運動量理論への寄与*

池 辺 洋** 大 内 英 俊***

Contributions to the Momentum Theory *

Yo Ikebe **, Hidetoshi Ohuchi ***

It is well known that if we know the distribution of fluid velocity on a closed surface in the flow field (including unsteady flow) of an incompressible fluid, we are able to calculate, by the momentum theory, the force acting on the fluid inside the closed surface when the pressure distribution on the surface is not given.

When we discuss, for example, the self-excited oscillation of a spool valve, we must choose the surface of a moving valve chamber as the above mentioned closed surface i.e. control surface, since on the surface of this chamber, the velocity distribution can be calculated in most cases, and the axial force, which is considered to be a cause of the self-excited oscillation, can be obtained from the reaction of the force applied to the fluid inside the valve chamber.

However, in most of the papers published so far, to obtain the axial force at $t = t_0$, even in the above example, the surface of the moving valve chamber at $t = t_0$ is chosen as a fixed control surface on which the velocity distribution of the fluid is approximated by that on the surface of the moving valve chamber. Therefore, rigorous results cannot be expected.

In this paper the momentum theory is derived by both physical and mathematical methods from the point of view of a moving control surface, and identical results are obtained.

As an example of application, the axial force applied to a moving spool of a spool valve is calculated and this force includes a term which has been so far overlooked.

1. ま え が き

流体の流れ（非定常流も含め）の場の中に一つの仮想の閉曲面（検査面）をとり、面上各点の流速が与えられると、面上の圧力分布が分からなくても面内の流体に働く力は「運動量理論」によって計算できるということはよく知られている。

したがって、運動量理論は制御弁に働く力を求めるには非常に有力な武器であり、特にその発振など非定常問題の研究では大きな役割を果たしている。

運動量理論の応用として1952年Lee, Blackburn¹⁾らが、1968年笠井²⁾、同年竹中、浦田³⁾らが、いずれも制御弁の振動問題を扱っている。

このようにならかなり歴史の古い問題ではあるが、研究者間で微妙な点に食い違い^{2)~6)}があり、時に活発な論争が行なわれ、少しずつ過去の不備が修正されてきたというものの、今日まで決定版というものは発表されていない。

制御弁に働く静的な力などの計算の際のように、固定（時間が経過しても面の移動も変形もない）された検査面上での流速分布が与えられている場合は、運動量理論の適用には何の疑点もない。

しかし、スプール弁の振動などを扱う際には、動くスプール弁の弁室表面を検査面にとらなければ意味は

* 昭和51年10月21日 原稿受付

** 東京工業大学 精密工学研究所

*** 東京工業大学 大学院

ない。

というのは、弁室表面(一部は全気壁)では、多くの場合圧力分布は不明であるが流速分布は求め得るし、更に、スプールの振動の原因とされるいわゆる軸力は、弁室内の流体に働く力の反作用力から求まるからである。

このような例でも、従来の文献では多く暗黙のうちに、ある時点 t_0 から微小時間 Δt の間検査面を固定して計算していたが、このあたりが論争の原因となっているように思われる。

本論文では検査面が動くということを出発点とし、従来とは異なった方法により最終結果を求めることにする。

2. 閉曲面内の流体に働く力

本論文では静止直交座標系(Fig.1)を採用し、加速度、速度、位置などは原則として、すべてこの座標系に関して与えている。点 (x, y, z) における時刻 t の流速の x, y, z 成分をそれぞれ u, v, w とし、流体は非圧縮性流体で密度は ρ とする。

さて、Fig.1で時刻 t に一つの閉曲面 $S_d(t)$ ($S_d(t)$ で囲まれた空間を $V_d(t)$)を考えると、その内部をすべて満たす流体の粒子群(いわば質点系)のもつ運動量(x 成分)は $\rho \int_{V_d(t)} u dV$ で表わされる。

また、 Δt 秒後上記特定の粒子群(システムという)の占める空間は $V_d(t + \Delta t)$ となり、その運動量(x 成分)は $\rho \int_{V_d(t + \Delta t)} u dV$ となる。

もちろん、システム(結果として $V_d(t)$)は時間とともに場所も移っていくが、これに働く力を知るにはその運動量だけを知ればよく、これは単に時間だけの関数である。

Newtonの運動の第2法則によれば、この運動量の時間的変化率が力(x 成分) $f_x(t)$ になるから、

$$f_x(t) = \rho \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_d(t + \Delta t)} u dV - \int_{V_d(t)} u dV \right)$$

