管内非定常流れに関する研究 第3報 助走区間における数値解*

中 野 和 夫** 酒 谷 幸 利***

Research on Unsteady Flow in a Tube (The 3rd Report) Numerical Solutions in the Inlet Region.*

Kazuo Nakano** Yukitoshi Sakatani***

The numerical solutions of the vorticity transport equation for the unsteady flow due to a stepwise change of the flowrate in the inlet region of a long circular tube are obtained by the finite difference method. On the unsteady velocity profiles the numerical solutions are compared with the experimental results, measured by the laser Doppler velocimeter, and the approximate solutions shown in the second report of this research.

The case studies made in various conditions demonstrate that the approximate solutions are similar to the numerical solutions and the difference among them can be reasonably neglected from the view point of the practical estimation of the transition of the inlet flow from the initial to the final steady state.

1. 結 言

各種制御弁などの油圧機器の内部には比較的短い円筒状の絞りや油路が随所に見られる。それらの中の油の流れの動的挙動の解明は機器の動特性の解析や設計に非常に重要である。そこでこれらの動的挙動を解明することを目的として前報¹⁾ではこの種の非定常流れの基本的なモデルである円管の助走区間内の非定常流れについて、特に円管内の流量がステップ状に変化したときの流速分布の近似解析解を求め実測値との比較検討を行なった。しかしその近似解析の結果については、「特に流体が静止の状態から流量がステップ状に変化したときの各点の管軸方向の流速が定常値に達するまでに要する時間が、粘性に無関係にその点の入力からの距離を平均流速で除した値に等しくなる。」といったような疑問点が残されていた。また手持のレー

ザ・ドップラ流速計では特に零からある値まで変化するような流速を測定することができないため、上述の疑問点を実験的に検討することもできない。

そこで本報では前報¹⁾と同一の流れについて差分法による数値解を求め、上述の疑問点を含めて前報の諸結果と比較検討を行ったので、それらについて報告する。

助走区間内の非定常流速分布に関する従来の研究はあまり見当たらず、著者らの知る範囲では前報で紹介した Atabek²⁾らの脈動流に関する近似解析の研究と Avula³⁾の近似解析の研究があるが、両者とも管内の半径方向の流速を無視しており、実験結果との比較もなされていない。

2. 主な記号

f : 管軸 ξ の格子幅, g : 半径 R の格子幅, h : 時間 τ の格子幅, i : 格子点の管軸方向の番号 ($i = 1$ が入口) を示す添字, j : 格子点の半径方向の番号 ($j = 1$ が中心軸), k : 格子点の時間軸方向の番号 ($k = 1$ が初期時刻), l : ξ の領域の分割数, m :

* 昭和52年11月15日 原稿受付

** 東京工業大学 精密工学研究所

*** 東京芝浦電気株式会社 府中工場

R の領域の分割数, n : τ の領域の分割数, r : 半径方向の座標, r_0 : 管内半径, R : 無次元半径座標 r/r_0 , R_0 : レイノルズ数 $2r_0\omega_1/\nu$, t : 実時間, $\bar{t}$: 無次元時間 $2T/R_0$, T : 無次元時間 $\omega_1 t/r_0$, u : 管軸方向の流速, u^* : $\{u(\bar{x}, R, \bar{t}) - u(\bar{x}, R, 0)\}/\omega_1$, U : 管軸方向の無次元流速 u/ω_1 , v : 半径方向の流速, V : 半径方向の無次元流速 v/ω_1 , w : 管横断面上の平均流速, w_1 : w の初期値, w_2 : w の最終値, w_0 : w のステップ変化の量 $w_2 - w_1$, x : 管軸方向の座標, $\bar{x}$: 管軸方向の無次元座標 $2X/R_0$, X : 管軸方向の無次元座標 x/r_0 , α : 管軸方向の座標の変換係数, β : 時間軸の変換係数, r と θ : 緩和係数, σ : w_1/ω_1 , ξ : 変換後の管軸方向の座標 $\tanh \alpha X$, τ : 変換後の時間軸 $\tanh \beta T$, ω : 無次元渦度, ϕ : 無次元流れ関数,

