論文

ファジィ入出力データに対する 多目的ファジィ線形回帰分析[†]

坂和 正敏^{*1} 矢野 均^{*2}

一般に、通常の入出力データに対する線形回帰モデルのパラメータは、最小二乗法により求められる。これに対して、本論文では、入力データ・出力データが共にファジィ数で表される場合に対して、最小二乗法との関連に注意しながら、モデルのパラメータがファジィ数で表されるようなファジィ線形回帰モデルの構成を試みる。即ち、ファジィ数間の等号関係の可能性と必然性の度合いを表す3種類の指標に基づいて、ファジィ線形回帰モデルを求めるための3種類の多目的計画問題の定式化を試みるとともに、線形計画法に基づいて、対応する意思決定者の満足解を導出するための対話型意思決定手法を提案し、数値例によりその妥当性を示す。

キーワード：ファジィ線形回帰分析、ファジィ入出力データ、可能性、必然性、多目的計画法

1. まえがき

社会システム、環境システムなどの大規模かつ複雑なシステムには、一般に、人間が構成要素として含まれる。従って、取り扱うデータには、しばしば人間の主観的判断のあいまい性が反映されているため、システム全体を明確な数式モデルとして表現することは困難であると思われる。

このような観点から、田中ら^{(9)~(11)}は、ファジィ理論の立場からの回帰分析として、ファジィ線形回帰分析の概念を導入した。通常の線形回帰分析では、一般に、観測データとモデルの間の誤差変動はある確率分布に従うことが仮定されているのに対して、ファジィ線形回帰分析では、観測データとモデルの間のずれは、入出力関係を表すシステム構造自体のあいまい性によるものと仮定され

ている。彼らは、通常の入出力データに対するファジィ線形回帰モデルに加えて、通常の入力データと『だいたい a ぐらい』というようなファジィ出力データに対して、可能性線形システムの概念の導入によるファジィ線形回帰モデルを求めるための問題は、線形計画問題⁽⁶⁾に帰着できることを示した。ファジィ線形回帰分析は、その後、坂和ら⁽⁸⁾により、多目的最適化の観点からの定式化が試みられてきた。しかし、これまでの定式化では、出力データのみがファジィ数で、入力データは通常の数であるという仮定のもとでの議論が展開されてきた。

このような状況において、本論文では、入力データ・出力データが共にファジィ数で表される場合に対して、従来の線形回帰モデルを求めるための問題との関連に注意しながら、ファジィ数間の等号関係の可能性と必然性を表す3種類の指標に基づくファジィ線形回帰モデルを求めるための多目的計画問題を定式化する。即ち、モデルの『あいまい度』とモデルとファジィ出力データの間の『適合度』を共に最適化する多目的計画問題に対して、意思決定者の満足解を導出するための、線

[†] Multiobjective Fuzzy Linear Regression Analysis for Fuzzy Input-output Data
Masatoshi SAKAWA and Hitoshi YANO

*1 岩手大学 工学部
Faculty of Engineering, Iwate University

*2 名古屋市立女子短期大学
Nagoya Municipal Women's Junior College

形計画法⁽⁶⁾に基づく対話型意思決定手法を提案する。また、提案した対話型意思決定手法の妥当性・有効性を、数値例により検討する。

2. ファジィ数間の等号関係

Dubois ら^{(1), (3)} は、2つのファジィ数 $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ の等号関係を定義するために、可能性(Possibility)・必然性(Necessity)の観点から、それぞれのメンバーシップ関数 $\mu_{\tilde{m}}(u)$, $\mu_{\tilde{n}}(u)$ を用いて次の3種類の指標を導入した。

$$\text{Pos}(\tilde{m} = \tilde{n}) = \sup_{u \in R^1} \min(\mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(u)) \quad (1)$$

$$\text{Nes}(\tilde{m} \subset \tilde{n}) = \inf_{u \in R^1} \max(1 - \mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(u)) \quad (2)$$

$$\text{Nes}(\tilde{m} \supset \tilde{n}) = \inf_{u \in R^1} \max(\mu_{\tilde{m}}(u), 1 - \mu_{\tilde{n}}(u)) \quad (3)$$

ここで、 $\text{Pos}(\tilde{m} = \tilde{n})$ は、 $\tilde{m}$ が $\tilde{n}$ と等しい可能性の度合い、 $\text{Nes}(\tilde{m} \subset \tilde{n})$ ($\text{Nes}(\tilde{m} \supset \tilde{n})$)は、 $\tilde{n}$ が $\tilde{m}$ を含む(に含まれる)必然性の度合いとして解釈できる。

ファジィ数 $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ のメンバーシップ関数は凸であることから、対応する α レベル集合は、それぞれ、閉区間 $[m_a^L, m_a^R]$, $[n_a^L, n_a^R]$ として表すことができる。この時、次の定理が成立する。

【定理1】

(I) $\text{Pos}(\tilde{m} = \tilde{n}) \geq \alpha$ であるための必要十分条件は、

$$m_a^R \geq n_a^L \text{ かつ } m_a^L \leq n_a^R. \quad (4)$$

(II) $\text{Nes}(\tilde{m} \subset \tilde{n}) \geq \alpha$ であるための必要十分条件は、

$$m_{1-\alpha}^L \geq n_a^L \text{ かつ } m_{1-\alpha}^R \leq n_a^R. \quad (5)$$

(III) $\text{Nes}(\tilde{m} \supset \tilde{n}) \geq \alpha$ であるための必要十分条件は、

$$m_a^L \leq n_{1-\alpha}^L \text{ かつ } m_a^R \geq n_{1-\alpha}^R. \quad (6)$$

ここで、条件(4)–(6)は、ファジィ数 $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ の α レベル集合の包含関係

$$[m_a^L, m_a^R] \cap [n_a^L, n_a^R] \neq \emptyset.$$

$$[m_{1-\alpha}^L, m_{1-\alpha}^R] \subset [n_a^L, n_a^R].$$

$$[n_{1-\alpha}^L, n_{1-\alpha}^R] \subset [m_a^L, m_a^R].$$

を不等式表現したものであることに注意しよう。

また、“*”を閉区間 $[m_a^L, m_a^R]$, $[n_a^L, n_a^R]$ の間の2項演算、“ $\otimes$ ”を拡張原理⁽¹²⁾に基づく、ファジィ数 $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ の間の対応する2項演算とすれば、次の系が成立する⁽⁵⁾。