Fig. 1 A closed surface in the flow field

$$= \rho \frac{d}{dt} \int_{V_d(t)} u dV \quad (1)$$

ただし、(1)式最右辺の微分範囲 $V_d(t)$ は常にシステムを包みつつ動かすことは不可欠の条件である。

しかし、一般には $V_d(t)$ 内部の流速はすべては分からないので、(1)式をそのまま物理的な問題に適用することは困難である。

そこで適当な検査面を考え、(1)式最右辺の変形を以下に考える。

さて、本論文では検査面に関し次のような前提を置く。

〔前提〕

(1) 検査面の運動、変形は自由であるが、それらの状態は静止座標系に関する時間関数として与えられる。

(2) 面上の流速は、面上の位置及び時間の関数として与えられる。

(3) その内部の流速は(一般には)未知である。

運動量理論を物理的な問題に応用する際、一般論としては検査面は仮想のものであり、どのように選ぶかは自由であるが、上の「前提」を満たすような検査面とされれば必ずから制限がでてくる。もしその面上の流速分布が分からないようなものを選ぶと、目的とする力は計算し得ないであろう。

また、本論文で以最しばしばでてくる「ある時点で検査面内の流体に働く力」とは、その時点で検査面内にあったシステムに働く力のことである。したがって、時間の連続関数として与えられる力 $f_x(t)$ と、検査面を t を通過していく異なったシステムに働く力のことである。

すなわち、本論文で動く検査面というものを単に仲介として、システムの運動量の時間的変化率を求めるようにするのが基本的な考えである。

3. $f_x(t)$ の物理的誘導

Fig.2において前記前提を満たす検査面を $S_d(t)$ 、検査体(検査面で囲まれた空間)を $V_d(t)$ とし、 $t = t_0$ で $S_d(t)$ 内にあったシステムが時刻 t で占める空間を $V_s(t)$ 、その表面を $S_s(t)$ とすれば、

$$t = t_0 \text{ で } V_s(t) = V_d(t), S_s(t) = S_d(t)$$

また、上記システムは一般には検査面と独立に動くので、

$$t = t_0 \text{ では } V_s(t) = V_d(t), S_s(t) = S_d(t) \text{ に限らない。}$$

ここで、Fig.2においてシステムと検査体で区分され

Fig. 2 A control volume V_c and a system V_s at time instants t_0 and $t_0 + \Delta t$

る空間の三つを V_1 , V_2 , V_3 とし, V_1 を両者の共通部分とすれば,

$$V_s(t_0 + \Delta t) = V_1 + V_3$$

$$V_c(t_0 + \Delta t) = V_1 + V_2$$

さて, 時刻 t_0 で $S_c(t_0)$ 内の流体に働く力 (x 成分) $f_x(t_0)$ とは t_0 で $S_c(t_0)$ 内にあったシステム (V_s) に働く力であるから, これのもつ運動量の変化率を次に調べる.

いま V_1 内の流体のもつ運動量 (x 成分) を M_1 のように記すと,

$$\begin{aligned} f_x(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_s(t_0 + \Delta t) - M_s(t_0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_1 + M_2 - M_s(t_0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_1 + M_3 - M_c(t_0) + M_2 - M_3}{\Delta t} \\ \therefore f_x(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_c(t_0 + \Delta t) - M_c(t_0)}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_2 - M_3}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2)$$

(3) 式右辺の第 1 項は検査面内の, 第 2 項は V_2 , V_3 内の流体の運動量変化率を表わしている. すなわち, M_2 , M_3 はこの Δt の間に検査面を通して流出した流体の運動量であることを考えると,

$$f_x(t_0) = \rho \left[\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} u dV \right]_{t=t_0} + \rho \int_{S_c(t_0)} u u_n r dS \quad (4)$$

ただし, u_{nr} は検査面の面素の移動速度に対する流体の相対速度で検査面の外向き法線方向成分である.

さて, (4) 式は t_0 を t_1 と書き換えても成立する.

換言すれば任意の t で成立することになる. いま, (4) 式の右辺第 1 項に連続の条件及び Gauss の発散定理 (付録 I) を適用し, t_0 を t で置換すると,

$$\frac{f_x(t)}{\rho} = \frac{d}{dt} \int_{S_c(t)} x u_n r dS + \int_{S_c(t)} u u_n r dS \quad (5)$$

ただし, u_{nr} は検査面上の流速の検査面外向き法線方向成分である.

検査面に関する前提により, (5) 式を使えば具体的な問題への応用は可能となる.