3. 数値解法

前報のFig. 1, 2と同様な管路系を考える。時刻 $t = 0$ まで管内の流れは平均流速 w_1 の定常流であったとし、後述の仮定(1)により、時刻 $t = 0$ に平均流速が w_0 だけステップ状に変化し $t > 0$ で平均流速が $w_2 (= w_1 + w_0)$ の一定値に保たれているような過渡的な流量変化時の管内各点の流速変化に注目する。実際の流体としては油や水を考えており、それらには多少とも圧縮性があるために、管入口の流量変化はほぼ音速 C で下流側に伝はることになる。この伝はに要するむだ時間 t_d は管入口から w_2 の所で w_2/C になる。一方前報¹⁾の実験から明らかなように w_2 における流速がほぼ定常値に達するまでに要する時間 t_s はほぼ w_2/ω_2 に等しく、 t_d/t_s の値は w_2/C になる。流れをレイノルズ数が 10^3 程度以下の層流に限定すると、通常の油圧系の管路では w_2 は高々 10^3 cm/s のオーダー以下になる。したがって音速 C が 10^3 cm/s 程度であることから、 t_d/t_s は 10^{-2} 以下となり、むだ時間 t_d はほとんど無視できる。

以上のような流れに対し、次のような仮定をおく。

(1)流体は非圧縮粘性流体、(2)管路は半無限長の円管で管入口断面上での管軸方向の流速は一樣に等しく、同断面上での半径方向の流速は零、(3)流れは軸対称層流で円周方向の流速は零とする。

管入口を $x = 0$ に、管軸を $r = 0$ にとった円柱座標 (r, θ, x) を考えると、軸対称流であることから渦度は θ 成分のみとなり、それを w_2/r_0 で除した無次元化された渦度 w は次のようになる。

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R} \quad (1)$$

また次式を満たす無次元流れ関数 ϕ を導入する。

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R}, \quad V = -\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (2)$$

無次元時間 T と管軸方向の無次元距離の考えるべき区間 $0 \sim \infty$ を、次式により $0 \sim 1$ の区間に写像する。

$$\xi = \tanh(\alpha X) \quad (3)$$

$$\tau = \tanh(\beta T) \quad (4)$$

以上の諸変数を用いた渦度輸送方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \beta(1-\tau^2) \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \frac{\alpha(1-\xi^2)}{R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial R} \right. \\ & \left. - \frac{\omega}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \frac{2}{R_0} \left[\alpha^2(1-\xi^2) \right. \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (1-\xi^2) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \omega}{\partial R} \right) - \frac{\omega}{R^2} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

式(1), (2)より次式を得る。

$$\begin{aligned} \omega R = & \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} - \alpha^2(1-\xi^2) \\ & \times \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (1-\xi^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

上の二つの基礎式を差分化するため、 ξ , R , τ の区間 $[0, 1]$ をそれぞれ l , m , n 等分した幅 f , g , h をもつ格子で全領域をおおう。Fig. 1の●印のように任意の格子点の番号を i, j, k とする。 $i = 1$ は $X = 0$, $i = l + 1$ は $X \rightarrow \infty$, $j = 1$ は $R = 0$, $j = m + 1$ は $R = 1$, $k = 1$ は $T = 0$, $k = n + 1$ は $T \rightarrow \infty$ にそれぞれ対応する。番号が i, j, k の格子点の諸量を ω_{ijk} のように添字を付して示す。中心差分を用いて式(5), (6)を差分化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \omega_{ijk} = & (G_{ijk})^{-1} \{ A_k(\omega_{ijk-1} - \omega_{ijk+1}) + S_{ijk}\omega_{ij+1k} \\ & + P_{ijk}\omega_{ij-1k} + W_{ijk}\omega_{i+1jk} + Y_{ijk}\omega_{i-1jk} \} \quad (7) \end{aligned}$$

