論文

サンプル値ファジィシステムの安定化[†]

西川 昌宏^{*1} 片山 仁志^{*2} 米山 淳^{*3} 市川 朗^{*3}

本稿では、サンプル値ファジィシステムの安定化問題を考察する。最初に、サンプル値ファジィモデルを導入し、安定な状態フィードバックコントローラと漸近収束するオブザーバの設計を提案する。さらに、安定な状態フィードバックコントローラとオブザーバが存在すれば、それらに基づく出力フィードバックコントローラが常にサンプル値ファジィシステムを安定にすることを示す。最後に、質量-バネ系を例に取り、状態フィードバックとその安定性を保証する正定行列を、サンプル値システムに対するレギュレータ問題を解くことにより求め、設計例を紹介する。

キーワード：ファジィシステム、サンプル値システム、出力安定化、分離原理

1. はじめに

高木・菅野のファジィモデル[8,10,16]は、実システムの局所的な線形表現を与える IF-THEN ルールで記述された非線形システムである。ファジィモデルは、広範な非線形システムを近似することができ、ある種の非線形システムでは厳密に表現することさえできる[6,12]。したがって、その安定性や安定化コントローラの構成を研究することは重要である。同次ファジィシステムの安定性は、田中、菅野[9]により離散時間で、田中[11]により連続時間で考察され、線形 Lyapunov 方程式を満足する正定行列を用いた安定性の十分条件が知られている。状態フィードバックコントローラの自然な設計法は、IF-THEN ルール中の線形サブシステムを用いることであり、田中、菅野[9]、田中、佐野[10]、田中[11]、Wang ら[14]により考察されている。観測出力を用いてシステムを制御する場合、ファジィシステムに対するオブザーバが必要となる[4,13]。[15]では、連続時間及び離散時間ファジィシステムに対し、自然な型のオブザーバを提案し、推定値が漸近収束するための十分条件を求めている。これは状態フィードバック閉ループシステムの安定条件[9,10,11]と双対である。さらに、出力フィードバック

コントローラの安定化問題に関し、安定な状態フィードバックコントローラとオブザーバが存在すれば、それらに基づく出力フィードバックコントローラは常に高木・菅野のファジィモデルを指数安定にすることを示した。

本稿では、連続時間高木・菅野のファジィモデルの安定性をより現実的な観点から考察する。出力はアナログ-デジタルコンバータ(サンブラ)で取り出され、制御入力はデジタル-アナログコンバータ(零次ホールド)で実現されるとする。これはサンプル値制御問題と呼ばれている[3]。線形の場合、この問題を取り扱う古典的な方法は、サンプル値制御システムを通常の離散時間システムに変換し、望まれるコントローラを得るために離散時間制御理論を適用する[3]。最近では、サンプル値システムに対し、 H_2 や H_∞ 理論がよく知られており、離散時間安定化コントローラを設計するために適用されている[1,2,3]。

しかしながら、高木・菅野のファジィモデルは非線形システムであるため、離散時間高木・菅野ファジィモデルを得るためにそれを離散化することはできない。そこで、安定化コントローラを得るために、状態に跳び(ジャンプ)のあるシステム[5,7]に基づく手法を提唱する。2節では、状態に跳び(ジャンプ)のある同次ファジィシステムの安定性を考え、二次形式 Lyapunov 関数を用いて安定のための十分条件を示す。3節では、サンプル値ファジィモデルを導入し、安定な状態フィードバックコントローラと漸近収束するオブザーバの設計を考える。4節では、安定な状態フィードバックコントローラとオブザーバが存在すれば、それらに基づく出力フィードバックコントローラは常にサンプル値ファジィシステムを安定にすることを示す。最後に、5節では、この理論結果を例により確認する。

[†] Stabilization of Sampled-Data Fuzzy Systems
Masahiro NISHIKAWA, Hitoshi KATAYAMA, Jun YONEYAMA and Akira ICHIKAWA