つまり, (5) 式は主として物理的考察から得た運動量理論の一般式であり, 最終結果であるが, 前述のようにこの理論は研究者間で微妙な点に見解の相違があるので, 慎重を期すため次に数学的手法で一般式を導くことにする.

4. $f_x(t)$ の数学的誘導

4.1 Leibniz の公式とその体積積分への拡張

$$H[\xi_2(t), \xi_1(t), t] = \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} g(x, t) dx \text{ として } H$$

が与えられたとき ($g(x, t)$ は連続),

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \xi_2} \frac{d\xi_2}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \xi_1} \frac{d\xi_1}{dt} \\ &= \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) dx + g(\xi_2, t) \frac{d\xi_2}{dt} \\ &\quad - g(\xi_1, t) \frac{d\xi_1}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)が Leibniz (Leibnitz と書く) の公式⁷⁾で, 積分 (限界が t の関数) 記号の外にある微分を, 積分記号下に移す際の法則を示したものである.

従来の文献では, 著者らの知る限りでは, Leibniz の公式は一重積分のみで, 三重 (体積) 積分の場合は結果のみ⁷⁻⁹⁾はあるが誘導過程はない. そこでこれは付録 II に示すとして, 拡張の結果は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} g(x, y, z, t) dV &= \int_{V(t)} \frac{\partial g}{\partial t} dV \\ &\quad + \int_{S(t)} g \xi_n^* dS \end{aligned} \quad (7)$$

ただし, $S(t)$ は閉曲面, $V(t)$ はこれで囲まれた空間である. また, ξ_n^* は $S(t)$ の面素の移動速度の外向き法線方向成分である. 特に $S(t)$ ($V(t)$) が固定の場合に限る,

$$\frac{d}{dt} \int_V g dV = \int_V \frac{\partial g}{\partial t} dV \quad (7')$$

4.2 システムに働く力

(1) 式で積分範囲 $V_s(t)$ は時間関数であるから, (7) 式を使って変形すると,

$$f_x(t) = \rho \frac{d}{dt} \int_{r_s(t)} u dV + \rho \int_{r_s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dV \\ + \rho \int_{s_s(t)} u u_{ns} dS \quad (8)$$

ただし、 u_{ns} は $S_s(t)$ 面上の流速の $S_s(t)$ の外向き法線方向成分である。更に、(8)式最右辺の第2項を連続の条件と Gauss の発散定理 (付録Ⅲ) を使って体積分に変換すると、

$$\int_{s_s(t)} u u_{ns} dS = \int_{r_s(t)} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV \\ \therefore f_x(t) = \rho \int_{r_s(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV \\ = \int_{r_s(t)} \rho \frac{Du}{Dt} dV \quad (9)^*$$

(9)式はある時刻でシステム (非圧縮性流体) という質点系に働く力を表わし、その時点でシステム内の質量 ρdV の質点のもつ慣性力を系すべてにわたり合算したものに等しいことを示している。

すなわち、(1)、(9)式は形は異なっているが、共に質点系 (システム) に働く力を示したものである。

4.3 検査面内の流体に働く力

ここで再び3.と同様を検査面を選ぶと、

$$t=t_0: S_c(t) \equiv S_s(t), V_c(t) \equiv V_s(t)$$

$t=t_0$ の時点で(8)式の積分範囲の表示を $V_c(t_0), S_c(t_0)$ に換えると (u_{ns} は $S_c(t)$ 上の外向き法線方向の流速となるので(5)式の下で定義された u_{nc} に書き換える) 、

$$f_x(t_0) = \rho \left(\int_{r_c(t_0)} \frac{\partial u}{\partial t} dV - \int_{s_c(t_0)} u u_{nc} dS \right)$$

ここで t_0 を t で置換しても一般性を失わないので、

$$f_x(t) = \rho \left(\int_{r_c(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dV - \int_{s_c(t)} u u_{nc} dS \right) \quad (10)$$

ここで(10)式の右辺第1項に(7)式を適用すると、

$$f_x(t) = \rho \left(\frac{d}{dt} \int_{r_c(t)} u dV - \int_{s_c(t)} u \dot{s}_{nc} dS \right. \\ \left. + \int_{s_c(t)} u u_{nc} dS \right) \quad (11)$$

ただし、 $\dot{s}_{nc}$ は $S_c(t)$ の面素の移動速度で、その外向き法線方向成分である。(11)式の右辺第1項を(5)式の場合と同様、面積積分に変換 (付録Ⅰ) し、第2、3項をまとめて $u_{nr} = u_{nc} - \dot{s}_{nc}$ とおくと (14)式の u_{nr} に等しい) 、

$$f_x(t) = \rho \left(\frac{d}{dt} \int_{r_c(t)} x u_{nc} dS + \int_{s_c(t)} u u_{nr} dS \right) \quad (12)$$

