研 究

非線形特性を有する空気圧抵抗容量系の周波数応答*

香 川 利 治** 小 平 一 穂***

Effect of Non-linear Flow Rate Characteristics on the Frequency Response of a Pneumatic RC Circuit

Toshiharu Kagawa,** Kazuho Kodaira***

Abstract

A pneumatic RC circuit is a fundamental and important element in pneumatic control systems. This paper deals with the frequency response of a RC circuit taking the non-linear flow rate characteristics and the heat transfer in the chamber into account. Though this circuit is widely used in pneumatic systems it is not easy to calculate the dynamics of the circuit. This is caused by the non-linear flow rate characteristics of the restriction and uncertainty of state change of the air in the chamber. In this research, dimensionless non-linearity parameter composed of the amplitude of an input pressure signal and non-linearity coefficient of the flow rate characteristics has been obtained theoretically.

Time has been made dimensionless by introducing pressure time constant. It is shown that the ratio of pressure time constant and thermal time constant is very important parameter in the circuit.

By the method of describing function, the dynamics of pneumatic RC circuit have been made clear. For the circuit designing convenience, normalized Bode diagrams with two parameter are shown in the figures.

In the experiments, frequency response tests of RC circuit have been conducted (0.5-7Hz) in different amplitude condition of input signals. Satisfactory agreements are obtained between theory and experiments.

1. 序 論

本研究は空気圧回路における重要な構成要素の一つである抵抗容量系の周波数応答に関するものである。空気式制御機器に用いる抵抗の多くは円筒絞りであり、可変を要する場合はニードル絞りなどである。これらの抵抗と空気圧容器の組み合わせにより系に遅れを持たせることができる。この抵抗容量系はきわめて基本的であるにもかかわらず、その動特性の計算はそれほ

ど容易ではない。これは空気圧回路に用いる抵抗の流量特性が層流を前提として設計しても圧力差が多少大きくなると非線形性が現われることと、容器内空気の状態変化が明確に定まらないことなどに原因があると考えられる。

そこで本研究では絞り内部の空気の慣性が無視でき、抵抗の流量特性が静特性で示される場合について、その流量特性を線形項と2次の非線形項の和として近似し、また容器内空気の状態変化は熱移動方程式とエネルギー方程式の連立¹⁾により定まるとした解析を行なった。これらの結果は設計計算の際に利用しやすいように2つの無次元パラメータ(抵抗流量特性の非線形性に関す

* 昭和59年1月31日 原稿受付

** 東京工業大学制御工学科

*** 住友重機械工業システム研究所

るもの、および空気の状態変化に関するもの) に対してボード線図の形として簡明に表示した。また実験では入力圧の振幅を変化させて周波数応答を計測し、それらが2つの無次元パラメータによる理論値と良く一致することを確認した。

記号表

- A : 入力圧振幅, P_a
 a : 流量ゲイン, $\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{P=P_a}$, $\text{kg}/P_a \cdot \text{s}$
 c_p : 定容積比熱, $\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}$
 F : 入出力伝達関数
 G : 質量流量, kg/s
 h : 容器内空気熱伝達率, $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$
 K_a : 熱移動無次元数, (T_p/T_θ)
 P : 圧力差, $(P_1 - P_2), P_a$
 P_1 : 入力圧, P_a
 P_2 : 容器内圧, P_a
 Q : 熱伝達量, W
 R : 気体定数, $\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}$
 r : 流量特性における非線形性無次元数, $(2kA)$
 S : ラプラス演算子, s^{-1}
 S_h : 伝熱面積, m^2
 S^* : 無次元ラプラス演算子, $(T_p \cdot S)$
 T_p : 等温変化時圧力安定時定数, $(V/aR\theta_a), \text{s}$
 T_θ : 容器内空気熱平衡時定数, s
 $\bar{\theta}_2$: 容器内空気平均温度, K
 θ_a : 大気温度, K
 V : 容器体積, m^3
 $\bar{w}$: 容器内空気時間平均質量, kg
 κ : 空気比熱比
 ν : 空気動粘度, m^2/s
 ρ_2 : 容器内空気平均密度, kg/m^3
 ω : 角速度, rad/s
 ω^* : 無次元角速度, $(\omega \cdot T_p)$