^{*1} 静岡大学大学院電子科学研究科
Graduate School of Electronic Science and Technology,
Shizuoka University

^{*2} 大阪電気通信大学工学部電子機械工学科
Department of Electro-Mechanical Engineering, Osaka
Electro-Communication University

^{*3} 静岡大学工学部電気・電子工学科
Department of Electrical and Electronic Engineering,
Shizuoka University

2. 準備

次のような IF-THEN ルールで与えられる状態に跳び(ジャンプ)のある同次ファジィシステムを考えよう。

IF z_1 is M_{i1} and $\cdots$ and z_p is M_{ip}
 THEN $\dot{x}(t) = A_i x(t)$, $kh < t < (k+1)h$,
 $x(kh^+) = \hat{A}_i x(kh)$, $i=1, \dots, r$

ここで、 $x(kh^+) = \lim_{t \downarrow kh} x(t)$ である。また、 h はサンプリング周期、 $x(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ は状態変数、 r は IF-THEN ルール数、 M_{ij} はファジィ集合、 $z_1(t), \dots, z_p(t)$ は、 $t \neq kh$ で連続、 $t = kh$ で定義された前件部変数であり、 $z(t) = [z_1(t) \cdots z_p(t)]^T$ とする。定義により、このファジィシステムの状態方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) A_i x(t), \quad kh < t < (k+1)h, \\ x(kh^+) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) \hat{A}_i x(kh) \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、

$$\lambda_i(z) = \frac{w_i(z)}{\sum_{i=1}^r w_i(z)}, \quad w_i(z) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j)$$

であり、 $M_{ij}(\cdot)$ は、 M_{ij} のメンバシップ関数値である。 $w_i(z)$ を

$$w_i(z) \geq 0, \quad i=1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r w_i(z) > 0, \quad \forall t$$

と仮定すると、 $\lambda_i(z)$ は

$$\lambda_i(z) \geq 0, \quad i=1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i(z) = 1, \quad \forall t$$

を満足する。

後節で、サンプル値ファジィシステムの安定化問題を考えるとき、状態に跳び(ジャンプ)のある同次ファジィシステム(1)の安定性が重要となる。

補助定理 2.1 状態に跳び(ジャンプ)のある同次システム

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t), \quad kh < t < (k+1)h, \\ x(kh^+) &= \hat{A} x(kh) \end{aligned} \quad (2)$$

が指数安定である必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) + A^T X(t) + X(t) A &= -P < 0, \\ \hat{A}^T X(kh) \hat{A} - X(kh^-) &= -\hat{P} < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

の有界対称解 $X(t) \geq aI, a > 0, 0 \leq t$ が存在することである。ここで $P, \hat{P}$ は正定行列である。

証明： $X(t)$ を(3)の有界な解とすると、 $kh < t < (k+1)h$ で

1) h で

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \{x^T(t) X(t) x(t)\} \\ &= x^T(t) \{ \dot{X}(t) + A^T X(t) + X(t) A \} x(t) \\ &= -x^T(t) P x(t), \\ &x^T(kh^+) X(kh) x(kh^+) - x^T(kh) X(kh^-) x(kh) \\ &= x^T(kh) \{ \hat{A}^T X(kh) \hat{A} - X(kh^-) \} x(kh) \\ &= -x^T(kh) \hat{P} x(kh) \end{aligned}$$

が得られる。 $P, \hat{P} > 0$ で、 $X(t)$ は有界なので、次のような $\alpha > 0, \beta > 0$ が存在する。

$$\begin{aligned} \alpha X(t) &\leq P, \quad kh < t < (k+1)h, \\ \beta X(kh^-) &\leq \hat{P}, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \{x^T(t) X(t) x(t)\} \leq -\alpha x^T(t) X(t) x(t), \\ &x^T(kh^+) X(kh) x(kh^+) \\ &\leq (1-\beta) x^T(kh) X(kh^-) x(kh) \end{aligned}$$