* $\frac{D}{Dt}$ はいわゆる実質微分で、 $\frac{Du}{Dt}$ は時刻 t において、点 (x, y, z) における流体粒子の加速度の x 成分を示している。

このように、数学的に誘導した(12)式は、当然のことながら、物理的に誘導した(5)式と一致し、最も普遍的な形で運動量理論の一般式といえる。

なお、(10)式右辺の第1項は数学的には一応面積積分の形に変換可能である。しかしながら、得られた面積積分の計算を遂行するためには前提には含まれない速度こう配 $\frac{\partial u}{\partial x}$ などの値を必要とする (付録Ⅳ参照) ので、具体的な問題には利用できない。

5. 検査面の動きが特別な場合の $f_x(t)$

本論文の前提を満足する検査面の動きが特別な場合を求める。

5.1 固定の場合

$$S_c(t) \equiv S_c(t_0), V_c(t) \equiv V_c(t_0)$$

(12)式で $u_{nr} \equiv u_{nc}$ より

$$f_x(t) = \rho \left(\frac{d}{dt} \int_{s_c(t_0)} x u_{nc} dS + \int_{s_c(t_0)} u u_{nc} dS \right) \quad (13)$$

付録ⅠのA-2式より

$$f_x(t) = \rho \left(\frac{d}{dt} \int_{r_c(t_0)} u dV + \int_{s_c(t_0)} u u_{nc} dS \right) \quad (13')$$

$V_c(t_0)$ は固定されているので、上式右辺第1項に(7)式を適用すれば、(10)式で $t=t_0, S_c(t)$ を固定した場合の式が得られる。更に、付録Ⅳ (検査面固定) により次の(13'')式が得られる。

$$f_x(t) = \rho \left(\int_{s_c(t_0)} x \frac{\partial u_{nc}}{\partial t} dS + \int_{s_c(t_0)} u u_{nc} dS \right) \quad (13'')$$

なお、本研究の〔前提〕を満たす検査面が動いているにもかかわらず、従来、 $t_0 \sim t_0 + \Delta t$ の間検査面を仮に固定し、(13'')式が $f_x(t)$ を与える一般式とされている場合が多かったが、仮固定の検査面上では u_{nc} 、 $\frac{\partial u_{nc}}{\partial t}$ などが一般 (特別な場合の例は6.2参照) には未知 (付録Ⅳ参照) なので $f_x(t)$ の計算はできないし、もし仮固定の検査面上の流速などを動く検査面上のそれと近似しても正確な結果は期待できないであろう。

5.2 システムと一緒に動く場合

$$S_c(t) \equiv S_s(t)$$

(5)又は(12)式において $u_{nr}=0$ であるから、

$$f_x(t) = \rho \frac{d}{dt} \int_{r_c(t)} x u_{nc} dS \quad (14)$$

付録Ⅰより右辺は $\rho \frac{d}{dt} \int_{r_c(t)} u dV$ 、ここで積分範囲の表示を $V_s(t) (\equiv V_c(t))$ に換えると当然のことながら(14)は(1)式に一致する。

6. 応 用 例

運動量理論の応用例として最も一般的なのはスプール弁のスプールの軸力であろう。これはFig. 3の弁室内の流体が軸(x)方向に動くスプールに及ぼす力であるから、上記流体に働く力の反作用力 $-f_x(t)$ から求められる。

6.1 検査面を弁室表面にとる場合

動く検査面として、ランド側面、スリーブ、スプール軸の表面からなる中空円柱表面をとる。

〔記号〕 x_s : 弁開度, q : 弁を通過する流体(体積)流量。

σ_i : 検査面構成要素 (Fig. 3参照, 必要に応じてその面積を表わす, σ_4 は制御オリフィス)

A_s : ランドの有効断面積 $A_s = \sigma_1 = \sigma_3$

〔仮定〕i) σ_2, σ_4 上での流速は一樣, ただし, 時間関数

ii) σ_4 上の流速の方向 θ は一定(von Mises).

