研究論文

固体粒子による微小絞りの閉そく（第3報，理論的検討）*

黄 泰 栄**, 山 口 惇**

Siltng of Capillary Flow Passages due to Solid Particles
(3rd Report, theoretical discussion)

Tae Young HWANG and Atsushi YAMAGUCHI

Time variations in the particle number concentration and particle size distribution in a circular pipe flow are numerically calculated from the equation of population balance undergoing coagulation due to a laminar shear flow. Next, the effects of various parameters related to silting phenomena are clarified using "silting time", which is theoretically obtained as the time required for the occurrence of silting at the inner or inlet part of a capillary passage.

Results are as follows:

- 1) The experimental results are qualitatively explained by "silting time" derived from the equation of population balance.
- 2) Effects of the ratio of average particle size to the inner diameter of the capillary passage regarding silting time qualitatively agree with that of those parameters concerning silting frequency.

Key words: Hydraulics, Contamination, Silting, Capillary Passage, Theory, Solid Particles, Coagulation

1. 緒 言

固体粒子に基づく微小絞りの閉そくに関し，著者らは一連の研究を行っている．前報¹⁾²⁾では粒子（Air Cleaner Test Dust）の濃度，絞りの内径と長さ，分級した粒子の平均粒径と絞り内径との比，および絞り入口圧力などの閉そく現象に及ぼす影響を実験的に調べ，報告した．また，閉そく発生時の圧力の影響を確かめる過程で，閉そくを解除するに要する圧力も求めた．さらに写真撮影によって，絞り入口付近の凝集粒子の流動状態を把握した．

本報では，この閉そく現象について理論的な検討を加えることを目的とし，層流せん断流れに基づく凝集を考慮した凝集方程式を適用して，流路中の固体粒子の個数濃度と粒径の時間変化を求める．ついで，この結果から絞り入口，あるいはその内部で閉そくを生じるまでの時間を求め，閉そく現象に及ぼす種々のパラメータの影響を明らかにするとともに，実験結果について考察する．

流体中の固体粒子は，ブラウン運動，速度こう配による運動，重力などの外力に基づく運動の状態にある．これらの運動により粒子間に速度差が生じると，粒子は衝突し凝集する．この衝突凝集によって粒子は時間とともに成長していくのである．この過程を説明するのが凝集方程式であり，これは粒子に関する質量保存則である．流体中の粒子間には，通常，ファンデルワールス引力のみならず，粒子表面の電気二重層による反発力が存在するため，粒子が衝突しても必ずしも凝集するとは限らない．粒径はある広がりを示し，形状も一様でない．また複数の運動要因がある場合も考えられる．このように，この現象は非常に複雑であり，凝集の性質を理解し個数濃度と粒径の時間変化を評価するためには，凝集方程式を単純化する必要がある．この方程式の解法には数値解法³⁾⁵⁾，近似解法⁷⁾および平衡粒度分布関数を仮定しての相似解法⁸⁾がある．なお，層流速度こう配の場での粒度分布の時間変化を求めた研究の報告⁷⁾はあるが，微小絞りの閉そく現象について凝集方程式に基づき解析した研究はない．

2. 記 号

*平成4年10月9日 原稿受付

**横浜国立大学工学部

(所在地 〒240 横浜市保土ヶ谷区常磐台156)

[] 内に次元を長さL，質量M，時間Tで示す．

 a_1, a_2 : 粒子半径の上限値，下限値 [L]

a_g	：粒子の対数平均半径	[L]
a_i, a_j	： i, j 粒子の半径	[L]
d	：粒径	[L]
d^*	：体積平均粒径	[L]
D	：絞り内径	[L]
J	：計算パラメータ ($J \geq 1$)	[-]
J_o	： v の下限を与える J	[-]
J_m	： v の上限を与える J	[-]
L	：絞り長さ	[L]
M	：粒子の総質量	[M/L ³]
$n(v, t)$	：粒度分布関数	[個/L ⁶]
N	：総粒子数	[個/L ³]
N_o	：初期総粒子数	[個/L ³]
N_D	： D より大きい粒子数	[個/L ³]
q_r	：絞りの流量	[L ³ /T]
Q	：管内流量	[L ³ /T]
R	：管内半径	[L]
t	：経過時間	[T]
t_m	：閉そくを生じるまでの時間 (絞り入口)	[T]
t_r	：閉そくを生じるまでの時間 (絞り内部)	[T]
T	：流体の絞り通過平均時間	[T]
v_i, v_j	： a_i, a_j 粒子の体積	[L ³]
v_i, v_2	： a_1, a_2 粒子の体積	[L ³]
β	：凝集定数	[L ³ /T]
μ	：流体の粘度	[M/T・L]
ρ_p	：固体粒子の真密度	[M/L ³]
σ_g	： a_g の標準偏差	[-]
$\phi(v, t)$	：頻度分布関数	[1/L ³]
$\Psi(J, t)$	：頻度分布関数	[-]