が得られる。 $\beta \geq 1$ ならば、 $x(kh^+) = 0$ となり、 $x(t) \geq 0, \forall t > kh$ となる。したがって、システム(2)が指数安定となる。 $\beta < 1$ ならば、

$$\begin{aligned} &x^T((k+1)h) X((k+1)h^-) x((k+1)h) \\ &\leq e^{-\alpha h} (1-\beta) x^T(kh) X(kh^-) x(kh) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $X(kh) \geq aI$ であるので、この漸化不等式より、システム(2)が指数安定となる。必要性は、通常の連続時間システムと同様に、(2)の二次形式を用いて容易に示すことができる。□

補助定理 2.2 X, Y, Q, R が対称行列、 $X \geq 0$ とすると、

$$\begin{aligned} A^T X A - Y &\leq Q, \\ B^T X B - Y &\leq R \end{aligned}$$

ならば、

$$A^T X B + B^T X A - 2Y \leq Q + R$$

である。

証明： $X \geq 0$ より、

$$\begin{aligned} &A^T X B + B^T X A - 2Y \\ &= -(A-B)^T X (A-B) \\ &\quad + (A^T X A + B^T X B - 2Y) \leq Q + R \end{aligned}$$

となる。□

定理 2.1

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) + A_i^T X(t) + X(t) A_i &\leq -P_i < 0, \\ \hat{A}_i^T X(kh) \hat{A}_i - X(kh^-) &\leq -\hat{P}_i < 0, \\ &i=1, \dots, r \end{aligned} \quad (4)$$

を満たす有界対称行列 $X(t) \geq aI, a > 0, 0 \leq t$ が存在す

るならば、システム(1)は指数安定である。ここで、 P_i , $\hat{P}_i$ は正定行列である。

証明：(4)より、

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &+ \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) A_i \right)^T X(t) \\ &+ X(t) \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) A_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) \{ \dot{X}(t) + A_i^T X(t) + X(t) A_i \} \\ &\leq -cI \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 c は $P_i \geq cI$ を満たす正数である。また、補助定理2.2を用いると

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) \hat{A}_i \right)^T X(kh) \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) \hat{A}_i \right) \\ &\quad - X(kh^-) \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i^2(z(kh)) \{ \hat{A}_i^T X(kh) \hat{A}_i - X(kh^-) \} \\ &\quad + \sum_{i < j}^r \lambda_i(z(kh)) \lambda_j(z(kh)) \{ \hat{A}_i^T X(kh) \hat{A}_j \\ &\quad + \hat{A}_j^T X(kh) \hat{A}_i - 2X(kh^-) \} \leq -\hat{c}I \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\hat{c}$ は $\hat{P}_i \geq \hat{c}I$ を満たす正数である。上の2つの不等式を用いると、補助定理2.1の証明と同様に、(1)の安定性が得られる。

3. サンプル値ファジィモデル:状態フィードバックコントローラとオブザーバ

次のようなIF-THENルールで与えられるサンプル値ファジィモデルを考えよう。

IF z_1 is M_{i1} and $\cdots$ and z_p is M_{ip}
THEN $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i \tilde{u}(t)$,
 $y(k) = C_i x(kh)$, $k=0, 1, 2, \dots$,
 $i=1, \dots, r$

ここで、 $x(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ は状態、 $\tilde{u}(\cdot) \in \mathbf{R}^m$ は制御入力、 $y(\cdot) \in \mathbf{R}^q$ はサンプル値観測、 A_i, B_i, C_i は行列である。制御入力は直前のサンプリング時刻で決定した入力を次のサンプリング時刻まで保持する零次ホールド($\tilde{u}(t) = u(k)$, $kh < t \leq (k+1)h$)で実現される。このとき、状態方程式と出力を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) \{ A_i x(t) + B_i \tilde{u}(t) \}, \\ y(k) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) C_i x(kh) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $r, M_{ij}, z, \lambda_i(z)$ は2節と同様とする。

