においては、流れの方向が周期的に変化する場合がしばしば起こるが、このような流れ場の助走区間について論じた報告は著者らの知るかぎり見当たらない。

著者らは層流振動流れと逆流を伴う層流脈動流れを対象として助走区間内の圧力損失、速度分布などの諸

特性を解明することを目的として、実験を重ねてきたが、ここで対象とする管路の長短の判断に対する基準を与える助走距離を理論的に評価することに関心を持った。本報告では、この評価法を提案し、円管と長方形管について計算した結果を示すことにする。

2. 記 号

a, b : 長方形管路の幅と高さの半分

D : 管直径

f : 周波数

k : 軸方向速度 u の振幅 $|u_{0s,1}|$ の最大値と断面平均速度 u_m の振幅 $|u_{m,0s,1}|$ との比

L_e : 助走距離

R : 管半径

Re_{os} : レイノルズ数 $= D|u_{m,0s,1}|/\nu$

Re_{os}^* : レイノルズ数 $= 2b|u_{m,0s,1}|/\nu$

r : 半径方向座標

S : ストローハル数 $= fD/|u_{m,0s,1}|$

S^* : ストローハル数 $= 2bf/|u_{m,0s,1}|$

T : 振動流れの周期

t : 時間

* 昭和57年9月20日 原稿受付

** 大阪大学工学部

*** 呉工業高等専門学校

- u : 軸方向速度成分
 $|u_{os1}|$: u の基本波振幅
 γ : 縦横比 $\equiv a/b$
 y, z : 長方形管の横および縦方向座標
 ν : 動粘性係数
 ω : 振動流れの角周波数
 ω' : 無次元角周波数 $\equiv R^2 \omega / \nu$
 ω^* : 無次元角周波数 $\equiv b^2 \omega / \nu$
 添字ほか
 m : 管横断面平均値を表す
 os : 振動流れを表す
 p : $|u_{os1}|$ が最大値をとることを表す
 i : 基本波を表す

3. 助走距離の定義と計算結果

3.1 助走距離の定義と評価法

3.1.1 助走距離の定義

流体が平坦な速度分布をもって半無限長の管内に入る定常流れの場合には、入口から壁面にそって管軸方向に発達する境界層が管内を埋めつくした後、流れ場が軸方向依存性を示さなくなったとき流れは十分発達したといい、助走距離については、例えば入口から中心速度が十分発達したその99%になった位置までの距離で定義している⁹⁾。しかしながら、ここで対象とする振動流れは時間平均成分のない交番流のことであり、管路入口近傍を占めている流体は半周期ごとに管路に入出入りすることになる。したがって一方流れの場合は異なり、どれだけの時間が経過しようとも、少しでも入口の外に出た経験をもつ粒子は入口から定まった距離までしか管内に到達することはできない。この範囲において、管内に入ってくる流れと出てゆく流れとでは流れのパターンは大きく異なるが、それよりも奥側の管内位置では両者のパターンは全く同じとなる。そして、この距離は振動の周期と振幅によって規定されるであろう。

ここに想いを巡らせば、振動流れにおける助走距離は、管路入口から外に出た経験をもつ粒子が管路内に到達しうる軸方向最大距離であると定義して十分合理的であろう。しかしながら流体が管路に流入する場合の運動を記述する方程式は非線形であって、流体粒子の移動経路を正確に把握することは不可能でないにしても非常に難しい。各種形状管路における振動流れの助走距離が周波数や振幅の関数としてどのように記述されるのかが今のところ分っていない理由の一つはここにあると思う。そこで、ここでは着眼点をえて、入口の影響を受けない管内位置にある流体粒子の運動

から助走距離を決定してみようとするものである。

入口の影響の及ばない軸方向位置においては、流れは平行流となっており、流体粒子は一周毎に管内軸方向の2点間を往復運動している。Fig. 1において流れの向きが右方から左方へと変わったとき、ある断面②において一番長い距離を移動できる粒子（以後最大移動可能な粒子と呼ぶ）がちょうど入口まで到達して、外へ出ることなく戻って来ることができたならば、この断面②にある粒子はどれ一つとして管の外へ出ないことになる。換言すれば断面②よりも奥側の流れは入口の影響を全く受けないことになる。