2. 理 論

本研究で扱う抵抗容易系の概略図をFig. 1に示す。空気圧抵抗は円筒絞りで層流とすれば、Hagen-Poiseuilleの法則より圧力流量特性は、

$$G = \frac{\pi d^4 P}{128 \nu \ell} \quad (1)$$

となる。ただし d を絞りの内径および ℓ を絞りの長さとする。動粘度と管径による無次元周波数 $(fd^2/4\nu)$ の値によっては抵抗の圧力流量特性自身に動特性^{2), 3)}を考える必要があるが本研究で問題とする周波数領域ではこの無次元周波数は十分低く、抵抗の静特性のみ

で流量特性が示される。次に圧力差の増加に伴う流量特性の非線形性を考慮する。(1)式で示す流量特性は圧力差と流量が比例関係を有するいわゆる線形抵抗であるが、実際の空気圧抵抗ではFig. 1の流量特性に示すように、圧力差が大きくなるに従って流量が圧力差の平方根に比例する特性により近いものとなる。

Fig. 1 General structure of a pneumatic RC circuit

Zalmanzon⁴⁾はこの特性を(2)式のように示している。

$$P = c_1 G + c_2 G^2 \quad (2)$$

ただし c_1 および c_2 は定数である。本研究が対象とする抵抗容易系では入力振幅の大きさにより、また入力信号の周波数によって抵抗の流量特性非線形部分の対応する領域も変化するため、本研究では抵抗の非線形性を考慮する第一段階として流量特性を次のように近似する。

$$G = a(P - kP^2) \quad (3)$$

ただし k は抵抗の非線形特性を示す定数である。また $P < 0$ では $G = a(P + kP^2)$ となる。

抵抗を通り空気が容器に流入すると圧縮の効果により容器内空気の温度 θ_2 は上昇する。容器内空気のエンタルピー変化を考え、熱力学第一法則より、

$$Q = P_2 \frac{G}{\rho_2} - c_p \bar{\rho}_2 V \frac{d\bar{\theta}_2}{dt} \quad (4)$$

となる。空気と壁面には温度差によって熱伝達が生じる。ニュートンの冷却の法則を用いれば、

$$Q = hS_h(\bar{\theta}_2 - \theta_a) \quad (5)$$

となる。(5)式を(4)式に代入する。

$$\frac{d\bar{\theta}_2}{dt} = \frac{1}{c_p \bar{w}} \left\{ R\theta_a G - hS_h(\bar{\theta}_2 - \theta_a) \right\} \quad (6)$$

容器内空気の状態方程式を時間で微分する,

$$P_2 = \bar{\rho}_2 R \bar{\theta}_2 \quad (7)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{R \theta_a}{V} G + \bar{\rho}_2 R \frac{d\bar{\theta}_2}{dt} \quad (8)$$