Fig. 3 A spool valve and a moving control surface

Table 1 Fluid velocity and others on the moving control surface

	σ_1	σ_2	σ_4	σ_3	σ_5, σ_6
x	x_1			x_5	
u	$\dot{x}_1 = \dot{x}_s$	0	$-\frac{q}{\sigma_4} \cot \theta$	$\dot{x}_5 = \dot{x}_s$	
u_{nc}	$-\dot{x}_s$	$\frac{q}{\sigma_2}$	$-\frac{q}{\sigma_4}$	$\dot{x}_s$	0
u_{nr}	0	$\frac{q}{\sigma_2}$	$-\frac{q}{\sigma_4}$	0	0

iii) σ_1, σ_3 上でのせん断力は小さいものとして無視する。

Fig. 3, Table 1を参照し, 次の関係を注目しつつ(5)又は(12)式より(15)式を得る。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\sigma_1} x u_{nc} dS = x_s \dot{q}, \\ \frac{d}{dt} \int_{\sigma_4} x u_{nc} dS = -\frac{d}{dt} \left\{ \left(x_s + \frac{x_s}{2} \right) q \right\} \\ \int_{\sigma_4} u u_{nr} dS = \frac{q^2}{\sigma_4} \cot \theta = \frac{q^2}{B x_s} \cot \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1(x_s - x_1) = A_s, (x_s - x_1) = A_s L_s \\ x_s - x_2 = L_1 \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{f_x(t)}{\rho} = -A_s L_s \dot{x}_s + \frac{1}{2} q \dot{x}_s + \left(L_1 + \frac{x_s}{2} \right) \dot{q} - \frac{q^2}{B x_s} \cot \theta \quad (15)$$

なお, この最終結果は付録Vに示す方法でもチェックできる。

6.2 検査面を固定する場合

6.1と同じ例(仮定も含め)を使うが, 特別な場合として, 検査面は故意に本論文の〔前提〕すべては満足しないものを使う。すなわち, スプールは右へ動いていると仮定し, $t = t_0$ での弁室表面(σ_1 面のみは $t = t_0 + dt$ での)を固定した検査面(Fig. 4)にとる。もちろん, 固定検査面上の流速などはすべては与えられないが, この場合は動く弁室表面のそれから間接に計算可能な例である。

Fig. 4 ($t = t_0 + dt$ のときの図)で固定検査面構成要素を添字"0"を付けて σ_{i0} と記し, σ_{i0} 面上の流速の外向き法線方向成分を u_{n_i} とする。軸力計算には(13)又は(13')式が使えが, ここでは従来の文献との比較のため(13')式を使う。この準備として, まず σ_{50} 面上の流速 $u_{n_5} = u_{n_5}(x_{50}, y, z, t)$ の時間的変化率

$$\left(\frac{\partial u_{n_5}}{\partial t} \right)_{t_0} = \left(\frac{\partial u_{n_5}(x_{50}, y, z, t)}{\partial t} \right)_{t_0} \text{ を連続の条件より調べる。}$$

$$t = t_0 + dt:$$

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_{50}} \left\{ u_{n_5}(x_{50}, y, z, t_0) + \left(\frac{\partial u_{n_5}}{\partial t} \right)_{t_0} dt \right\} dS \\ & + \int_{\sigma_{10}} \left\{ u_{n_1}(x_{10}, y, z, t_0) + \left(\frac{\partial u_{n_1}}{\partial t} \right)_{t_0} dt \right\} dS \\ & + B x_s(t_0) u_{n_4}(t_0 + dt) + \sigma_{20} u_{n_2}(t_0 + dt) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

$$t = t_0:$$

Fig. 4 A spool valve and a fixed control surface

$$\int_{\sigma_{20}} u_{20}(x_{20}, y, z, t_0) dS - \int_{\sigma_{20}} u_{20}(x_{20}, y, z, t_0) dS + Bx_s(t_0)u_{20}(t_0) + \sigma_{20}u_{20}(t_0) = 0 \quad (17)$$

両式中、以下のような関係が成立することに注意して、式を得る。

$$\begin{cases} \int_{\sigma_{20}} u_{20}(x_{20}, y, z, t_0) dS = -A_s \ddot{x}_s(t_0) \\ \int_{\sigma_{20}} \left(\frac{\partial u_{20}}{\partial t} \right)_{t_0} dS = -A_s \ddot{x}_s(t_0) \\ \sigma_{20}u_{20}(t_0 + \Delta t) = q(t_0 + \Delta t) = -Bx_s(t_0 + \Delta t)u_{20}(t_0 + \Delta t) \end{cases}$$

$t = t_0, \Delta t \rightarrow 0$ に對し、

$$\int_{\sigma_{20}} \left(\frac{\partial u_{20}}{\partial t} \right)_{t_0} dS = A_s \ddot{x}_s(t_0) + Bx_s(t_0)u_{20}(t_0) \quad (18)$$