Fig. 1 Schematic of a circular pipe

ここで周波数が非常に低い場合、断面②において最大移動可能な粒子は管中心軸上を移動する粒子であるが、この粒子がちょうど入口断面まで到達したとき、これに隣接して入口のすぐ外にある粒子は軸対称流れの性質に基づき、流れの逆転後も前者の粒子に接しながら管中心軸上を移動し、断面②のすぐ手前まで戻って来るはずである。また周波数が高くなると最大移動可能な粒子の存在する半径位置は管中心から管壁側へ移動するが、断面②においてこの粒子に接して入口側にある粒子は、当然入口の外側へ出た経験をもつ粒子であるはずである。したがって振動流れの助走距離は入口①から断面②までの距離 L_e で与えられることになる。ただし、周波数 f が上記の低い周波数よりもさらに低くなって $f \rightarrow 0$ となる場合を考えると各瞬間の流れは定常流れと同じになるために、入口から管内に入っていく粒子は粘性の効果が相対的に大きく効いてくることによって管内で停止する以前のある軸方向位置で入口の経験を忘れてしまう。これを運動方程式についていえば、慣性力のうち非定常項が消滅してしまうことに対応する。このような場合には、当然のことながら、前述の考えに従って定義した L_e は適用できない。したがって、ここでは $f \neq 0$ を除外し、慣性力のうち非定常項と対流項のいずれも無視できない場合を取扱うことにする。これを条件式で示せば $Re_{os}, Re_{os}^* \geq 1, SR_{os}, S^* Re_{os}^* > 1$ となる。

3.1.2 助走距離の評価法

簡単のため、まず円管について考える。入口の影響の及ばない軸方向断面内で任意の半径方向位置における速度を $u(r, t)$ とすれば、基本波のみに着目するとき

$$u(r, t) = |u_{0s,1}(r)| \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表される。そして粒子の移動距離 $L(r)$ は次式で与えられる。

$$L(r) = \int_0^{T/2} u(r, t) dt \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで T は振動周期である。式(2)は各半径位置にある粒子が一度静止した後、運動を起して次に静止するまでの距離を表すことになる。

前節の定義に従えば、助走距離 L_e は $L(r)$ の最大値で与えられる。 $L(r)$ の最大値は $|u_{0s,1}(r)|$ が最大値を示す位置 $r = r_p$ において現われるから L_e に対して次式を得る。

$$\begin{aligned} L_e &= |u_{0s,1}(r_p)| \int_0^{T/2} \sin \omega t dt \\ &= (2/\omega) |u_{0s,1}(r_p)| \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

Fig. 2 Schematic of a rectangular duct

長方形管 (平行平板を含む) の場合には座標系を Fig. 2 のようにとったとき、式(3)の $|u_{0s,1}(r_p)|$ を $|u_{0s,1}(y_p, z_p)|$ で置きかえればよい。ここで (y_p, z_p) は $|u_{0s,1}(y, z)|$ が最大値を示すところの座標である。

式(3)をレイノルズ数と無次元角周波数を用いて変形すれば円管に対しては次式

$$L_e/D = k R_{eos} / (2\omega') \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$k = k(\sqrt{\omega'}) = |u_{0s,1}(r_p)| / |u_{m,os,1}|$$

$$R_{eos} = D |u_{m,os,1}| / \nu \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\omega' = R^2 \omega / \nu$$

が、長方形管に対しては次式が得られる。

$$L_e / (2b) = k R_{eos}^* / (2\omega^*) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$k = k(\sqrt{\omega^*}, \gamma) = |u_{0s,1}(y_p, z_p)| / |u_{m,os,1}|$$

$$R_{eos}^* = 2b |u_{m,os,1}| / \nu \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\omega^* = b^2 \omega / \nu$$

ここで $|u_{m,os,1}|$ は管横断面平均速度 u_m の振幅である。

円管の場合の $u_{0s,1}(r)$ 、 $u_{m,os,1}$ および r_p と $u_{0s,1}(r_p)$ は文献(10)(11)に記述されており、これから k の値を計算することができる。長方形管 (平行平板を含む) の場合の $u_{0s,1}(y, z)$ と $u_{m,os,1}$ との関係は文献(12)(13)によって知ることができる。その結果を用いれば (y_p, z_p) と k の値が容易に求まる。

Fig. 3 Locus of (y_p', z_p') in a rectangular duct of $\gamma = 1$, where $y_p' = y_p/a$ and $z_p' = z_p/b$
A = (0.390, 0.390, 0.180), B = (0, 0, 0.215)

3.2 計算結果

円管の場合の r_p については前述のとおり著者らの一部が以前に報告している¹¹⁾ のでここでは省略する。長方形管における y_p, z_p の値をアスペクト比 $\gamma = a/b$ が 1, 2, 4, ∞ の場合に対して計算してみると、それぞれ Fig. 3 ~ 6 に示したようになる。つぎに k の値を一つの図にまとめてみると Fig. 7 のようになる。無次元角周波数 ω' あるいは ω^* の値が小さくなると、 k の値は円管、長方形管のいずれの場合にも、それぞれの管路内の定常流れで知られた値へと漸近している。