Fig. 1 Index of lattices

$$\phi_{ijk} = (F_i)^{-1} \{-R_j \omega_{ijk} + E_j \phi_{ij+1k} - D_i \phi_{ij-1k} - c_i (c_i - \alpha \xi_i) \phi_{i+1jk} - c_i (c_i + \alpha \xi_i) \phi_{i-1jk}\} \quad (8)$$

ここで $A_k = \beta(1 - \tau_k^2) R_0 / (4h)$, $B_{ij} = \alpha(1 - \xi_i^2) R_0 / (8f g R_j)$, $c_i = \alpha(1 - \xi_i^2) / f$, $D_j = 1 / (2g R_j) + 1/g^2$, $E_j = 1 / (2g R_j) - 1/g^2$, $F_i = -2(c_i^2 + 1/g^2)$, $G_{ijk} = \{2g B_{ij}(\phi_{i+1jk} - \phi_{i-1jk}) - F_i + 1/R_j^2\} / R_j$, $S_{ijk} = B_{ij}(\phi_{i+1jk} - \phi_{i-1jk}) + D_j$, $P_{ijk} = -B_{ij}(\phi_{i+1jk} - \phi_{i-1jk}) - E_j$, $W_{ijk} = -B_{ij}(\phi_{ij+1k} - \phi_{ij-1k}) + c_i(c_i - \alpha \xi_i)$, $Y_{ijk} = B_{ij}(\phi_{ij+1k} - \phi_{ij-1k}) + c_i(c_i + \alpha \xi_i)$

式(7), (8)の解 ϕ_{ijk} , ω_{ijk} を, 次に示す境界条件のもとに, 反復法によって求めた.

i) 管入口 ($i=1$) で $V=0$ で

$k=1$ の初期状態のとき $U = \omega_1 / \omega_2$ より

$$\phi_{1j1} = \sigma R_j^2 / 2, \text{ ここで } \sigma = \omega_1 / \omega_2$$

$k \geq 2$ のとき $U=1$ より

$$\phi_{1jk} = R_j^2 / 2$$

$\partial U / \partial R = 0$ より ω の管入口の境界条件は

$$\omega_{i=0} = -\frac{\alpha^2}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0}$$

となり, テイラ展開を利用して差分化すると

$$m \geq j \geq 2 \text{ で}$$

$$\omega_{1jk} = -\frac{\alpha^2}{(j-1)g} \cdot \frac{8\phi_{2jk} - \phi_{3jk} - 7\phi_{1jk}}{2f^2} \quad (9)$$

ii) 管壁 ($j=m+1$) で $U=0$, $V=0$ より

$k=1$ のとき $\phi_{i(m+1)1} = \sigma/2$

$k \geq 2$ のとき $\phi_{i(m+1)k} = 1/2$

$U=0$ と ϕ が一定の条件より ω の境界条件は

$$\omega_{i=m+1} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} \Big|_{R=1}$$

式(9)と同様に差分化すると

$i \geq 2$ で

$$\omega_{i(m+1)k} = \frac{7\phi_{i(m+1)k} - 8\phi_{i+1k} + \phi_{i-1k}}{2g^2} \quad (10)$$

iii) 管中心 ($j=1$) で $\partial U / \partial R = 0$, $V=0$ より

$$\phi_{i1k} = 0, \quad \omega_{i1k} = 0$$

iv) その他

管入口 ($i=1$) で管壁 ($j=m+1$) に接するコーナーの所の ω は, 管入口での ω が負で管壁での ω が正であることから, 零とした. $x \rightarrow \infty$ あるいは $t \rightarrow \infty$ に相当する $i=l+1$ あるいは $k=n+1$ における ϕ と ω は次のように内部領域の値から直線近似で求めた.