すなわち、たとえ $\left(\frac{\partial u_{20}}{\partial t} \right)_{t_0}$ が σ_{20} 面上で一様としても、これに $x_s(t_0)$ 、すなわちランド側面の（スプールの）加速度とは等しくならないうことに注意して、(18)式を使って軸力を求めるため Table 2 を用ゐし、一面の面積積分を行なうと、

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{20}} x \frac{\partial u_{20}}{\partial t} dS &= -x_{20} A_s \ddot{x}_s(t_0) \\ \int_{\sigma_{20}} x \frac{\partial u_{20}}{\partial t} dS &= x_{20} q(t_0) \\ \int_{\sigma_{20}} x \frac{\partial u_{20}}{\partial t} dS &= \left\{ x_{20} - \frac{x_s(t_0)}{2} \right\} Bx_s(t_0) \left(\frac{\partial u_{20}}{\partial t} \right)_{t_0} \\ &= - \left\{ x_{20} + \frac{x_s(t_0)}{2} \right\} \\ &\quad \left\{ \ddot{q}(t_0) + Bx_s(t_0)u_{20}(t_0) \right\} \end{aligned}$$

Table 2 Fluid velocity and others on the fixed control surface

	σ_{10}	σ_{20}	σ_{30}	σ_{40}
x	x_{10}			x_{20}
u	$\dot{x}_s(t_0)$	0	$-\frac{q(t_0)}{\sigma_{20}} \cot \theta$	$\dot{x}_s(t_0)$
$u_{20}(t_0)$	$-\dot{x}_s(t_0)$	$\frac{q(t_0)}{\sigma_{20}}$	$-\frac{q(t_0)}{\sigma_{20}}$	$\dot{x}_s(t_0)$
$\frac{\partial u_{20}}{\partial t}$	$-\ddot{x}_s(t_0)$	$\frac{\dot{q}(t_0)}{\sigma_{20}}$	$\left(\frac{\partial u_{20}}{\partial t} \right)_{t_0}$	$\left(\frac{\partial u_{20}}{\partial t} \right)_{t_0}$

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{20}} x \frac{\partial u_{20}}{\partial t} dS &= x_{20} \int_{\sigma_{20}} \frac{\partial u_{20}}{\partial t} dS \\ &= x_{20} \left\{ A_s \ddot{x}_s(t_0) + Bx_s(t_0)u_{20}(t_0) \right\} \end{aligned}$$

結局、

$$\begin{aligned} -\frac{f_x(t_0)}{\rho} &= -A_s \ddot{x}_{20} - x_{20} \ddot{x}_s(t_0) \\ &\quad - \frac{x_s(t_0)}{2} u_{20}(t_0) Bx_s(t_0) \\ &\quad + \left\{ L_1 + \frac{x_s(t_0)}{2} \right\} \dot{q}(t_0) - \frac{q^2(t_0)}{Bx_s(t_0)} \cot \theta \quad (19) \end{aligned}$$

上式では $t \rightarrow t_0 (\Delta t \rightarrow 0)$ にしているので $(x_{20} - x_{20})$ は L_1 となる。また t_0 を t に置換すると19式は、

$$\begin{aligned} -\frac{f_x(t)}{\rho} &= -A_s L_1 \ddot{x}_s + \frac{q}{2} \dot{x}_s + \left\{ L_1 + \frac{x_s}{2} \right\} \dot{q} \\ &\quad - \frac{q^2}{Bx_s} \cot \theta \quad (20) \end{aligned}$$

すなわち、この例での軸力は検査面を仮固定しても15式と同じ結果が得られるが、動かす場合に比べるとかなり計算が複雑になる。また15、19式の右辺第2項は従来見落としていた項である。

7. むすび

本研究では検査面が動くということを出発点とし、検査面に関する前提を設け、以後物理的及び数学的手法により検査面内の流体に働く力を求める一般式を導き、いずれの手法によっても得られる結果が一致することを示した。次いで、従来多く行われてきた検査面の微小時間固定（仮固定）による計算法では、一般の場合正確な結果が期待できないことを（付録Ⅳで）明らかにした。

更に応用例としてスプール弁のスプールに働く力を

まず一般式(2)式によって求め、次に同じ例について検査面を仮固定して(この場合は動く弁室表面の流速から、固定検査面上の流速などが正確に計算できる特別な例)力を正確に計算し、両者が一致することを明らかにするとともに、従来見落とされていた項を指摘した。