ただし(8)式への変形について温度変化は微小であると仮定した。(3)式, (6)式および(8)式をブロック線図としてFig. 2に示す。

Fig. 2 Block diagram for a pneumatic RC circuit

流量特性の非線形性のために入力振幅が大きい程系に対しての非線形の影響が顕著となる。そこで入力圧力振幅 A を用いて次に示す無次元化を行う。

$$\Delta P_1 = A \sin \omega t \quad (9)$$

$$P^* = \frac{\Delta P}{A} \quad (10)$$

P^* は無次元圧力となる。線形領域における流量ゲイン a を用いて流量を無次元化する。

$$G^* = \frac{G}{aA} \quad (11)$$

(10)式, (11)式を(3)式に代入する。

$$G^* = P^* - A k P^{*2} \quad (12)$$

$r = 2 A k$ とすれば r は抵抗の流量特性の係数と入力振幅から求まる無次元パラメータとなる。

$$G^* = P^* - \frac{r}{2} P^{*2} \quad (13)$$

ただし $0 < r < 1$ である。 r をパラメータとして無次元化された流量特性をFig. 3に示す。

Fig. 3 Non-linear flow rate characteristics with non-dimensional parameter

次に時間について空気の状態変化を等温と仮定した場合の時定数 T_p を用いて無次元化⁵⁾を行う。

$$T_p = \frac{V}{a R \theta_a} \quad (14)$$

$$t^* = \frac{t}{T_p} \quad (15)$$

$$T_\theta = \frac{\bar{w} \cdot c_p}{h \cdot S_h} \quad (16)$$

T_θ は物質の出入りがない場合において温度が整定する場合の時定数を示す。

$$K_a = \frac{T_p}{T_\theta} \quad (17)$$

K_a は2つの時定数の比を示し、この値が大きい程より等温に近い応答となる。この無次元パラメータは流量の非線形性に関するパラメータ r と並んで系の支配的パラメータである。無次元化された変数およびパラメータを用い、Fig. 2のブロック線図を簡略化する。簡略化したブロック線図をFig. 4に示す。

Fig. 4 Reduced pneumatic RC circuit with non-linear flow rate characteristics

Fig. 4において $r = 0$ の場合には線形系となり、入出力の伝達関数 F は次式となる。

$$F = \frac{P_2^*}{P_1^*} = \frac{\kappa S^* + K_a}{S^{*2} + (\kappa + K_a)S^* + K_a} \quad (18)$$

3. 無次元パラメータに対する周波数応答

まず(18)式に示す線形系の場合について周波数応答をFig. 5に示す。ゲイン特性は周波数が低い領域においては、空気の状態変化を等温と仮定した場合に一致し周波数の増加に伴って等温から断熱と仮定した計算値に近くなる。その変化する周波数領域は、 K_a が大きい程高域となる。位相特性では等温および断熱と仮定した2本の曲線の間に特性値が収まらない周波数領域が存在する。これはFig. 2に示す伝熱の効果によって、系に位相進みが加わっているためである。

Fig. 5 Frequency responses of RC circuits with various heat transfer conditions

流量特性を示す非線形部を $N(E)$ とし記述関数法を適用して周波数特性を求める。入力圧および非線形部の入力を次のように定める。

$$P_1^* = \sin \omega^* t^* \quad (19)$$

$$e_{(f)}^* = E \sin (\omega^* t^* + \phi_e) \quad (20)$$

ただし E は非線形部の入力 $e_{(f)}^*$ の振幅を示す。非線

形部の記述関数は、

$$N(E) = 1 - \frac{4rE}{3\pi} \quad (21)$$

となる。また出力圧 P_2^* は後段の容量系 $L(S^*)$ が低域減衰特性のため高調波はほぼ無視できる。

$$P_2^* = c \sin (\omega^* t^* + \phi_c) \quad (22)$$

ただし c は出力振幅を示す。これより入力圧と出力圧の伝達関数 F は、

$$F = \frac{P_2^*}{P_1^*} = c e^{j\phi_c} = \frac{N(E) L(j\omega^*)}{1 + N(E) L(j\omega^*)} \quad (23)$$

となる。また非線形部の入力については

$$E e^{j\phi_e} = \frac{1}{1 + N(E) L(j\omega^*)} \quad (24)$$

であり、これと(23)式を連立させ E および $N(E)$ を求める。

Fig. 6 Normalized frequency responses

この解法はニュートン法により求めた。物理的意味としては、系の一部に非線形部があるため入力と出力の関係は陽には求まらず、非線形部の特性つまり(21)式と(24)式の連立が必要で、これにより無次元化流量の振幅が決定される。求めた E を用いて入出力関係は(23)式を用いて計算する。Fig. 6に $K_a = 0.1$ の場合の計算結果を示す。非線形性を示す無次元パラメータ r の値の増加に伴い、ゲインは小さくなり位相遅れも増加する。