$$\left. \begin{aligned} \phi_{l+1jk} &= 2\phi_{ljk} - \phi_{l-1jk} \\ \phi_{ijn+1} &= 2\phi_{ijn} - \phi_{ijn-1} \\ \omega_{l+1jk} &= 2\omega_{ljk} - \omega_{l-1jk} \\ \omega_{ijn+1} &= 2\omega_{ijn} - \omega_{ijn-1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

次に計算手順について簡単に述べる. まず最初, 時間に無関係に一定な境界値を定めるとともに $k=1$ のすべての格子点の ϕ_{ij1} , ω_{ij1} に初期値^{*}を与える. 1) 内部領域のすべての格子点の ϕ_{ijk} , ω_{ijk} に P 回目の反復値 ($P=1$ は最初の近似値) $\phi_{ijk}^{(P)}$, $\omega_{ijk}^{(P)}$ を入れる. 2) この反復値を用いて式(9)~(11)の境界値を求める. 3) 内部領域内の格子点 (i, j, k) に対する式(7), (8)の左辺の値を, これまでに得られた反復値を右辺に代入して求め, それを $\omega_{ijk}^{(P+1)'}$, $\phi_{ijk}^{(P+1)'}$ とおき, 次式によってその格子点の $P+1$ 回目の新しい反復値 $\omega_{ijk}^{(P+1)}$, $\phi_{ijk}^{(P+1)}$ を求める.

$$\omega_{ijk}^{(P+1)} = \omega_{ijk}^{(P)} + \delta (\omega_{ijk}^{(P+1)'} - \omega_{ijk}^{(P)}) \quad (12)$$

$$\phi_{ijk}^{(P+1)} = \phi_{ijk}^{(P)} + r (\phi_{ijk}^{(P+1)'} - \phi_{ijk}^{(P)}) \quad (13)$$

ここで δ , r は緩和係数. 上の新しい反復値を求める格子点の順番は $(2, 2, 2)$ $(3, 2, 2)$ $\dots$, $(2, 3, 2)$ $(3, 3, 2)$ $\dots$, $(2, 2, 3)$ $(3, 2, 3)$ $\dots$ のように i, j, k の順に走査した. 4) $\omega_{ijk}^{(P+1)}$, $\phi_{ijk}^{(P+1)}$ が次の条件を満たさないときは, 1)に戻って計算を続行し, 満足したとき次に進む.

$$\left| (\omega_{ijk}^{(P+1)} - \omega_{ijk}^{(P)}) / \omega_{ijk}^{(P+1)} \right| < 5 \times 10^{-3} \quad (14)$$

$$\left| (\phi_{ijk}^{(P+1)} - \phi_{ijk}^{(P)}) / \phi_{ijk}^{(P+1)} \right| < 5 \times 10^{-3} \quad (15)$$

ω より ϕ の方が収束がよいので, 式(14)を満足していれば式(15)はほぼ自動的に満足される. また ω_{ijk} が零に非常に近くなると式(14)を満足しなくなることがあるが, そのとき $\left| \omega_{ijk}^{(P+1)} - \omega_{ijk}^{(P)} \right|$ が 1×10^{-4} 以下であれば収束したとみなした. 4) 得られた ϕ_{ijk} より u_{ijk} , v_{ijk} など所要の諸量を求める.

4. 数値解と実験結果の比較

X, R, T の代わりに前報¹⁾ と同一の座標 $\bar{x} (= 2X/R_0)$, $\bar{r} (= R/R_0)$, $\bar{t} (= 2T/R_0)$ を用いると, R_0 の異なった流れの無次元流速分布を同一の大きさのスケールで図示できるので, 以下では $\bar{x}, \bar{r}, \bar{t}$ を用いる.