最後に本研究に関し熱心な討論を寄せて下さった東京大学生産技術研究所の石原智男教授及び上智大学の高橋啓爾教授に対し厚く感謝するとともに、本研究の研究費の一部は昭和49年度文部省科学研究費(946049)によることを付記し、関係者に感謝したい。

(付 録)

(I) 非圧縮性流体の連続の条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \int_{r_c(t)} u dV &= \int_{r_c(t)} \left\{ u + x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} dV \\ &= \int_{r_c(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (xu) + \frac{\partial}{\partial y} (xv) + \frac{\partial}{\partial z} (xw) \right\} dV \end{aligned}$$

ここで、 l_c, m_c, n_c を検査面 S_c の面素の外向き法線の方向余弦としGaussの発散定理により体積積分を面積積分になおすと、

$$\begin{aligned} \int_{r_c(t)} u dV &= \int_{S_c(t)} x (l_c u + m_c v + n_c w) dS \\ &= \int_{S_c(t)} x u n_c dS \quad (\text{A-2}) \end{aligned}$$

ただし、 $u n_c = l_c u + m_c v + n_c w$ 。

(II) (6)式の H を体積積分に拡張し、積分範囲のうち、 x 成分のみを時間とともに変化させるとき、微分の定義により、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{r(t)} g dV &= \frac{d}{dt} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \Delta t}^{\xi_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \Delta t} g(x, y, z, t) dx dy dz \\ &\quad - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(x, y, z, t) dx dy dz \Big\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{g(x, y, z, t + \Delta t) - g(x, y, z, t)}{\Delta t} dx dy dz \right. \\ &\quad \left. - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \Delta t} \frac{g(x, y, z, t + \Delta t)}{\Delta t} dx dy dz \\ &+ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_2}^{\xi_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \Delta t} \frac{g(x, y, z, t + \Delta t)}{\Delta t} dx dy dz \Big\} \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial g}{\partial t} dx dy dz - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} g(\xi_1, y, z, t) \frac{\partial \xi_1}{\partial t} dy dz \\ &+ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} g(\xi_2, y, z, t) \frac{\partial \xi_2}{\partial t} dy dz \end{aligned}$$

同様の計算法により、積分範囲の x, y, z 成分がすべて時間とともに変化する場合に次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{r(t)} g dV &= \frac{d}{dt} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(x, y, z, t) dx dy dz \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial g}{\partial t} dx dy dz \\ &+ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left\{ g(\xi_2, y, z, t) \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - g(\xi_1, y, z, t) \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right\} dy dz \\ &+ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left\{ g(x, \eta_2, z, t) \frac{\partial \eta_2}{\partial t} - g(x, \eta_1, z, t) \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \right\} dz dx \\ &+ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left\{ g(x, y, \zeta_2, t) \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} - g(x, y, \zeta_1, t) \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \right\} dx dy \quad (\text{A-3}) \end{aligned}$$

ここで $S(t)$ の面素 dS の外向き法線方向余弦を (l, m, n) とすれば、(A-3)式右辺第2項以下は、

$$\begin{aligned} &\int_{S(t)} g \frac{\partial \xi}{\partial t} l dS + \int_{S(t)} g \frac{\partial \eta}{\partial t} m dS + \int_{S(t)} g \frac{\partial \zeta}{\partial t} n dS \\ &= \int_{S(t)} g \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} l + \frac{\partial \eta}{\partial t} m + \frac{\partial \zeta}{\partial t} n \right) dS \\ &= \int_{S(t)} g \xi'_n dS \quad (\text{A-4}) \end{aligned}$$

ただし、 $\xi'_n = \frac{\partial \xi}{\partial t} l + \frac{\partial \eta}{\partial t} m + \frac{\partial \zeta}{\partial t} n$

$$\therefore \frac{d}{dt} \int_{r(t)} g dV = \int_{r(t)} \frac{\partial g}{\partial t} dV + \int_{S(t)} g \xi'_n dS \quad (\text{A-5})$$

(III)

$$\begin{aligned} \int_{S_s} u u n_s dS &= \int_{S_s} u (l_s u + m_s v + n_s w) dS \\ &= \int_{r_s} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right\} dV \quad (\text{A-6}) \end{aligned}$$

(A-1)を使って

$$\begin{aligned} \int_{S_s} u u n_s dS &= \int_{r_s} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} uv + \frac{\partial}{\partial z} uw \right. \\ &\quad \left. - u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} dV \end{aligned}$$

$$-\int_{V_c} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV \quad (\text{A-7})$$