【系1】

$$(\tilde{m} \otimes \tilde{n})_\alpha \leq [m_a^L, m_a^R] * [n_a^L, n_a^R] \quad (7)$$

この系は、2つのファジィ数の拡張原理に基づく2項演算により生ずるファジィ数の α レベル集合が、各ファジィ数の α レベル集合(閉区間)の2項演算により生ずる閉区間と一致することを示している。

3. ファジィ線形回帰モデルの定式化

一般に、与えられた入力データ $\mathbf{x}_i$ と対応する出力データ y_i のペア $(\mathbf{x}_i, y_i)$, $i=1, \dots, k$ に対して、最小二乗問題

$$\min_{\mathbf{a} \in R^{n \times 1}} \sum_{i=1}^k (y_i - \mathbf{a} \mathbf{x}_i)^2 \quad (8)$$

の最適解を $\mathbf{a}^*$ とおくと、線形回帰モデルは

$$y = \mathbf{a}^* \mathbf{x} \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_i = (1, x_{i1}, \dots, x_{in})^T, \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \quad (10)$$

であたえられる。ここで、データ $(\mathbf{x}_i, y_i)$, $i=1, \dots, k$ とモデルによる推定値との差 $u_i = y_i - \mathbf{a}^* \mathbf{x}_i$, $i=1, \dots, k$ は、観測誤差とみなされ、ある確率分布に従うことが仮定されている。

これに対して、本論文では、入力データ・出力データがともにファジィ数(あるいはファジィ数のベクトル)で表される場合に対するファジィ線形回帰モデルについて考察する。ここでは、モデルによる推定値とファジィ出力データとのずれは、入出力関係を表すシステム構造自体のあいまい性に依存しているものと仮定されており、形式的には係数にあいまい性を含むモデルとして、次のように表される。

$$\tilde{y}_i = \tilde{\mathbf{a}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}_i, i=1, \dots, k \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n), \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = (1, \tilde{x}_{i1}, \dots, \tilde{x}_{in})^T, i=1, \dots, k \quad (13)$$

ここで、 $\tilde{y}_i$, $\tilde{a}_j$, $\tilde{x}_{ij}$ は、ファジィ数⁽²⁾を表す。また、 $\otimes$ は2つのファジィ数のベクトル $\tilde{\mathbf{a}}$ と $\tilde{\mathbf{x}}_i$ の間の積を表す。

さて、問題を明確に規定するため、ファジィ出力データ $\bar{y}_i, i=1, \dots, k$ とファジィ線形回帰モデル(11)の右辺のファジィパラメータ $\bar{a}_j, j=0, 1, \dots, n$ および、ファジィ入力データの第 j 要素 $\bar{x}_{ij}, i=1, \dots, k, j=1, \dots, n$ のメンバーシップ関数は、それぞれ次式により与えられるものとする。

$$\mu_{\bar{y}_i}(y_i) = \begin{cases} L((\bar{y}_i - y_i)/e_i), & y_i \leq \bar{y}_i, \\ L((y_i - \bar{y}_i)/e_i), & y_i \geq \bar{y}_i, \end{cases} \quad (14)$$

$$\mu_{\bar{a}_j}(a_j) = \begin{cases} L((\bar{a}_j - a_j)/c_j), & a_j \leq \bar{a}_j, \\ L((a_j - \bar{a}_j)/c_j), & a_j \geq \bar{a}_j, \end{cases} \quad (15)$$

$$\mu_{\bar{x}_{ij}}(x_{ij}) = \begin{cases} L((\bar{x}_{ij} - x_{ij})/d_{ij}), & x_{ij} \leq \bar{x}_{ij}, \\ L((x_{ij} - \bar{x}_{ij})/d_{ij}), & x_{ij} \geq \bar{x}_{ij}, \end{cases} \quad (16)$$

ここで、 $\bar{y}_i, \bar{a}_j, \bar{x}_{ij}$ はそれぞれ $\bar{y}_i, \bar{a}_j, \bar{x}_{ij}$ の平均値で、 $e_i > 0, c_j > 0, d_{ij} > 0$ はそれぞれ $\bar{y}_i, \bar{a}_j, \bar{x}_{ij}$ の左右の広がりパラメータである。また、 $L(\cdot)$ は型関数と呼ばれ、次の性質を満たす。

(i) $L(\cdot)$ は $[0, p]$ 上で強意単調減少かつ連続的微分可能な関数、 $[p, \infty)$ 上では $L(\cdot) = 0$ 。

(ii) $L(0) = 1$ かつ任意の $x \in [0, p]$ に対して

$$L(x) \geq 0. \quad \text{ただし、} p > 0 \text{ はある正の数.}$$

式(14), (15), (16)で定義されるファジィ数 $\bar{y}_i, \bar{a}_j, \bar{x}_{ij}$ は、しばしば次のように表される⁽²⁾。

$$\bar{y}_i = (\bar{y}_i, e_i)_L, i=1, \dots, k \quad (17)$$

$$\bar{a}_j = (\bar{a}_j, c_j)_L, j=0, 1, \dots, n \quad (18)$$

$$\bar{x}_{ij} = (\bar{x}_{ij}, d_{ij})_L, i=1, \dots, k, j=1, \dots, n \quad (19)$$