Fig. 7 Normalized frequency responses

Fig. 8 Normalized frequency responses

熱移動に関する無次元パラメータ K_a の値がかなり小さいこの場合では、空気の状態変化は断熱に近いものとなりゲインの低下は小さくまた位相の遅れも小

さい。Fig. 7 に $K_a = 1$ および Fig. 8 に $K_a = 5$ の場合をそれぞれ示す。無次元パラメータ r の増加に伴い同様にゲインはより低下し、位相も遅れる。 $K_a = 1$ の場合、物理的には圧力の整定する時定数と温度の整定する時定数が同じ場合で折点周波数において $r = 0$ でもかなり伝熱による位相進みが見られる。 $K_a = 5$ では空気の状態変化は原理的には $\omega^* < 5$ において等温的となり、 $\omega^* = 1$, $r = 0$ の場合の位相遅れは約40度となり、一次遅れ系の折点周波数における位相遅れの値にかなり近くなっている。このように流量の非線形性に関する無次元パラメータ r および空気の状態変化に対する無次元パラメータ K_a の2つに対してボード線図を用意すれば、設計の際に該当するパラメータを求めるだけで容易に近似周波数特性を得ることができ、実用的価値が高いと考えられる。

Fig. 9 Experimental apparatus

4. 実験

4.1. 実験装置

入力となる正弦波状圧力は偏心カム機構を利用し、ノズルフラップ⁵⁾間隔を変化させた。ノズルフラップ間隔の変化は微小なため、計測用マイクロメータを偏心カムおよびレバーで微小回転させ正弦波状圧力を作成した。Fig. 9に実験装置の構成を示す。正弦波状に変化するノズル背圧を空気圧パイロット弁⁶⁾で増幅した。このパイロット弁の動作は主に流量におけるマッチングのためである。つまり内部抵抗が大きく流量が十分供給できない特性では周波数の増加に伴い抵抗への入力圧の振幅が減少してしまう。実験に用いた円筒絞りには内径0.4 mmおよび長さ25 mmのもので、その静的流量は積算式ガスメータにより測定した。抵抗のバイ

アス圧力は精密級圧力計により、また前後の圧力差は水柱で計測した。空気圧パイロット弁、供試抵抗および容器の接続には内径4mmのチューブを用いた。チューブと円筒絞りとの内径の比は10倍あり、接続管路の長さは数cmと短いため管路の抵抗分は無視することができる。空気圧容器の体積 V は22mlとし圧力の計測には豊田工機製半導体圧力変換器(PMS-5)を使用した。感圧素子のダイヤフラム部にはシリコンオイルを充填して温度変化による誤差に注意を払った。圧力変換器の出力は直流増幅器を経由し、動特性の良い記録計に書かせた。

4.2. 実験結果および考察

Fig. 10に実験に用いた円筒絞りの静的流量特性を示す。圧力差の増加に伴い流量も増加しているが、流量の増加率は減少している。実線は計測した圧力流量特性を良く表すように(3)式における a と k を決めて書いたものである。この時の値はそれぞれ $a = 1.8 \times 10^{-6}$ kg/Pa $\cdot$ s, $k = 0.21$ 1/Paである。圧力差が1.4 kPaの時の円筒絞り内部でのレイノルズ数は約300であり層流である。一点鎖線は(1)式Hagen-Poiseuilleの式をもとにした計算値である。レイノルズ数がこの程度でも種々の非線形項の影響が現われている。Fig. 10に示した流量特性はバイアス圧力は0.4 kgf/cm² gauge (137 kPa)であるが、このバイアス圧力が変化すれば流量特性も変化する。