一方、 ω' あるいは ω^* の値が非常に大きくなると任意の断面形状管内の流れは管内の大部分を占める一

Fig. 4 Locus of (y_p', z_p') in a rectangular duct of $\gamma = 2$
 $A = (0.698, 0.396, 0.176)$, $B = (0.623, 0, 0.220)$, $C = (0, 0, 0.408)$

Fig. 5 Locus of (y_p', z_p') in a rectangular duct of $\gamma = 4$
 $A = (0.862, 0.448, 0.164)$, $B = (0.811, 0, 0.220)$, $C = (0, 0, 0.735)$

様流と管壁をおおう境界層とから成立つことが知られている¹⁴⁾。ここで境界層内の速度分布は平板にそう振動流れすなわちストークス層の速度分布¹⁵⁾と同じものとなる。したがって円管、長方形管のいずれの場合にも無次元角周波数の増加とともに k の値はストークス層の値 $k \approx 1.069$ へと漸近してゆくことになる。円管と平行平板 ($\gamma = \infty$) の場合には $\sqrt{\omega^*}$, $\sqrt{\omega^+} \approx 100$ でストークス層の値にほぼ一致してくる。

Fig. 7 によって k の値を読み取り、式(4), (6)に代入すれば振動流れの助走距離が評価できることになる。

Fig. 6 Locus of z_p' between two parallel plates.

Fig. 7 Change in k with dimensionless frequency

4. 結 言

半無限長の管内のある横断面位置に着目したとき、その断面内の流体粒子のうち最も速くまで移動しうる粒子がちょうど入口まで到達して外には出ないならば、その位置よりも奥側の横断面位置における全ての流体粒子は決して管の外へ出ることはなく、入口の存在を感知しないことになる。したがって、その位置から入口までの距離が助走距離 L_e であると定義して、これを円管と長方形管について計算した。助走距離 L_e は円管に対しては $L_e/D = kR_{e,os}/(2\omega^*)$ 、長方形管に対しては $L_e/(2b) = kR_{e,os}/(2\omega^*)$ で表わされる。そして k の値を計算して、これを Fig. 7 にまとめ、管路網設計上の基礎資料を提供した。

参 考 文 献

- 1) Avula, X. J. R: Analysis of suddenly started laminar flow in the entrance region of a circular tube, Appl. Sci. Res. 21, 248-259 (1969-10).
- 2) 棚橋ほか4名:多孔質円管内の助走区間領域の流れ(第3報, 過渡的な流れの場合), 機論B, 47-423, 2131-2138 (昭56-11).
- 3) Attabek, H. B. and Chang, C. C.: Oscillatory flow near the entry of a circular tube, ZAMP, XII, 185-201 (1961).
- 4) 中野・谷野:管内非定常流れに関する研究(第1報)非定常流速分布について, 油圧と空気圧, 7-4, 52-58 (昭51-7).
- 5) 中野・宮田:同上(第2報)助走区間内の流れについて, 油圧と空気圧, 8-1, 60/66 (昭52-1).
- 6) 中野・酒谷:同上(第3報)助走区間における数値解, 油圧と空気圧, 9-3, 62-68 (昭53-5).
- 7) 中野・横田:円管内の助走区間における振動流, 第1報数値解と実験結果, 油圧と空気圧, 10-1, 64/71 (昭54-1).
- 8) 横田・中野:同上, 第2報 近似解析と非定常粘性抵抗係数, 油圧と空気圧, 11-2, 41/48+56 (昭55-3).
- 9) Shah, R. K. and London, A. L.: Laminar flow forced convection in ducts, Advances in Heat Transfer, Supplement 1, Academic Press (1978).
- 10) 近江・井口・梯・増田:円管内振動流れの乱流遷移と速度分布, 機論B, 47-419, 1214/1223 (昭56-7).
- 11) 近江・碓井:圧縮性をわずかに考慮した円管内の脈動流れ(第1報, 層流理論とそれに基づく力学的考察), 機論, 41-342, 546/558 (昭50-2).
- 12) 近江・井口・赤尾・原井:長方形管内振動流れの速度分布と乱流遷移, 機論論, No.804-3, 40/42 (昭55-3).
- 13) Drake, D. G.: On the flow in a channel due to a periodic pressure gradient, Q. J. Mech. Appl. Math., 18-1, 1/10 (1965).
- 14) 今井:流体力学, 前編, 298, 裳華房 (1979).
- 15) Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, 6th ed., McGraw-Hill (1968).