ここで、 $\bar{x}_{i0} = 1, i=1, \dots, k$ であることから、便宜上、

$$\bar{x}_{i0} = (1, 0)_L, i=1, \dots, k, \quad (20)$$

と表すことにする。

以下では、ファジィ数 $\bar{x}_{ij}, i=1, \dots, k, j=1, \dots, n$ の α レベル集合は、任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して非負であると仮定する。

ところで、現在のところ、ファジィ数間の乗算により生ずるファジィ数のメンバーシップ関数を直接求めることはできないので、ファジィ線形回帰モデルの推定値 $\bar{\alpha} \circledast \bar{x}_i$ も、そのままでは、対応するメンバーシップ関数の形状を知ることはでき

ない。しかし、系1から、拡張原理に基づくファジィ数間の2項演算により生ずるファジィ数の α レベル集合は容易に求められることを考慮すれば、次の定理が得られる。

【定理2】

$$(\bar{\alpha} \circledast \bar{x}_i)_\alpha = [Y_{ia}^L, Y_{ia}^R] \quad (21)$$

ここで、

$$Y_{ia}^L = \sum_{j=0}^n [\min \{ (\bar{a}_j - L^{-1}(\alpha) c_j) (\bar{x}_{ij} - L^{-1}(\alpha) d_{ij}), (\bar{a}_j - L^{-1}(\alpha) c_j) (\bar{x}_{ij} + L^{-1}(\alpha) d_{ij}) \}] \quad (22)$$

$$Y_{ia}^R = \sum_{j=0}^n [\max \{ (\bar{a}_j + L^{-1}(\alpha) c_j) (\bar{x}_{ij} + L^{-1}(\alpha) d_{ij}), (\bar{a}_j + L^{-1}(\alpha) c_j) (\bar{x}_{ij} - L^{-1}(\alpha) d_{ij}) \}] \quad (23)$$

ここで、 Y_{ia}^L, Y_{ia}^R に、最小化(min)と最大化(max)の演算が含まれているのは、ファジィ数 $\bar{a}_j$ の α レベル集合の左右の端点 $\bar{a}_j - L^{-1}(\alpha) c_j, \bar{a}_j + L^{-1}(\alpha) c_j$ が正の場合と負の場合で、それぞれ、ファジィ数の積 $\bar{a}_j \circledast \bar{x}_{ij}$ の α レベル集合の最小値と最大値の表現が変わるためである。

さて、指標(1) - (3)に基づく、ファジィ線形回帰モデル $\bar{\alpha} \circledast \bar{x}_i$ とファジィ出力データ $\bar{y}_i$ の間の等号関係は、その適合度を表す α の値を固定すれば、定理1, 2から、次のような不等式の集合として表される。

【定理3】

(I) $\text{Pos}(\bar{y}_i = \bar{\alpha} \circledast \bar{x}_i) \geq \alpha$ であるための必要十分条件は

$$\bar{y}_i + L^{-1}(\alpha) e_i \geq Y_{ia}^L \quad (24)$$

$$\bar{y}_i - L^{-1}(\alpha) e_i \leq Y_{ia}^R \quad (25)$$

(II) $\text{Nes}(\bar{y}_i \subset \bar{\alpha} \circledast \bar{x}_i) \geq \alpha$ であるための必要十分条件は

$$\bar{y}_i + L^{-1}(1-\alpha) e_i \leq Y_{ia}^R \quad (26)$$

$$\bar{y}_i - L^{-1}(1-\alpha) e_i \geq Y_{ia}^L \quad (27)$$

(III) $\text{Nes}(\bar{y}_i \supset \bar{\alpha} \circledast \bar{x}_i) \geq \alpha$ であるための必要十分条件は

$$\bar{y}_i + L^{-1}(\alpha) e_i \geq Y_{i, 1-\alpha}^R \quad (28)$$

$$\bar{y}_i - L^{-1}(\alpha) e_i \leq Y_{i, 1-\alpha}^L \quad (29)$$

ここで、 Y_{ia}^L, Y_{ia}^R の内部には、最小化(min)と

最大化(max)のオペレーションが含まれているため、状況により、式(24)－(29)の不等式の形が変化することに注意しよう。

さて、通常の線形回帰モデルのパラメータは、モデルによる推定値と出力データの残差の2乗を最小にするという、いわゆる、最小2乗法により求められる。しかし、ここで取り扱うファジィ線形回帰モデルでは、推定値と出力データは共にファジィ数であるので、通常の2つの値の間の残差(距離)に代わる概念が必要となる。ここで、2つのファジィ数の間の距離を最小にすることは、2つのファジィ数のメンバーシップ関数がなんらかの意味で出来る限り一致することに対応していると考えるのが合理的であろう。

このような観点から、ファジィ線形回帰モデルのファジィパラメータベクトルを同定する問題は、それぞれ、指標(1)、(2)に対しては、制約条件(24)－(25)、(26)－(27)のもとで、ファジィ線形回帰モデルのあいまい度を最小にすると同時に適合度 α を最大にする問題、指標(3)に対しては、制約条件(28)－(29)のもとで、ファジィ線形回帰モデルのあいまい度を最大にすると同時に適合度 α を最大にする問題、として定式化する。

ここで、ファジィ線形回帰モデルのあいまい度 J を次のように定義する。

$$J(\bar{a}, c) = \sum_{i=1}^k \{ (Y_{i1}^L - Y_{i0}^L) + (Y_{i0}^R - Y_{i1}^R) \} \quad (30)$$