Fig. 10 Experimental flow rate characteristics of cylindrical restriction

周波数応答の実験では入力圧 ΔP_1 の振幅をピーク $\leftrightarrow$ ピークで0.018 kgf/cm² (1.76 kPa)および0.034 kgf/cm² (3.33 kPa)の2種とした。従ってそれぞれに対応する無次元パラメータ r の値はほぼ0.35および

0.7である。振幅を変化させてもバイアス圧力は一定として実験を行なった。熱平衡時定数 T_θ 、熱移動無次元数 K_θ は圧力応答の戻り波形¹⁾より推定した。これより T_θ は約0.9 secとなった。Fig. 11に入出力圧の圧力波形の一例を示す。抵抗部の内径、動粘度から求まる無次元周波数 $f^* (= d^2 f / 4 \nu)$ は周波数応答実験において、ただか約0.15で抵抗自体の動特性の影響はないと考えられる。Fig. 12に周波数応答の実験値を示す。横軸は無次元角速度を示す。 $\omega^* = 1$ では $T_\theta = 0.144$ sであるため振動数に換算すれば1.1 Hzに対応する。

Fig. 11 Input and output pressure wave of frequency test

また熱移動無次元パラメータ K_θ は0.15となる。実線は記述関数を利用して求めた計算値である。実験値を示す黒丸は振幅が3.33 kPaの場合で、もう一方は1.76 kPaの場合である。入力周波数が高い領域程非線形の影響は顕著となる。これは抵抗流量特性における非線形性が同一でも付加される容器が大きいか、もしくは周波数が高ければ、出力圧の入力圧に対する追従性が悪いため抵抗にかかる圧力差が大きく、したがって非線形性の強い領域を動作するためである。このように抵抗容量系における流量の非線形性の影響は抵抗の特性、入力圧の振幅および周波数を含めて考える必要がある。ゲインの実験値において振幅の大きい場合は振幅の小さい場合に比較してゲインの低下がより著しい。位相についても同様である。2つの無次元パラメータ(K_θ および r)による計算値は実験値と良く一致している。

Fig. 12 Experimental frequency responses

5. 結 言

空気圧回路において重要な構成要素である抵抗容量系の周波数特性を抵抗流量特性の非線形性を考慮し、解析した。抵抗の流量特性は線形項に2次の非線形項を加え、入力振幅とこの2次の非線形項の係数の積で示される新たな無次元パラメータを導出し表示した。また空気の状態変化を等温と仮定した場合にお

ける圧力安定時定数 T_p をもとにし、時間系を無次元化した。容器内空気の熱平衡時定数と圧力安定時定数の比 K は流量の非線形性のパラメータとともに重要なパラメータである。この2つのパラメータにより記述関数法を用いて抵抗容量系の周波数特性を求めた。実験では円筒絞りと容器で構成される抵抗容量系において、入力圧の振幅を変化させ周波数応答を計測した。実験値は計算値と良く一致した。本研究で示した解析法は抵抗容量系を用いた空気圧回路の動特性計算に有用と考えられる。

参 考 文 献

- 1) 香川: 空気圧抵抗容量系の動特性における熱伝達の考察, 油圧と空気圧, 12-3, 209/212, (1981).
- 2) 横田, 中野: 円筒形絞りの圧力流量周波数特性, 油圧と空気圧, 13-3, 199/205, (1983).
- 3) 宮川: 円筒絞りの周波数特性, 日本機械学会論文集, 42-355, 847/856, (1976).
- 4) Zalmanzon, L.A.: Components for Pneumatic Control Instruments, Pergamon Press, (1965).
- 5) 香川: 空気ノズルフラップの過度特性, 計測自動制御学会論文集, 18-6, 617/621, (1982).
- 6) 香川, 花塚, 森永: ノンブリード形空気圧パイロット弁の入出力および出力流量静特性, 計測自動制御学会論文集, 16-3, 427/433, (1980).
- 7) 小宮, 長塩: 円筒ノズルの特性, 計測自動制御学会論文集, 4-2, 37/44, (1968).