本報の数値計算では, 格子幅 $f=g=h=0.05$, 分割数 $l=m=n=20$ とし, 21^3 の 9261 個の格子点について

* 脚注 初期の定常流の ϕ_{ij1} , ω_{ij1} をあらかじめ同様な数値解法で求めておく.

て前節の計算を行った。そのときの α 、 β は次に述べるように定めた。

$\bar{x} = 0$ 、 $\bar{z} = 0$ の隣の格子点(2, 1, 2)と $\bar{x} = \infty$ 、 $\bar{z} = \infty$ の隣の格子点(20, 1, 20)の $\bar{x}$ 、 $\bar{z}$ を、それぞれ $\bar{x}_2$ 、 $\bar{z}_2$ および $\bar{x}_{20}$ 、 $\bar{z}_{20}$ とすると、それらは式(3)、(4)より次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= 2(\tanh^{-1} 0.05)/(\alpha R_s) \\ \bar{z}_2 &= 2(\tanh^{-1} 0.05)/(\beta R_s) \\ \bar{x}_{20} &= 2(\tanh^{-1} 0.05 \times 19)/(\alpha R_s) \\ \bar{z}_{20} &= 2(\tanh^{-1} 0.05 \times 19)/(\beta R_s)\end{aligned}$$

$\bar{x}$ や $\bar{z}$ が零付近での流速分布は $\bar{x}$ や $\bar{z}$ によって大きく変わる。したがって $\bar{x}_2$ や $\bar{z}_2$ を十分に小さい値にとらないと $\bar{x}$ 、 $\bar{z}$ が0.02以下での数値解の誤差が大きくなる。本報では $\bar{x}_2$ や $\bar{z}_2$ が0.005以下になるように R_s によって α 、 β を適当に選んだ。しかし $\bar{x}_{20}$ 、 $\bar{z}_{20}$ を小さくすると $\bar{x}_{20}$ 、 $\bar{z}_{20}$ も小さくなってしまいうので、特に $\bar{x}$ 、 $\bar{z}$ の大きい所の流速分布に注目するときに限って、 $\bar{x}_{20}$ 、 $\bar{z}_{20}$ が注目している $\bar{x}$ 、 $\bar{z}$ より大きくなるように α 、 β を選んだ。

式(12)、(13)の緩和係数 θ 、 r は一義的に定められず、試行錯誤で適当な値を求めた。 ϕ より ω の方が収束が

悪いので、 θ はあまり大きくとれない。本論文では $\theta = 0.2$ 、 $r = 1$ にとった。

以上のようなパラメータを用いた数値解の数例を、分割数を多くしたときの数値解、例えば定常流の場合 $l=m=64$ 、非定常流の場合 $l=m=20$ 、 $n=32$ (格子点の数は14553となり収束は極めておそい)と比較したところ、その差は数%以下であった。

次に前報¹⁾と同一の実験装置で流速分布を測定した結果と数値解とを比較した例を示す。Fig. 2は R_s が316の定常流の場合の U で実線が数値解、○印が実測

Fig. 2 Velocity profiles of a steady flow in the inlet region.
 $l = m = 20$, $Re = 316$

Fig. 3 Transition of velocity change u^* at various cross-sections of the inlet region.
o : Experimental results, — : Numerical solutions

値である。Fig. 3は流量をほぼステップ状に変えた非定常流の場合の u^* について前報のFig. 6のNo. 1～No. 4の実験結果(○印)を本報の数値解(実線)と比較して示したものである。両図で示されるように数値解は実験結果に比較的良好一致している。このことから、前節で示した反復法による数値解が実用上十分な精度をもっていることがいえる。