(M) (I)と似た方法で、

$$\int_{V_c(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int_{V_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ u + x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} dV \quad (\text{A-8})$$

$$-\int_{S_c(t)} x \left(l_c \frac{\partial u}{\partial t} + m_c \frac{\partial v}{\partial t} + n_c \frac{\partial w}{\partial t} \right) dS \quad (\text{A-9})$$

$$l_c \frac{\partial u}{\partial t} + m_c \frac{\partial v}{\partial t} + n_c \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial U_{nc}}{\partial t} \text{ とおけば}$$

$$\int_{V_c(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int_{S_c(t)} x \frac{\partial U_{nc}}{\partial t} dS \quad (\text{A-10})$$

さて、(A-8)から(A-9)への変換過程の一部では以下のような演算が行なわれている。

$$\begin{aligned} \int_{V_c(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial t} \right) dV &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dy dz \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left\{ \xi_2 \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right)_{x=\xi_2} - \xi_1 \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right)_{x=\xi_1} \right\} dy dz \\ &= \int_{S_c(t)} x \frac{\partial u}{\partial t} l_c dS \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

ただし、 $\xi_2 = \xi_2(y, z, t)$ 、………

すなわち、(A-11)式((A-9)式の場合も同様の) $\frac{\partial u}{\partial t}$ は V_c 内で点 (x, y, z) を固定し、 t で偏微分して得た関数内の x に ξ_2 (又は ξ_1)を代入したものである。この量は実は未知量であることを次に示そう。我々が(前提)により知り得る検査面上の流速 u とは $u(\xi_2, y, z, t)$ で、これを t で偏微分(ξ_2 は y, z, t の関数であり、 y, z を固定)したものは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi_2(y, z, t), y, z, t)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right)_{x=\xi_2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \right)_{x=\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

となる。ここで左辺(スプールの例でいえば σ_1 面の流速 $\dot{x}_2$ に等しい)、右辺第2項の $\frac{\partial \xi_2}{\partial t}$ (検査面の移動速度)は(前提)をもとに得られる量であるが、速度

こう配 $\frac{\partial u}{\partial x}$ は一般には分からないので右辺第1項は求められない。よって、この項の値を必要とする(A-10)式の計算は(前提)からは不可能である。

しかしながら、検査面が固定の場合に限り(A-12)式より

$$\frac{\partial u(\xi_2, y, z, t)}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right)_{x=\xi_2} \text{ となるので、}$$

$$\frac{\partial U_{nc}}{\partial t} \equiv \frac{\partial u_{nc}}{\partial t} \text{ となる。ただし、} u_{nc} \text{ は検査面上の}$$

流速の検査面向き法線方向成分である。

(M) Fig.3で σ_1 に平行でこれより右の距離にある σ_2 と同形の仮想面を考えると、これを通過する流量 q_L (ξ_2, t)が計算できるので、 q_L を x_1 から x_2 まで積分すると動く弁室内の運動量 $M_c(t)$ が求まる。

$$M_c(t) = \rho \left\{ A_2 L \dot{x}_2 - \left(L_1 + \frac{x_2}{2} \right) q \right\}$$

$M_c(t)$ の $t+1t$ と t の間の変化率(微分)及びこの $1t$ の間に動く弁室に流出入する流体によって生ずる運動量変化率を合算する((4)式参照)と、15式と同じ結果が得られる。

参考文献

- 1) S. Y. Lee & J. F. Blackburn: Contributions to Hydraulic Control, Trans. ASME, 74-6, 1005/1016 (1952)
- 2) 笠井: 弾性支持を有するポペット弁の安定性について, 日本機械学会論文誌, 34-260, 655/669(昭43-4)
- 3) 竹中・蒲田: 油圧制御弁の動特性, 日本機械学会誌, 71-599, 74/81(昭43-12)
- 4) 笠井・油圧弁の動特性, 油圧と空気圧, 1-1, 19, 26, (昭45-10)
- 5) 池辺・中野ほか: サーボ機構とその要素(第2版), 254/260, オーム社(1973)
- 6) 池辺・大内: 運動量理論への寄与, 昭和50年春季油圧空圧講演会講演論文集, 7/10(昭50-5)
- 7) Sokolnikoff & Redheffer: Mathematics of Physics and Modern Engineering, 347, 428, McGraw-Hill (1966)
- 8) D. C. Leigh: Nonlinear Continuum Mechanics, 122, McGraw-Hill (1968)
- 9) R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot: Transport Phenomena, 732, John Wiley & Sons (1960)
- 10) L. E. Simons, D. R. Pitts: Elements of Transport Phenomena, 303, McGraw-Hill (1972)