最初に、状態フィードバックによる安定化を考えよう。このときのシステム(6)の前件部変数は、 $z(t) =$

$x(t)$ 、あるいは $z(t) = x(kh)$, $kh \leq t < (k+1)h$ である。(5)に対し、次のようなIF-THENルールが与えられているとする。

IF $z_1(kh)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $z_p(kh)$ is M_{ip}
THEN $\tilde{u}(t) = u(k) = F_i x(kh)$,
 $kh < t \leq (k+1)h$, $i=1, \dots, r$

このIF-THENルールに基づく、自然な制御入力は次のようになる。

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) F_i x(kh), \quad (7)$$

$$kh < t \leq (k+1)h$$

ここで、 $\lambda_i(z)$ はファジィモデルのIF-THENルール(5)と同じものを用い、(6)と(7)より、閉ループシステムを考える。 $\tilde{u}(t)$ はサンプリング時刻間で一定であるので、次のような状態変数表現を導入する。

$$\dot{\bar{x}}(t) = 0, \quad kh < t \leq (k+1)h, \quad \bar{x}(kh^+) = u(k)$$

これにより、閉ループシステム(6), (7)は、

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) G_i x_c(t), \\ x_c(kh^+) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) \hat{G}_i x_c(kh) \end{aligned}$$

に書き換えられる。ここで、

$$x_c = \begin{bmatrix} x \\ \bar{x} \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ F_i & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

である。

注意 3.1 (6)は非線形システムであり、(6)の通常の離散化を行うことでは、線形離散時間システムを得ることができない。よって、閉ループサンプル値ファジィシステム(6), (7)の安定性の判別に離散時間Lyapunov方程式を用いることはできない。

定理2.1の適用により、(8)の指数安定のために次のような十分条件が得られる。

定理 3.1

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) + G_i^T X(t) + X(t) G_i &\leq -P_i, \\ \hat{G}_i^T X(kh) \hat{G}_i - X(kh^-) &\leq -\hat{P}_i, \quad i=1, \dots, r \end{aligned}$$

を満たす有界対称行列 $X(t) \geq aI, a > 0, 0 \leq t$ が存在するならば、システム(8)は指数安定である。ここで、 $P_i, \hat{P}_i$ は正定行列である。

次に、前件部変数は状態 x の全情報を含まないとし、ファジィモデル(6)に対し、次のようなオブザーバを考えよう。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i \tilde{u}(t)\}, \\ \hat{x}(kh^+) &= \hat{x}(kh) + K(y(k) - \hat{y}(k))\end{aligned}\quad (10)$$

ここで、 $\hat{y}(k)$ は

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) C_i \hat{x}(kh)$$

で与えられる。 $t \rightarrow \infty$ のとき、指数的に $e(t) \equiv x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ となるようにオブザーバゲイン K を選ぶ必要がある。(5)のサブシステムのオブザーバに関し、次のような IF-THEN ルールが与えられていると仮定する。

IF z_1 is M_{i1} and...and z_p is M_{ip}
THEN $\hat{x}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i \tilde{u}(t)$, $kh < t < (k+1)h$,
 $\hat{x}(kh^+) = \hat{x}(kh) + K_i(y(k) - \hat{y}(k))$,
 $i=1, \dots, r$

この IF-THEN ルールに基づく自然なオブザーバゲインは

$$K = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) K_i \quad (11)$$

である。(10), (11)より

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i \tilde{u}(t)\}, \\ kh < t < (k+1)h, \\ \hat{x}(kh^+) &= \hat{x}(kh) + \sum_{j=1}^r \lambda_j(z(kh)) K_j(y(k) - \hat{y}(k))\end{aligned}\quad (12)$$

が得られ、 u, y, z が与えられれば、(12)を解くことができる。(12), (6), $x(kh^+) = x(kh)$ により、推定誤差 $e(t)$ は