3. 理 論

流体中の粒子が多分散のとき，一度凝集した粒子は再分散しないと仮定すると，体積が v である粒子の時間 t における濃度 $n(v, t)$ の変化速度は式(1)となる³⁾。粒径数 μm 以上の粒子では必ず速度（速度こう配）に基づく凝集が，ブラウン運動や重力による凝集に比べ支配的であることから，本報では，層流せん断に基づく凝集のみを考慮する。

$$\frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = \int_0^{v/2} \beta(v', v-v') n(v', t) n(v-v', t) dv' - \int_0^\infty \beta(v, v') n(v, t) n(v', t) dv' \quad (1)$$

ここに， β は凝集定数であり，層流せん断に基づく場合，衝突した粒子が必ず合体するとして

$$\beta(v_i, v_j) = \frac{4}{3} (a_i + a_j)^3 \left| \frac{du}{dr} \right| \quad (2)$$

で与えられる。 du/dr は速度こう配であり，円管内層流に対して流量平均を採ると，管長さ L 当たりの圧力降下を ΔP として

$$\left| \frac{du}{dr} \right| = \frac{4}{15} \frac{\Delta PR}{\mu L} = \frac{32}{15} \frac{Q}{\pi R^3} \quad (3)$$

になる。

単位体積当たりの総粒子数 N は

$$N = \int_0^\infty n(v, t) dv \quad (4)$$

になり，その総質量 M は

$$M = \rho_p \int_0^\infty v n(v, t) dv \quad (5)$$

次式で定義される頻度分布関数 $\phi(v, t)$ を導入する。

$$n(v, t) = N \phi(v, t) \quad (6)$$

特に時刻0での値を明確にするため

$$n(v, 0) = N_o \phi(v, 0) \quad (7)$$

と書く。ここに $\phi(v, t)$ は

$$\int_0^\infty \phi(v, t) dv = 1 \quad (8)$$

である。いま，体積が v_1 と v_2 の間に限定される場合には

$$\int_{v_1}^{v_2} \phi(v, t) dv = 1 \quad (9)$$

v に対応する半径を a と書くと，通常の粒子に対し成立が認められる対数正規分布に対し

$$\phi(v) = \frac{\xi}{4\pi \sqrt{2\pi a^3 \ln \sigma_g}} \times \exp \left[-\frac{1}{2 \ln^2 \sigma_g} \left\{ \ln \frac{(a-a_1)(a_2-a_1)}{(a_2-a)a_g} \right\}^2 \right] \quad (10)$$

であり⁹⁾，係数 ξ は式(9)より定まる。

ところで，式(1)を直接解くことは，長時間を要する。このため，ここではBerry⁴⁾，Suck⁵⁾らによる J 変換法を用いることにする。この場合，粒子体積の基本単位を $v(J_o)$ とすると， J 番目の粒子体積は

$$v(J) = v(J_o) \exp\{\alpha(J-J_o)\} \quad (J \geq 1) \quad (11)$$

と与えられる。粒子体積の差 $v(J)$ は

$$v(J) = v(J) - v(J') \quad (12)$$

となる。したがって， $v(J')$ と合体して $v(J)$ となるような粒子の番号は

$$J = J' + \frac{1}{\alpha} \ln [1 - \exp \{-\alpha(J-J')\}] \quad (13)$$

ここで， $J_o = 1$ ， $\alpha = \ln 2$ とすると計算上好都合であり，式(11)，(13)は

$$v(J) = v(1) \cdot 2^{J-1} \quad (14)$$

$$\bar{J} = J + \frac{1}{\ln 2} \ln [1 - \exp\{-\ln(J - J')\}] \quad (15)$$

単位体積当たりの総粒子数 N は

$$N = \int_{v_1}^{v_2} N_o \phi(v, t) dv = \int_1^{J_m} N_o \psi(J, t) dJ \quad (16)$$