即ち、あいまい度 J を、ファジィ線形回帰モデルの推定値 $\bar{a} \circledast \bar{x}_i$ のメンバーシップ関数値が1となる点と0となる点の左右の距離の和として定義している。

以上の議論に基づいて、ファジィ入出力データ $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $i=1, \dots, k$ に対するファジィ線形回帰モデルを求めるための問題は、ファジィ数間の等号関係の指標に対応する次のような3種類の多目的計画問題として定式化することができる。

$$\langle\langle\text{MP1}\rangle\rangle \quad \min J(\bar{a}, c)$$

$$\max \alpha$$

$$\text{subject to } \text{Pos}(\bar{y}_i = \bar{a} \circledast \bar{x}_i) \geq \alpha, i=1, \dots, k,$$

$$c_j \geq 0, j=0, 1, \dots, n, \alpha \in (0, 1)$$

$$\langle\langle\text{MP2}\rangle\rangle \quad \min J(\bar{a}, c)$$

$$\max \alpha$$

$$\text{subject to } \text{Nes}(\bar{y}_i \subset \bar{a} \circledast \bar{x}_i) \geq \alpha, i=1, \dots, k,$$

$$c_j \geq 0, j=0, 1, \dots, n, \alpha \in (0, 1)$$

$$\langle\langle\text{MP3}\rangle\rangle \quad \max J(\bar{a}, c)$$

$$\max \alpha$$

$$\text{subject to } \text{Nes}(\bar{y}_i \supset \bar{a} \circledast \bar{x}_i) \geq \alpha, i=1, \dots, k,$$

$$c_j \geq 0, j=0, 1, \dots, n, \alpha \in (0, 1)$$

4. 多目的計画問題と対話型意思決定手法

多目的計画問題 $\langle\langle\text{MP1}\rangle\rangle$ － $\langle\langle\text{MP3}\rangle\rangle$ において、もし、あいまい度 J の最適化と適合度 α の最適化が同時に達成できるような状況であれば、この問題は通常の単一目的計画問題として取り扱うことができる。しかし、一般に、あいまい度 J と適合度 α は互いに相競合しているので、通常の単一目的計画問題の最適解の概念はそのままでは適用できない。その代わりに、多目的計画問題では、ある目的を改善するためには、少なくとも他のいずれかの目的関数を改悪せざるを得ない解として、パレート最適解が次のように定義されている。

【定義1】

多目的計画問題 $\langle\langle\text{MP1}\rangle\rangle$ － $\langle\langle\text{MP3}\rangle\rangle$ において、制約集合上の任意の $(\bar{a}, c)$ と α に対して、

$$J(\bar{a}, c) \leq J(\bar{a}^*, c^*) \quad (\langle\langle\text{MP1}\rangle\rangle, \langle\langle\text{MP2}\rangle\rangle \text{の場合})$$

$$J(\bar{a}, c) \geq J(\bar{a}^*, c^*) \quad (\langle\langle\text{MP3}\rangle\rangle \text{の場合})$$

かつ、 $\alpha \geq \alpha^*$ が成立しない時、 $(\bar{a}^*, c^*)$ と α^* をパレート最適解という。

ここで、 $\leq$ は2つの制約式のうち少なくとも1つは等号を含まないことを意味する。

一般に、パレート最適解は無限個存在するので、意思決定者は、これらの集合の中から、なんらかの主観的な判断に基づいて最終的な解を導出しなければならない。

このような多目的意思決定状況において、ここでは通常設けられている次の仮定をおく。

【仮定1】

多目的計画問題 $\langle\langle\text{MP1}\rangle\rangle$ － $\langle\langle\text{MP3}\rangle\rangle$ の目的関数 J と α に対して、意思決定者の満足度を表す関数 $U(J, \alpha)$ が存在する。ここで、意思決定者は $U(\cdot)$

を大域的に陽に求めることはできないが、その代わり局所的に選好を評価することができる。また、 $U(\cdot)$ は J に関して強意単調減少(《MP3》の場合は強意単調増加)、 α に関して強意単調増加である。

仮定1において、もし $U(\cdot)$ が陽に求められるのであれば、多目的計画問題《MP1》—《MP3》は $U(\cdot)$ を最大化する単一目的計画問題に帰着できることに注意しよう。しかし、 $U(\cdot)$ を陽に求めることは一般には困難であるので、意思決定者との対話を通じて、彼の満足解を導出する必要がある。

そこで、本論文では、意思決定者との対話を通じてパレート最適解の集合の中から彼の満足解を導出するための対話型意思決定手法を提案する。

《MP1》のパレート最適解の1つは、次の制約問題⁽⁴⁾を解くことにより得られる。

$$\langle\text{CP1}\rangle \quad \min J(\bar{\alpha}, \mathbf{c})$$

subject to $\alpha \geq \alpha_0$

$$\text{Pos}(\bar{y}_i = \bar{\alpha} \circledast \bar{x}_i) \geq \alpha, i=1, \dots, k,$$

$$c_j \geq 0, j=0, 1, \dots, n$$

ここで、 α_0 は意思決定者によりあらかじめ設定される値で、制約問題《CP1》を解くことにより、『適合度』が α_0 以上という条件のもとで『あいまい度』を最小にするようなファジィパラメータベクトル $\bar{\alpha}$ が求められる。

ところで、《CP1》の目的関数および制約式を構成する、 Y_{ia}^L, Y_{ia}^R の内部には、最小化と最大化の演算が含まれているので、そのままでは、線形計画問題として解くことはできない。