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) A_i e(t), \\ e(kh^+) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(z(kh)) \lambda_j(z(kh)) \\ &\quad (I - K_j C_i) e(kh)\end{aligned}\quad (13)$$

で与えられる。(13)は、

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) A_i e(t), \\ e(kh^+) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i^2(z(kh)) (I - K_i C_i) e(kh) \\ &\quad + \sum_{i < j} 2 \lambda_i(z(kh)) \lambda_j(z(kh)) \\ &\quad \frac{(I - K_j C_i) + (I - K_i C_j)}{2} e(kh)\end{aligned}\quad (14)$$

と書き換えることができる。 $t \rightarrow \infty$ のとき、指数的に $e(t) \rightarrow 0$ となる十分条件は、定理 3.1 を用いること

で、次のように得られる。

定理 3.2 (i)

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) + A_i^T Y(t) + Y(t) A_i &\leq -Q_i, i=1, \dots, r, \\ (I - K_j C_i)^T Y(kh) (I - K_j C_i) \\ &\quad - Y(kh^-) \leq -\hat{Q}_{ij}, i, j=1, \dots, r\end{aligned}$$

を満たす有界対称行列 $Y(t) \geq aI, a > 0, 0 \leq t$ が存在すれば、システム(13)は指数安定である。ここで、 $Q_i, \hat{Q}_{ij}$ は正定行列である。

(ii)

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) + A_i^T Y(t) + Y(t) A_i &\leq -Q_i, i=1, \dots, r, \\ (I - K_i C_i)^T Y(kh) (I - K_i C_i) \\ &\quad - Y(kh^-) \leq -\hat{Q}_i, i=1, \dots, r, \\ \hat{L}_{ij}^T Y(kh) \hat{L}_{ij} - Y(kh^-) &\leq -\frac{1}{2} \hat{Q}_{ij}, i < j\end{aligned}$$

を満たす有界対称行列 $Y(t) \geq aI, a > 0, 0 \leq t$ が存在すれば、システム(14)は指数安定である。ここで、

$$\hat{L}_{ij} = \frac{(I - K_j C_i) + (I - K_i C_j)}{2}$$

であり、 $Q_i, \hat{Q}_i, \hat{Q}_{ij}$ は正定行列である。

上では、ファジィモデル(6)が定義できる場合を考察したが、前件部変数が出力と一致する場合($z(t) = y(k)$, $kh \leq t < (k+1)h$)は、(6)の第2式は定義できない。この場合は、 $C_i = C, i=1, \dots, r$ と仮定すれば、オブザーバが構成できる。実際、(10)及び(12)で、 $y(k) = Cx(kh)$, $\hat{y}(k) = C\hat{x}(kh)$ とおけばよい。オブザーバ(12)の漸近収束条件は、定理 3.2 の特殊な場合になる。

系 3.1 $C_i = C, i=1, \dots, r$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) + A_i^T Y(t) + Y(t) A_i &\leq -Q_i, i=1, \dots, r, \\ (I - K_i C)^T Y(kh) (I - K_i C) \\ &\quad - Y(kh^-) \leq -\hat{Q}_i, i=1, \dots, r\end{aligned}$$

を満たす有界対称行列 $Y(t) \geq aI, a > 0, 0 \leq t$ が存在すれば、システム(13)は指数安定である。ここで、 $Q_i, \hat{Q}_i$ は正定行列である。

4. 出力安定化と分離原理

線形システムでは、安定な状態フィードバックコントローラとオブザーバを独立に設計し、安定な出力フィードバックを構成できるという制御系設計の分離原理がよく知られている[1]。[15]では、連続時間及び離散時間ファジィシステムに対し、分離原理が成立することを示した。この節では、サンプル値ファジィシステムに対し、この結果を拡張する。

モデル(6)とオブザーバ(12)が定義できるとし、制御

$$u(k) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(kh)) F_i \tilde{x}(kh) \quad (15)$$