したがって、

$$\psi(J, t) = \ln 2 \cdot v(1) \cdot 2^{J-1} \cdot \phi(J, t) \quad (17)$$

と定義される $\psi(J, t)$ を導入すると、式(1)は次式のように書き直される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(J, t)}{\partial t} &= \int_1^{J-1} \frac{v(J')}{v(J)} \beta(J', \bar{J}) N_o \psi(J', t) \\ &\cdot \psi(J, t) dJ' - N_o \psi(J, t) \int_1^{J_m} \beta(J, J') \psi(J', t) dJ' \\ &= \frac{N_o v(1)}{\pi} \left| \frac{du}{dr} \right| \times \left[\int_1^{J-1} \frac{2^J}{2^J - 2^{J'}} \right. \\ &\quad \left. \{ (2^{J-1} - 2^{J'-1})^{1/3} + 2^{J'-1} \}^{1/3} \right] \\ &\cdot \psi(J', t) \psi(J - J', t) dJ' \\ &- \psi(J, t) \int_1^{J_m} \{ (2^{J-1})^{1/3} + (2^{J'-1})^{1/3} \} \\ &\cdot \psi(J', t) dJ' \quad (18) \end{aligned}$$

流体中の粒度分布の時間変化は、式(18)より求まる。この分布から絞り内径 D の細管が閉そくする容易さを一つのパラメータで表示することを考える。さて、絞り内径 D より大きい粒子の数は単位体積当たり

$$N(2a > D, t) = \int_{J_D}^{J_m} N_o \psi(J, t) dJ \quad (19)$$

で与えられる。ここに J_D は絞り内径に相当する J の値であり、絞り内径 D と J_D との間には、式(14)と $v = \pi D^3/6$ とから

$$\frac{D}{2} = \left\{ \frac{3}{4\pi} v(1) 2^{J_D-1} \right\}^{1/3} \quad (20)$$

が成り立つ。

実験において、閉そくは絞り入口に生じる場合と、絞り内部に生じる場合が観測された。主管路と絞りにおける速度こう配は異なることから、別個に検討する。

1) 絞り入口での閉そく

絞りを流れる流量 q_r 中に含まれる絞り内径より大きい粒子の個数は

$$q_r N(2a > D, t) = q_r \int_{J_D}^{J_m} N_o \psi(J, t) dJ \quad (21)$$

したがって、 $2a > D$ なる粒子1個が絞り入口に到達するまでの時間 t_m は

$$\begin{aligned} 1 \text{ (個)} &= \int_0^{t_m} q_r N(2a > D, t) dt \\ &= q_r N_o \int_0^{t_m} \int_{J_D}^{J_m} \psi(J, t) dJ dt \quad (22) \end{aligned}$$

2) 絞り内部での閉そく

絞りを通過するに要する平均時間 T は

$$T = \frac{32\mu L^2}{D^2 \Delta P} \quad (13)$$

で与えられるから、絞り内部で閉そくを生じるまでの時間 t_r は、式(22)に基づいて

$$1 \text{ (個)} = q_r N_o \int_0^{t_r} \int_{J_D}^{J_m} \psi(J, t+T) dJ dt \quad (24)$$

で与えられる。式(24)の時間積分に際し、時間 T の間の速度こう配は絞りに対応する値を採る。

なお、単位体積中に含まれる粒子質量と初期総粒子数の間には、式(5)から次の関係が成り立つ。

$$M = \rho_F N_o \int_1^{J_m} v(J) \psi(J) dJ \quad (25)$$

4. 計算結果と考察

本報の数値解析は、実験結果の説明を目的としているので、実験条件に基づき、主として、 $2a > D$ なる粒子1個が絞り入口、あるいは絞り内部を閉そくさせるまでの時間（閉そく時間と呼ぶ）を求める。ここで、式(18)の数値積分はHeun法で求め、 $\psi(J)$ についてはLagrange補間法を用いた。また、数値計算上の誤差を補正するため、粒子質量比 $M(t)/M(0)$ を算出し、 $\psi(J, t)$ 値を適宜修正した。ここに、 $M(0)$ ：初期総質量、 $M(t)$ ：時間 t での総質量である。

絞り入口の閉そく時間 t_m （以下の図において●印で表す）は、式(22)に示したように、主管路での速度こう配の影響を大きく受ける。これに対し絞り内部での閉そく時間 t_r (○)は、絞り内部の速度こう配(前報に報告した実験では、絞り内部の速度こう配のほうが主管路より大きい)の影響が加えられるので、 t_m より短くなる。この t_r と t_m との関係がすべてのパラメータに対し同様の傾向であるため、ここでは、 t_r を中心に考察する。