そこで、《CP1》を線形計画問題として解くために、まず、次のような添字集合 (J_1, J_2, J_3) に依存した問題《CP1(J_1, J_2, J_3)》を考える。

$$\langle\text{CP1}(J_1, J_2, J_3)\rangle$$

$$\min J(\bar{\alpha}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^k \{(Y_{i1}^L - Y_{i0}^L) + (Y_{i0}^R - Y_{i1}^R)\} \quad (31)$$

$$\text{subject to } \alpha \geq \alpha_0 \quad (32)$$

$$\bar{y}_i + L^{-1}(\alpha) e_i \geq Y_{ia}^L, i=1, \dots, k \quad (33)$$

$$\bar{y}_i - L^{-1}(\alpha) e_i \leq Y_{ia}^R, i=1, \dots, k \quad (34)$$

$$\bar{\alpha}_j - L^{-1}(\alpha) c_j \geq 0, j \in J_1, \quad (35)$$

$$\bar{\alpha}_j - L^{-1}(\alpha) c_j \leq 0, \text{ かつ}$$

$$\bar{\alpha}_j + L^{-1}(\alpha) c_j \geq 0, j \in J_2 \quad (36)$$

$$\bar{\alpha}_j + L^{-1}(\alpha) c_j \leq 0, j \in J_3, \quad (37)$$

$$c_j \geq 0, j=0, 1, \dots, n$$

ただし、

$$Y_{ia}^L = \sum_{j \in J_1} (\bar{\alpha}_j - L^{-1}(\alpha) c_j) (\bar{x}_{ij} - L^{-1}(\alpha) d_{ij}) \\ + \sum_{j \in J_2, J_3} (\bar{\alpha}_j - L^{-1}(\alpha) c_j) (\bar{x}_{ij} + L^{-1}(\alpha) d_{ij}) \quad (38)$$

$$Y_{ia}^R = \sum_{j \in J_1, J_2} (\bar{\alpha}_j + L^{-1}(\alpha) c_j) (\bar{x}_{ij} + L^{-1}(\alpha) d_{ij}) \\ + \sum_{j \in J_3} (\bar{\alpha}_j + L^{-1}(\alpha) c_j) (\bar{x}_{ij} - L^{-1}(\alpha) d_{ij}) \quad (39)$$

問題《CP1(J_1, J_2, J_3)》は、 $(\bar{\alpha}_j, c_j), j=0, \dots, n$ を決定変数とする線形計画問題であるので、容易に解くことができる。しかし、線形計画問題《CP1(J_1, J_2, J_3)》の最適解は、必ずしも《CP1》の最適解とは限らない。次の定理は、《CP1》の最適解となるための必要条件を与えている。

【定理4】

ある添字集合 (J_1, J_2, J_3) に対する《CP1(J_1, J_2, J_3)》の最適解を、 $(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*), j=0, \dots, n$ とおく。

この時、

$$\bar{\alpha}_j^* - L^{-1}(\alpha) c_j^* > 0, j \in J_1, \quad (40)$$

$$\bar{\alpha}_j^* - L^{-1}(\alpha) c_j^* < 0 \text{ かつ}$$

$$\bar{\alpha}_j^* + L^{-1}(\alpha) c_j^* > 0, j \in J_2 \quad (41)$$

$$\bar{\alpha}_j^* + L^{-1}(\alpha) c_j^* < 0, j \in J_3, \quad (42)$$

ならば、 $(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*), j=0, \dots, n$ は、《CP1》の局所的最適解である。

定理4において、《CP1(J_1, J_2, J_3)》の最適解の近傍を $N(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ で定義すれば、十分近傍の任意の $(\bar{\alpha}, \mathbf{c}) \in N(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ に対しては、条件(40)–(42)が成立しているので、制約問題《CP1》を初期値 $(\bar{\alpha}, \mathbf{c})$ と設定して解くことにより、局所的最適解 $(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ が得られることは明らかである。

定理4より、条件(40)–(42)を満たすように添字集合 (J_1, J_2, J_3) をあらかじめ定めることができれば、線形計画問題《CP1(J_1, J_2, J_3)》を解くことにより、《CP1》の局所的最適解が得られること

がわかる。回帰分析をおこなう場合には、あらかじめ決定すべき係数の符号がわかっている場合が多いので、そのような場合には、条件(40)–(42)に対応する添字集合を決定した後、線形計画問題 $\llcorner\text{CP1}(J_1, J_2, J_3)\gg$ を解けばよい。これに対して、事前に係数の符号がわかっていない場合には、線形計画法に基づく次のようなアルゴリズムを実行すればよい。

【アルゴリズム 1】

[ステップ 0]

$i=1, J_1^{(i)} = \{0, 1, \dots, n\}, J_2^{(i)} = \phi, J_3^{(i)} = \phi$ と初期設定する。

[ステップ 1]

線形計画問題 $\llcorner\text{CP1}(J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, J_3^{(i)})\gg$ を解き、対応する最適解を $(\bar{\alpha}_j^{(i)}, c_j^{(i)}), j=0, \dots, n$ とおく。

[ステップ 2]

もし、最適解 $(\bar{\alpha}_j^{(i)}, c_j^{(i)}), j=0, \dots, n$ が条件(40)–(42)を満たすならば終了。そうでなければ、添字集合 $J^{(i+1)}$ を次のように更新する。

$$\begin{aligned} J_1^{(i+1)} &= \{j \in J_1^{(i)} \mid \bar{\alpha}_j^{(i)} - L^{-1}(\alpha) c_j^{(i)} > 0\} \\ &\quad + \{j \in J_2^{(i)} \mid \bar{\alpha}_j^{(i)} - L^{-1}(\alpha) c_j^{(i)} = 0\} \\ J_2^{(i+1)} &= \{j \in J_2^{(i)} \mid \bar{\alpha}_j^{(i)} - L^{-1}(\alpha) c_j^{(i)} < 0 \text{ かつ} \\ &\quad \bar{\alpha}_j^{(i)} + L^{-1}(\alpha) c_j^{(i)} > 0\} \\ &\quad + \{j \in J_1^{(i)} \mid \bar{\alpha}_j^{(i)} - L^{-1}(\alpha) c_j^{(i)} = 0\} \\ &\quad + \{j \in J_3^{(i)} \mid \bar{\alpha}_j^{(i)} + L^{-1}(\alpha) c_j^{(i)} = 0\} \\ J_3^{(i+1)} &= \{j \in J_3^{(i)} \mid \bar{\alpha}_j^{(i)} + L^{-1}(\alpha) c_j^{(i)} < 0\} \\ &\quad + \{j \in J_2^{(i)} \mid \bar{\alpha}_j^{(i)} + L^{-1}(\alpha) c_j^{(i)} = 0\} \end{aligned}$$