5. 数値解と近似解析解との比較検討

緒言で述べた前報¹⁾の近似解析解(以下解析解と略す)に対する疑問点を含めて、数値解と解析解の比較検討について次に述べる。

Fig. 4, 5は流体が静止の状態から R_0 がそれぞれ

Fig. 4 Numerical solution of u^* , ($Re = 100$, $w_1 = 0$)
—: $\bar{x} = 0.105$ ($X = 5.26$), ---: $\bar{x} = 0.0346$ ($X = 1.73$)
- · - ·: $\bar{x} = 0.0695$ ($X = 3.48$), · · · ·: $\bar{x} = 0.0182$ ($X = 0.912$)
●: Approximate solution, $Tl = 50 t$

Fig. 5 Numerical solution of u^* , ($Re = 400$, $w_1 = 0$)
—: $\bar{x} = 0.105$ ($X = 21.03$), ---: $\bar{x} = 0.0346$ ($X = 6.92$)
- · - ·: $\bar{x} = 0.0695$ ($X = 13.9$), · · · ·: $\bar{x} = 0.0182$ ($X = 3.65$)
●: Approximate solution, $T = 200 t$

100, 400 に相当する平均流速 w_0 まで急加速されたときの無次元流速 u^* の数値解の時間的変化を曲線で図示したものである。 $\bar{x}$ の異なる4箇所の横断面のそれぞれの $\bar{x}$ を上流側より $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ とすると、二点鎖線は $\bar{x}_0$ の、一点鎖線は $\bar{x}_1$ の、破線は $\bar{x}_2$ の、実線は $\bar{x}_3$ のそれぞれの断面上の $\bar{t} = 0.05, 0.75, 0.85, 0.95$ における u^* の数値解である。図中の●印は最下流の $\bar{x}_3$ における解析解を示したもので、両図では R_0 によらず同一の値になる。 $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ における解析解はそれぞれより下流側の断面での解析解と同一の時間的経過を $\bar{t} = 0$ よりそれぞれ $\bar{t} = \bar{x}_0$, $\bar{t} = \bar{x}_1$, $\bar{t} = \bar{x}_2$ までたどり、それ以後は一定値になる。 $\bar{x}_0$ の断面の $\bar{t} = 0.05$ における u^* の解析解を例にとると、それは $\bar{t} = 0$ より●印に沿って徐々に増加し、 $\bar{t} = \bar{x}_0$ で図中のB点に達し、以後の $\bar{t} > \bar{x}_0$ ではB点からの矢印のように一定値を保つ。A, C点はそれぞれ $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$ の断面の $\bar{t} = 0.05$ の解析解の定常値を示している。Fig. 6は $\bar{x}_0$ の断面における u^* の速度分布を、種々の時刻 $\bar{t}$ について $R_0 = 100$ と400の場合を対比させて、示したもので実線が数値解、●印が解析解である。

Fig. 4～6にあらわされている数値解と解析解の間には次に述べるような類似点や相違点が認められる。

(1)ある断面上の u^* が最初の内その断面より下流側の断面上の u^* と同一の時間的経過をたどる点は両解とも同じであるが、それから始める時期は両解の間に差がある。解析解の場合その時期は R_0 によらず $\bar{t} = \bar{x}$ になるが、数値解の場合のその時期は R_0 が小さい方が幾分早くなる。(2)ある断面上の u^* が定常値に達する時期は解析解の場合 $\bar{t} = \bar{x}$ で $\bar{t}$, R_0 に無関係である。数値解の場合 u^* がほぼ定常値になる時期は、Fig. 4の二点鎖線の $\bar{t} = 0.05$ と $\bar{t} = 0.85$ の場合に見られるように同一断面内でも $\bar{t}$ によって異なる。また $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$

Fig. 6 Transition of velocity change u^* at $\bar{x} = 0.0346$
—: Numerical solutions, ●: Approximate solutions

のように入口に近い断面上の流速分布がほぼ定常状態に達する時期 $\bar{t}$ の値はそれぞれ $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ より大きく、 $\bar{x}_0$ 程度の下流側の断面上ではその時期 $\bar{t}$ の値はほぼ $\bar{x}_0$ に等しいが、それらの時期の R_e による違いは判然としていない。(3)解析解の数値解に対する近似度は R_e が小さい方が、また流れが定常状態に近い方が悪くなるが、実用面から考えるとその近似度は比較的良好といえよう。