を考えよう。(6), (12), (15)の結合により、

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) H_i \tilde{x}(t), \\ \tilde{x}(kh^+) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(z(kh)) \lambda_j(z(kh)) \\ &\quad \hat{H}_{ij} \tilde{x}(kh) \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる。ここで、 $\tilde{x} = [x^T \bar{x}^T e^T]^T$,

$$\begin{aligned} H_i &= \begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & A_i \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{G}_j & \hat{F}_j \\ 0 & I - K_j C_i \end{bmatrix}, \\ \hat{F}_j &= \begin{bmatrix} 0 \\ -F_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。(16)は、

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(z(t)) H_i \tilde{x}(t), \\ \tilde{x}(kh^+) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i^2(z(kh)) \hat{H}_{ii} \tilde{x}(kh) \\ &+ \sum_{i < j} 2 \lambda_i(z(kh)) \lambda_j(z(kh)) \frac{\hat{H}_{ij} + \hat{H}_{ji}}{2} \tilde{x}(kh) \end{aligned} \quad (17)$$

に書き換えることができる。(16)は、(1)の型であるので、定理2.1を(16)に適用できる。定理3.1、3.2の条件を満たす対称行列 $X(t)$, $Y(t)$ が存在するならば、定理2.1における対称行列の候補は、 $\begin{bmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & Y(t) \end{bmatrix}$ になるが、一般に定理2.1の条件を満足しない。しかし、十分に大きな $\alpha > 0$ をとれば、

$$\bar{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & \alpha Y(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

は、(16)が指数安定であることを保証することを示そう。その結果、3節のように状態フィードバックコントローラとオブザーバが設計できれば、安定な出力フィードバックコントローラを常に構成できることになる。

このことを示すには、次の補助定理が有用である。

補助定理 4.1[1] M を次のような対称行列とする。

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}$$

ここで、 M_{11}, M_{22} は正方行列とする。 M が正定行列である必要十分条件は、次の条件のいずれかが成立することである。

- 1) $M_{11} > 0$ and $M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12} > 0$
- 2) $M_{22} > 0$ and $M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T > 0$

(15)と(12)で与えられるコントローラに対し、定理3.1、定理3.2(i)の条件を満足する $X(t)$, $Y(t)$ が存在するとする。このとき、(18)の $\bar{X}(t)$ を用いることによ

り、

$$\bar{X}(t) + H_i^T \bar{X}(t) + \bar{X}(t) H_i \leq - \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\hat{H}_{ij}^T \bar{X}(kh) \hat{H}_{ij} - \bar{X}(kh^-) \\ &\leq - \begin{bmatrix} \hat{P}_j & -\hat{G}_j^T X(kh) \hat{F}_j \\ -\hat{F}_j^T X(kh) \hat{G}_j & \alpha \hat{Q}_{ij} - \hat{F}_j^T X(kh) \hat{F}_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる。明らかに、(19)の右辺は負定である。補助定理4.1により、(20)の右辺が負定になる必要十分条件は、

$$\begin{aligned} &\alpha \hat{Q}_{ij} > \hat{F}_j^T \{ X(kh) + X(kh) \hat{G}_j \hat{P}_j^{-1} \\ &\quad \hat{G}_j^T X(kh) \} \hat{F}_j, \quad \forall i, j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (21)$$

が成立することである。(21)の右辺は、ファジィ状態フィードバックコントローラに依存し、左辺の $\hat{Q}_{ij}$ はファジィオブザーバに依存する。したがって、(21)が成立するように十分に大きな $\alpha > 0$ を選択することで、定理2.1より、次の定理が得られる。