$i=i+1$ として、ステップ 1 へもどる。

アルゴリズム 1 に対して、次の定理が成立する。

【定理 5】

アルゴリズム 1 の第 i ステップの最適目的関数値を $J(\bar{\alpha}^{(i)}, \mathbf{c}^{(i)})$ で表すと、次の関係が成立する。

$$J(\bar{\alpha}^{(i)}, \mathbf{c}^{(i)}) \geq J(\bar{\alpha}^{(i+1)}, \mathbf{c}^{(i+1)}) \quad (43)$$

また、アルゴリズム 1 により生成される最適解の数列 $(\bar{\alpha}^{(i)}, \mathbf{c}^{(i)})$ の任意の集積点は、 $\llcorner\text{CP1}\gg$ の局所最適解である。

(証明)

関係式(43)は、添字集合の更新手順の定義より明らか。最適解の数列 $(\bar{\alpha}^{(i)}, \mathbf{c}^{(i)})$ の集積点の 1 つを

$(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ とし、添字集合 $\{0, 1, \dots, n\}$ を次のように分割する。

$$A_1 = \{j \mid \bar{\alpha}_j^* - L^{-1}(\alpha) c_j^* > 0\}$$

$$A_2 = \{j \mid \bar{\alpha}_j^* - L^{-1}(\alpha) c_j^* = 0\}$$

$$A_3 = \{j \mid \bar{\alpha}_j^* - L^{-1}(\alpha) c_j^* < 0 \text{ かつ} \\ \bar{\alpha}_j^* + L^{-1}(\alpha) c_j^* > 0\}$$

$$A_4 = \{j \mid \bar{\alpha}_j^* + L^{-1}(\alpha) c_j^* = 0\}$$

$$A_5 = \{j \mid \bar{\alpha}_j^* + L^{-1}(\alpha) c_j^* < 0\}$$

$A_1 - A_5$ に対して、次のような添字集合 (J_1, J_2, J_3) の組合せが考えられる。

$$(J_1, J_2, J_3) = (A_1 + A_2, A_3, A_4 + A_5)$$

$$(J_1, J_2, J_3) = (A_1 + A_2, A_3 + A_4, A_5)$$

$$(J_1, J_2, J_3) = (A_1, A_2 + A_3 + A_4, A_5)$$

$$(J_1, J_2, J_3) = (A_1, A_2 + A_3, A_4 + A_5)$$

4種類の任意の添字集合に対して、 $\llcorner\text{CP1}(J_1, J_2, J_3)\gg$ は最適解 $(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ を持つ。一方、 $(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ の近傍上の任意の点は、上の4種類の添字集合のいずれかに属することから、 $(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ は $\llcorner\text{CP1}\gg$ の局所最適解となる。

アルゴリズム 1 により生成される添字集合は、高々 $3^{(n+1)}$ 個存在することに注意しよう。

全く同様に、 $\llcorner\text{MP2}\gg, \llcorner\text{MP3}\gg$ の場合に対しても、制約問題 $\llcorner\text{CP2}\gg, \llcorner\text{CP3}\gg$ の定式化と最適解を求めるための線形計画法に基づくアルゴリズムを構成することができる。

このような、制約問題の最適解と多目的計画問題のパレート最適解の関係は、次の定理⁽⁴⁾に与えられる。

【定理 6】

$(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ と $\alpha^* \in (0, 1)$ が多目的計画問題 $\llcorner\text{MP1}\gg - \llcorner\text{MP3}\gg$ のパレート最適解であるための必要十分条件は、 $(\bar{\alpha}^*, \mathbf{c}^*)$ が $\alpha^* \in (0, 1)$ に対する制約問題 $\llcorner\text{CP1}\gg - \llcorner\text{CP3}\gg$ の一意な最適解となることである。

制約問題を解くことにより得られるパレート最適解に対して、意思決定者は、現在の解に満足するか、あるいは、不満足であれば、『適合度 α_0 』の値を更新する必要がある。ここで、既に述べてきたように、『適合度 α_0 』と『あいまい度』は互いに相競合しているので、意思決定者は α_0 の値を更新

する場合には、このことを考慮する必要がある。意思決定者が α_0 の値を更新する時の有益な情報として、『適合度』と『あいまい度』の間のトレードオフ比を利用することが考えられるが、幸いにも、このトレードオフ比の情報は、感度解析⁽⁷⁾の立場から、次の定理に示すように、制約問題の制約式に対応するシンプレックス乗数を用いて、容易に求めることができる。