実験と同様に、標準条件は質量濃度 C_m ：230ppm、絞り長さ L ：11.4mm、絞り内径 D ：0.185mm、体積平均粒径 d^* ：13.3 μ m (ACFTDに相当)、粘度 μ ：60.0mPa $\cdot$ s(油温：23.5 $^{\circ}$ C)とする。固体粒子ACFTD (Air Cleaner Fine Test Dust)、分級ACCTD (Air Cleaner Coarse Test Dust) 6種の d^* 、 a_1 、 a_2 、 a_g 、 σ_g の値をtable 1に示す。

fig. 1は、主管路における単位体積当たりの総粒子

table 1 Particle size distributions

Parameters	d^* (μm)	a_1 (μm)	a_2 (μm)	a_g (μm)	σ_g (μm)
ACFTD	13.3	1.0	40.3	1.138	2.958
classified	52.5	4.0	64.0	15.97	1.780
ACCTD	21.0	1.0	25.4	6.687	1.735
	14.5	1.0	20.1	5.301	1.573
	9.9	0.5	16.0	3.184	1.713
	7.3	0.5	12.7	2.083	1.845
	5.1	0.5	10.0	1.306	1.949

fig. 1 Time variation in total number of particles per unit volume

数 N の経時変化を示し、 N は時間の経過とともに減少している。これは粒子が衝突し凝集していくことを意味する。大きい粒径の範囲における粒子数 n の経時変化はfig. 2に示す。なお、この結果は、主管路の速度こう配が 100s^{-1} の場合である。

fig. 3は、主管路の流動条件の下での、絞り内径 D より大きい粒子の単位体積当たりの総数 N_D の経時変化（閉そく時間までの計算結果）を示す。ここで実験は、絞り内径を変えた場合の結果であり、絞り内径が小さくなると粒径は短時間で絞り内径まで成長することがわかる。なお、固体粒子はACFTD($d^*=13.3\mu\text{m}$)の場合である。点線は、絞り内径($D=0.185\text{mm}$)を一定とし、分級ACCTD粒子の体積平均粒径 d^* をパラ

fig. 2 Time variation in continuous number distribution functions for a large range of particle size

fig. 3 Time required to generate N_D (solid line: D , dotted line: d^*)

メータとした場合で、 d^* が大きくなるほど N_D の増加率が急になり、粒径が絞り内径まで成長する時間も短くなっている。 D が小さく、 d^* が大きくなると、粒径は短時間で絞り内径の大きさまで成長する。つまり、 d^*/D が大きくなると、閉そく時間が短くなることがわかる。また図の結果から、 $D=0.185\text{mm}$ のとき、ACFTDの $d^*=13.3\mu\text{m}$ のほうが分級ACCTDの $d^*=21.0\mu\text{m}$ より短時間で絞り内径まで成長している。こ

fig. 4 Effect of mass concentration of particles on silting time

fig. 5 Effect of length of capillary passage on silting time

れは、ACFTDと分級ACCTDの粒度分布が異なることからもたされた結果であり、当然ながら粒度分布によっても閉そく時間は変わる。

fig. 4は質量濃度 C_m ($=130, 230, 330, 430\text{ppm}$)の影響を説明する計算結果であり、縦軸は絞り内部での閉そく時間である。質量濃度が大きいほど閉そく時間が短くなっている。速度こう配が一定であるため、質量濃度が増えることによって単位体積当たりの粒子数も増加し、粒子は衝突しやすくなる。速度こう配が一定であれば、閉そく時間は単位体積当たりの粒子数

fig. 6 Effect of diameter of capillary passage on silting time

に逆比例する。

fig. 5は絞り長さ L ($=6.5, 11.4, 16.5\text{mm}$) についての結果であり、絞り長さが短くなるほど閉そく時間も短くなっている。絞り長さが短くなると絞りを流れる流量が増え、絞り内部での速度こう配が大きくなり凝集は早くなる。

fig. 6は絞り内径 D ($=0.165, 0.185, 0.205\text{mm}$) の影響を調べた結果で、絞り内径が小さくなると閉そく時間が短くなっている。絞り出入口の圧力差が等しくても、絞り内径が小さくなるにつれその流量と速度こう配が小さくなるので、一つには、単位時間当たりの粒子の衝突数は減少し、閉そく時間も長くなると考えられる。逆に、fig. 3の結果から絞り内径が小さくなることによって絞り内径より大きい粒子が短時間で数多く生じるため、閉そく時間は短くなることが考えられる。図の結果から、著者らの実験では後者の影響が支配的であることがわかる。