定理 4.1 定理3.1、定理3.2(i)の条件を満たす $X(t)$, $Y(t)$ が存在すれば、システム(16)は指数安定である。

次に、定理3.1、定理3.2(ii)の条件を満たす $X(t)$, $Y(t)$ が存在するとする。(18)の $\bar{X}(t)$ を用いることにより、

$$\dot{\bar{X}}(t) + H_i^T \bar{X}(t) + \bar{X}(t) H_i \leq - \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \alpha Q_i \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &\hat{H}_{ii}^T \bar{X}(kh) \hat{H}_{ii} - \bar{X}(kh^-) \\ &\leq - \begin{bmatrix} \hat{P}_i & -\hat{G}_i^T X(kh) \hat{F}_i \\ -\hat{F}_i^T X(kh) \hat{G}_i & \alpha \hat{Q}_i - \hat{F}_i^T X(kh) \hat{F}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる。明らかに、(22)の右辺は負定である。補助定理4.1により、 $\alpha > 0$ が充分大きければ、(23)の右辺は負定となる。さらに、

$$\begin{aligned} &\frac{(\hat{H}_{ij} + \hat{H}_{ji})^T}{2} \bar{X}(kh) \frac{\hat{H}_{ij} + \hat{H}_{ji}}{2} - \bar{X}(kh^-) \\ &\leq - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(\hat{P}_i + \hat{P}_j) \\ -(\hat{F}_i + \hat{F}_j)^T X(kh) (\hat{G}_i + \hat{G}_j) \\ -(\hat{G}_i + \hat{G}_j)^T X(kh) (\hat{F}_i + \hat{F}_j) \\ 2\alpha \hat{Q}_{ij} - (\hat{F}_i + \hat{F}_j)^T X(kh) (\hat{F}_i + \hat{F}_j) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

であるから、補助定理4.1により、式(24)の右辺が負定になる必要十分条件は、

$$\begin{aligned} &4\alpha \hat{Q}_{ij} > (\hat{F}_i + \hat{F}_j)^T \{ 2X(kh) \\ &\quad + X(kh) (\hat{G}_i + \hat{G}_j) (\hat{P}_i + \hat{P}_j)^{-1} \\ &\quad (\hat{G}_i + \hat{G}_j)^T X(kh) \} (\hat{F}_i + \hat{F}_j), \quad \forall i < j \end{aligned}$$

が成立することであり、 $\alpha > 0$ が充分大きければ、この条件は満たされる。

定理 4.2 定理3.1、定理3.2(ii)の条件を満たす $X(t)$, $Y(t)$ が存在すれば、システム(17) (すなわち、

(16))は指数安定である。

3節と同様に $z(t)=y(k)$ の場合を考える。

系 4.1 $C_i=C, i=1, \dots, r$ とする。このとき、定理 3.1、系 3.1 の条件を満たす $X(t), Y(t)$ が存在すれば、システム (16) は指数安定である。

5. 例

図 1 で示されるバネ係数に非線形性を有する質量-バネ系を考えよう。運動方程式の一例は、

$$M \ddot{\xi}(t) + f(\xi(t)) = u(t) \quad (25)$$

で与えられる。ここで、 M は質量、 $u(t)$ は入力である。また、 $f(\xi(t))$ はバネに関する非線形性を表す項で $f(\xi(t)) = 0.01 \xi(t) + 0.67 \xi^3(t)$ と仮定し、 $M=1.0$ とする。このとき、(25) は次のように書き換えることができる。

$$\ddot{\xi}(t) = -0.01 \xi(t) - 0.67 \xi^3(t) + u(t) \quad (26)$$

[12] と同様に、 $\xi(t) \in [-0.3 \ 0.3]$ の条件の下で考えると、非線形項 $-0.67 \xi^3$ は、次の不等式を満足する。

$$\begin{cases} -0.0603 \xi \leq -0.67 \xi^3 \leq 0 \cdot \xi, & \xi \geq 0 \\ 0 \cdot \xi \leq -0.67 \xi^3 \leq -0.0603 \xi, & \xi < 0 \end{cases}$$