【定理7】

アルゴリズム1に基づいて得られた $\langle\text{CP1}\rangle - \langle\text{CP3}\rangle$ の一意的な最適解を $\bar{a}_j, c_j, j=0, 1, \dots, n$ とし、非退化条件を満たしていると仮定する。この時、 $\langle\text{CP1}\rangle - \langle\text{CP3}\rangle$ の最適値関数を $J_1(\alpha) - J_3(\alpha)$ で表せば、それぞれ次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1(\alpha)}{\partial \alpha} = & -\frac{\partial L^{-1}(\alpha)}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^k \{ \pi_i^1 e_i + \lambda_i^1 e_i \} \\ & + \sum_{i=1}^k \{ \pi_i^1 \frac{\partial Y_{ia}^L}{\partial \alpha} - \lambda_i^1 \frac{\partial Y_{ia}^R}{\partial \alpha} \} \\ & + \frac{\partial L^{-1}(\alpha)}{\partial \alpha} \{ \sum_{j \in J_1} \eta_j^1 c_j - \sum_{j \in J_2} \eta_j^1 c_j + \sum_{j \in J_3} \eta_j^1 c_j \} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2(\alpha)}{\partial \alpha} = & \frac{\partial L^{-1}(1-\alpha)}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^k \{ \pi_i^2 e_i + \lambda_i^2 e_i \} \\ & + \sum_{i=1}^k \{ \pi_i^2 \frac{\partial Y_{ia}^R}{\partial \alpha} + \lambda_i^2 \frac{\partial Y_{ia}^L}{\partial \alpha} \} \\ & + \frac{\partial L^{-1}(\alpha)}{\partial \alpha} \{ \sum_{j \in J_1} \eta_j^2 c_j - \sum_{j \in J_2} \eta_j^2 c_j + \sum_{j \in J_3} \eta_j^2 c_j \} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_3(\alpha)}{\partial \alpha} = & -\frac{\partial L^{-1}(\alpha)}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^k \{ \pi_i^3 e_i + \lambda_i^3 e_i \} \\ & + \sum_{i=1}^k \{ \pi_i^3 \frac{\partial Y_{ia}^{R, 1-\alpha}}{\partial \alpha} - \lambda_i^3 \frac{\partial Y_{ia}^{L, 1-\alpha}}{\partial \alpha} \} \\ & + \frac{\partial L^{-1}(\alpha)}{\partial \alpha} \{ \sum_{j \in J_1} \eta_j^3 c_j - \sum_{j \in J_2} \eta_j^3 c_j + \sum_{j \in J_3} \eta_j^3 c_j \} \end{aligned} \quad (46)$$

ここで $\pi_i^\ell, \lambda_i^\ell, i=1, \dots, k, \eta_j^\ell, j=0, \dots, n, \ell \leq 1, 2, 3$ はそれぞれ制約問題 $\langle\text{CP1}\rangle - \langle\text{CP3}\rangle$ の制約式に対応するシンプレックス乗数を表す。

関係式(44) - (46)は、 $\langle\text{CP1}\rangle - \langle\text{CP3}\rangle$ の最適解において、対応するラグランジュ関数の α に関する微分係数が、最適値関数の α に関する微分

係数と一致している⁽⁷⁾ことから、直接導くことができる。

以上の議論により、多目的計画問題 $\langle\text{MP1}\rangle - \langle\text{MP3}\rangle$ のパレート最適解の集合の中から、意思決定者の満足解を導出するための対話型アルゴリズムを次のように構成することができる。

【アルゴリズム2】

[ステップ0] 意思決定者は主観的に『適合度 α_0 』($0 < \alpha_0 < 1$)の初期値を設定する。

[ステップ1] 設定された『適合度 α_0 』に対して、対応する制約問題 $\langle\text{CP1}\rangle - \langle\text{CP3}\rangle$ の局所的最適解を線形計画法に基づくアルゴリズム1を用いて解き、多目的計画問題 $\langle\text{MP1}\rangle - \langle\text{MP3}\rangle$ のパレート最適解とトレードオフ比(44) - (46)を計算する。

[ステップ2] 意思決定者は、ステップ1により得られた『あいまい度』と『適合度 α_0 』の値に満足ならば終了。そうでなければ、現在の目的関数値とトレードオフ比の情報を考慮して、『適合度 α_0 』の値を更新してステップ1へ戻る。

5. 数値例

数値例として、表1のような入力データが1次元のファジィ数で表される、8個のファジィ入出力データを取り扱う。

表1において、 x, y は入出力データの平均値、 d, e は左右の広がりのパラメータで、型関数は

表1 ファジィ入出力データ

	入力データ $\tilde{x}$		出力データ $\tilde{y}$	
	x	d	y	e
1	2	0.5	4	0.5
2	3.5	0.5	5.5	0.5
3	5.5	1.0	7.5	1.0
4	7	0.5	6.5	0.5
5	8.5	0.5	8.5	0.5
6	10.5	1.0	8	1.0
7	11	0.5	10.5	0.5
8	12.5	0.5	9.5	0.5

$L(x)=1-x$ とする。即ち、ファジィ入出力データ $\bar{x}$, $\bar{y}$ のメンバーシップ関数は次式により定義される。

$$\mu_{\bar{x}}(t) = \begin{cases} 1 - |x-t|/d, & x-d \leq t \leq x+d \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{y}}(t) = \begin{cases} 1 - |y-t|/e, & y-e \leq t \leq y+e \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

このようなファジィ入出力データ $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $i=1, \dots, 8$ に対して、ファジィ線形回帰モデル $y = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x$ (47)

のファジィパラメータ $\bar{a}_0, \bar{a}_1$ を同定してみよう。まず、指標(1)に基づく、多目的計画問題<MP1>を構成し、アルゴリズム2に基づいて、対応するパレート最適解の集合の中から仮想的な意思決定者の満足解を導出するまでの対話過程を示すと表2のようになる。この場合、 $\alpha=0.6$ において、仮想的な意思決定者の満足解が得られている。図1に、入出力データ空間 (x, y) において、ファジィ入出力データの平均値を中心とし、広がりのパラメ