Fig. 7, 8は、 $R_e = 350$ の定常流である初期状態から R_e が500になるまで流量をステップ状に増加したときの、 $\bar{x} = 0.43$ と $\bar{x} = 0.092$ における断面上の u^* をそれぞれ示したもので、実線が数値解、破線が解析

Fig. 7 u^* at $\bar{x} = 0.0434$
—: Numerical solutions
---: Approximate solutions
Initial $Re = 350$, Final $Re = 500$

Fig. 8 u^* at $\bar{x} = 0.0916$
—: Numerical solutions
---: Approximate solutions
Initial $Re = 350$, Final $Re = 500$

解である。解析解は数値解に比較的良好に似ているが、 $\bar{x}$ が大きいFig. 8で流れが定常状態に近い場合管中央部付近の解析解の近似度が悪くなっている。これは前報¹⁾のFig. 6と本報のFig. 3のNo. 4 同士（共に $\bar{x} = 0.109$ ）の内の $\bar{t} = 0.3$ のときの速度分布図の差としてもあらわれており、数値解の方が実験結果によく一致している。

6. 結 言

助走区間を含めた円管内の非圧縮粘性流体の非定常流れを軸対称層流と仮定して、管内流量がステップ状に変化したときの非定常流速分布を差分法によって求め、得られた数値解が実験結果と比較的よく一致することを確かめるとともに、この種の流れについて前報¹⁾で示した近似解析解と本報の数値解との比較を行い、次のような諸点を明らかにした。

(1) 始め静止状態にある管内流体が急加速される場合、任意の横断面上の管軸方向の流速の分布は最初の内その断面より下流側の断面上の流速分布と同一の時間経過をたどって変化するが、次第にそれからずれ、その断面に対応する定常分布に近づく。

(2) 上記(1)の流速分布がほぼ定常状態に達する時期 $\bar{t}$ は、管入口付近（ $\bar{x}$ が0.05程度以下）では $\bar{x}$ の値より大きく、管入口付近より下流側では $\bar{x}$ の値より小さくなる傾向があり、厳密には $\bar{t}$ には等しくならない。しかしその時期 $\bar{t}$ の実用上の目安の値としては $\bar{t} = \bar{x}$ と考えられる。

(3) 初期状態が $R_e \approx 0$ の定常流の場合には助走区間内の各断面でのその流速分布は異なっているので、流量のステップ状変化による初期流速分布からの流速の変化分には(1)のような特徴は見られないが、流速分布が定常状態に達する時期 $\bar{t}$ は(2)と同様大略 $\bar{x}$ の値に近い。

(4) 前報¹⁾で得られた近似解析解と本報で求めた数値解との間には本文中で示したように多少の差があるが、実用上この程度の差を無視できる場合には、この種の流れの解析に近似解析解を用いる方が計算がはるかに簡単で実用的である。

終わりに当たり、本研究に対し終始貴重な御助言を下された東京工業大学池辺洋教授に心から感謝の意を表するとともに、本研究に対し文部省科学研究費（一般研究）の一部を使用させていただいたことを付記し謝意を表します。また数値計算には東京工業大学総合情報処理センタのHITAC-8700システムおよびM-180システムを使用させていただき、同センタの皆様へ謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 中野, 宮田: 管内非定常流れに関する研究 (第2報),
油圧と空気圧, 8-1, 60/66, (1977)
- 2) Atabek, H. B. et al. : Oscillatory Flow Near the
Entry of a Circular Tube, ZAMP, XII, 185/201,
(1961)
- 3) Avula, X, J. R. : Analysis of Suddenly Started
Laminar Flow in the Entrance Region of a Circular
Tube, Appl. Sci. Res. 21, 248/259, (1969-10)