fig. 7は、 $D=0.185\text{mm}$ に対し、体積平均粒径 d^* ($=5.1, 14.5, 21.0, 52.5\mu\text{m}$; Table 1) をパラメータとして計算した結果である。平均粒径が大きくなると粒径は短時間で絞り内径の大きさまで成長する。その閉そく時間の差は、ここに示したほかのパラメータよりも大きい。これは粒子の質量濃度が一定の場合、 d^* が小さくなると、単位体積当たり粒子数は多くなるが、その粒径と絞り内径との比が小さいため、絞り内径より大きい粒子になるまでの所要時間が長いことを意味する。

fig. 8は、絞り入口圧力 P ($=0.49, 0.98, 1.96\text{MPa}$) の影響を調べたもので、圧力が高くなるほど閉そく時間が短くなっている。圧力が高くなると絞りを流れる流量が増え、速度こう配による単位時間当たりの衝突数が増加するため、閉そく時間は短くなる。よって、

fig. 7 Effect of average particle Size on silting time

圧力の影響は絞り長さの結果と同じく，速度こう配が支配的になる。

fig. 4から8に示した結果は，前報に報告した実験結果に対し，長い閉そく時間は閉そく頻度の低さ，短い閉そく時間は閉そく頻度の高さと例外なく対応している。つまり，定性的には閉そく時間の大小を理論的に求めることで，閉そくの発生頻度を予想できることになる。したがって，主要なパラメータの影響を調べることが可能になる。しかし，極端な例を挙げれば，fig. 7に対応する実験結果として， $d^*=5.1\mu\text{m}$ であれば閉そくを認めなかった。このように，閉そく時間と閉そく頻度との定量的比較には問題が残る。実際に，粒子が接近するとき生じる流体力学的相互作用や粒子同士の衝突による分散，粒子の表面特性などの定量的考察にはなお多くの問題が残されている。

5. 結 言

本報では実験条件に対応させた凝集方程式を解くことによって，主管路までの粒度分布の経時変化，また $2a > D$ なる粒子1個が絞り入口，あるいは絞り内部で閉そくを生じるまでの時間を求めた。その結果は以下のように要約できる。

1) 凝集方程式を用いて求めた閉そくを生じるまでの時間(閉そく時間)の長短は，実験結果をよく説明する。

fig. 8 Effect of inlet pressure of capillary passage on silting time

2) 体積平均粒径と絞り内径との比，粒子の質量濃度，絞り入口圧力，絞り長さなどの閉そく時間に及ぼす影響は，それらのパラメータが閉そく頻度に及ぼす影響と定性的に一致する。

参 考 文 献

- 1) 黄，山口：固体粒子による微小絞りの閉そく（第1報，実験），油圧と空気圧，22-3，154/159(1991)
- 2) 黄，山口：固体粒子による微小絞りの閉そく（第2報，実験2），同上，24-1，138/143 (1993)
- 3) Fuchs, N.A.: *The Mechanics of Aerosols*, Pergamon Press, Oxford, 288 (1964).
- 4) Berry, E.X.: *Cloud Droplet Growth by Collection*, *J. Atmos. Sci.* 24, 688/701 (1967)
- 5) Suck, S.H., Brock, J.R.: *Evolution of Atmospheric Aerosol Particle Size Distributions via Brownian Coagulation*, *J. Aerosol. Sci.*, 10, 581/590 (1979)
- 6) Yosida, T., Kousaka, Y., Okuyama, K. and Nishio, S.: *Effect of Brownian Coagulation and Brownian Diffusion on Gravitational Settling of Polydisperse Aerosols*, *J. Chem. Eng. Japan*, 8, 137/142 (1975)
- 7) Higashitani, K., Miyahara, S.M., Matsuda, T.Y. and Matsuno, Y.: *Axial Change of Total Particle Concentration in Poiseuille Flow*, *J. Colloid. Int. Sci.*, 77, 21/28 (1980)
- 8) Friedlander, S.K., Wang, C.S.: *The Self-Preserving Particle Size Distribution for Coagulation by Brownian Motion*, *J. Colloid. Int. Sci.*, 22, 126/132 (1966)
- 9) 高橋幹二編：基礎エアロゾル工学，養賢堂，121 (1982)