表2 対話過程

ITERATION	1	2	3	4
α	0.3	0.5	0.7	0.6
$J(\bar{a}, c)$	11.39	18.26	38.73	25.81
$\bar{a}_0$	3.222	3.201	3.508	3.367
c_0	0.	0.1703	0.9242	0.4260
$\bar{a}_1$	0.5779	0.5788	0.5429	0.5595
c_1	0.04634	0.08059	0.1530	0.1108
$\partial J / \partial \alpha$	20.72	60.43	178.8	94.34

表3 指標(1)、(2)を採用した場合のファジィパラメータベクトルの比較($\alpha=0.6$)

指標	(1)	(2)
$J(\bar{a}, c)$	25.81	58.34
$\bar{a}_0$	3.367	3.996
c_0	0.4260	2.746
$\bar{a}_1$	0.5595	0.4776
c_1	0.1108	0.07956

ータを中心からの長さとする矩形と、ファジィ線形回帰モデルのメンバーシップ値が1および0.6となる点の軌跡を描いたグラフが示されている。

同様に、指標(2)に基づく、多目的計画問題<MP2>を構成し、 $\alpha=0.6$ に設定した制約問題<CP2>を解くことにより得られるファジィパラメータベクトルと、指標(1)により得られるファジィパラメータベクトルを比較してみると表3のようになる。また、得られたファジィ線形回帰モデルのメンバーシップ値が1および0.6となる点の軌跡を描くと図2のようになる。

指標(3)を採用した場合には、対応する制約問題<CP3>の実行可能領域は存在しないことがわかる。

図1

図2

6. おわりに

本論文では、ファジィ数間の等号関係の可能性と必然性を表す3種類の指標に基づいて、入力データ・出力データが共にファジィ数で表される場合に対するファジィ線形回帰モデルについて考察した。即ち、従来の線形回帰モデルを求めるための問題との対応関係を考慮することにより、モデルの『あいまい度』とモデルとデータの間の『適合度』を同時に最適化するという3種類の多目的計画問題を定式化し、意思決定者の満足解を求めるための線形計画法に基づく対話型アルゴリズムを構成し、数値例に適用して検討を加えた。今後は、従来の確率論の立場からの回帰分析とファジィ回帰分析の関係を、さらに、明らかにすると共に、ファジィ回帰分析の適用が有効と思われる、あいまいなデータを含む現実の問題への適用が望まれる。

参 考 文 献

- (1) D.Dubois : "Linear Programming with Fuzzy Data" Analysis of Fuzzy Information, Vol.III, (Ed.by J.C.Bezdek) CRC Press, pp.241-263 (1987).
- (2) D.Dubois and H.Prade : Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications, Academic Press (1980).
- (3) D.Dubois and H.Prade : "Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory", Information Science, 30, pp.183-224 (1983).
- (4) Y.Y.Haimes, W.A.Hall and H.T.Freedman, "The Surrogate Worth Trade-off Method", Elsevier (1975).
- (5) H.T.Nguyen : "A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets", J of Math. Anal. & Appl., 64, pp.369-380 (1978).
- (6) 坂和正敏 : "線形システムの最適化<一目的から多目的へ>", 森北出版, (1984).
- (7) 坂和正敏 : "非線形システムの最適化<一目的から多目的へ>", 森北出版, (1986).
- (8) 坂和, 矢野 : "多目的ファジィ線形回帰分析とその応用", 電子情報通信学会論文誌, J72-A, 5, pp.778-785 (1989).
- (9) H.Tanaka : "Fuzzy Data Analysis by Possibilistic Linear Models", Fuzzy Sets and Systems, 24, pp.363-375 (1987).
- (10) H.Tanaka, I.Hayashi and J.Watada : "Possibilistic Linear Regression Analysis Based on Possibility Measure", Proceedings of Second IFSA Congress, Tokyo, pp.317-320 (1987).
- (11) 田中, 和多田, 林 : "ファジィ線形回帰分析の3つの定式化", 計測自動制御学会論文集 22, 10, pp.1051-1057 (1986).
- (12) L.A.Zadeh : "The Concept of Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning", Information Science, 8, pp.199-249, pp.301-357 (1975); 9 pp.43-80 (1975).

(1989年5月10日受付)

[問い合わせ先]

〒820 盛岡市上田4-3-5

岩手大学 工学部 情報工学科

坂和正敏

TEL : 0196-23-5175 (内) 2847

FAX : 0196-25-7222

著者紹介

 さかわ まさとし
 坂和正敏

岩手大学 工学部 情報工学科
 昭和45年3月京都大学工学部数理工学科卒業。昭和50年3月京都大学大学院工学研究科博士課程(数理工学専攻)修了。同年4月神戸大学工学部システム工学科助手、昭和56年3月同助教授を経て、昭和62年3月岩手大学工学部数理情報学講座教授となり現在に至る。大規模システム、多目的システム、ファジィシステムにおける意思決定手法と応用に関する研究に従事。京都大学工学博士。日本OR学会、計測自動制御学会、システム制御情報学会、電子情報通信学会、情報処理学会、国際ファジィシステム学会会員。

著書「線形システムの最適化」、「非線形システムの最適化」、「応用解析学の基礎」、「ファジィ理論の基礎と応用」(以上、森北出版)、「数理計画法入門」(共著 共立出版)、「Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning: Concepts, Methods and Applications」(D. Reidel Publishing Company 共著)

 や の ひとし
 矢野 均

名古屋市立女子短期大学
 昭和55年3月 神戸大学工学部システム工学科卒業。昭和57年3月 神戸大学大学院工学研究科修士課程(システム工学専攻)修了。昭和58年5月 香川大学経済学部管理科学科助手、平成元年10月 名古屋市立女子短期大学助教授。主として多目的システム、ファジィシステムにおける意思決定手法とその応用に関する研究に従事。大阪大学工学博士。日本OR学会、システム制御情報学会、電子情報通信学会、国際ファジィシステム学会。