これは、非線形項をその上界と下界の凸結合で表現することができることを意味し、

$$-0.67 \xi^3 = M_1(\xi) \cdot 0 \cdot \xi - (1 - M_1(\xi)) \cdot 0.0603 \xi \quad (27)$$

となる。ここで、 $M_1(\xi) \in [0 \ 1]$ である。(27) を解くことにより、 $M_1(\xi), M_2(\xi)$ は次のようになる。

$$M_1(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{0.09},$$

$$M_2(\xi) = 1 - M_1(\xi) = \frac{\xi^2}{0.09}$$

非線形システム (26) は、 $\xi(t) \in [-0.3 \ 0.3]$ のとき、次の IF-THEN ルールで与えられる連続時間ファジィ

図1 質量-バネ系

モデルと一致する。

$$\begin{aligned} \text{IF} \quad & \xi(t) \text{ is } M_i \\ \text{THEN} \quad & \dot{x}(t) = A_i x(t) + b u(t), \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{ここで、} x = [\xi \ \dot{\xi}]^T, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0703 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{である。}$$

今、サンプリング周期を $h=0.2$ とし、入力 $u(t)$ が零次ホールドで実現されているとする。このとき、前件部変数として利用できるのは、サンプル点での出力 $y(k) = \xi(kh)$ であり、サンプル値ファジィモデルは

$$\begin{aligned} \text{IF} \quad & y(k) \text{ is } M_i \\ \text{THEN} \quad & \dot{x}(t) = A_i x(t) + b \tilde{u}(t), \\ & y(k) = c x(kh), \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ここで、 $c = [1 \ 0]$ である。

最初に、サンプル値ファジィモデル (29) の状態フィードバックコントローラを考える。 $Q = \hat{Q} = I_{3 \times 3}, R=1$ 及び $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ として、レギュレータ理論 (付録 A 参照) より、(31) を解けば、解 $X_1(t)$ とフィードバックゲイン

$$f_1 = [-0.631 \ -1.295]$$

が得られる。また、

$$X_1(0) = \begin{bmatrix} 12.1871 & 10.423 & 1.842 \\ 0.423 & 20.030 & 3.777 \\ 1.842 & 3.777 & 1.917 \end{bmatrix},$$

$$X_1(0^-) = \begin{bmatrix} 12.023 & 8.038 & 0 \\ 8.038 & 16.139 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{である。同様に、}$$

$Q = \text{diag}(3, 1, 1), \hat{Q} = I_{3 \times 3}, R=1$ 及び $A = \begin{bmatrix} A_2 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ として、(31) を解けば、解 $X_2(t)$ とフィードバックゲイン

$$f_2 = [-0.700 \ -1.329]$$

が得られる。また、

$$X_2(0) = \begin{bmatrix} 14.546 & 11.287 & 1.970 \\ 11.287 & 20.772 & 3.907 \\ 1.970 & 3.907 & 1.940 \end{bmatrix}$$

$$X_2(0^-) = \begin{bmatrix} 14.227 & 8.670 & 0 \\ 8.670 & 16.580 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。 $X(t) = X_1(t)$ を用いると、 $X(t)$ は定理 3.1 の条件を満たし、閉ループシステム (8) は、前件部変数に関わらず、指数安定になる (図 2 参照)。

次に、サンプル値ファジィモデル(29)のオブザーバを考える。オブザーバゲインを

$$k_1 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

とおく。 $Q = \hat{Q} = I_{3 \times 3}$ として、

$$-\dot{Y}(t) = A_1^T Y(t) + Y(t) A_1 + Q, \quad kh < t < (k+1)h,$$

$$Y(kh^-) = (I - k_1 c)^T Y(kh) (I - k_1 c) + \hat{Q}$$

を解けば、 $Y(t)$ が得られ、

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 4.275 & -2.584 \\ -2.584 & 3.926 \end{bmatrix},$$

$$Y(0^-) = \begin{bmatrix} 4.063 & -3.409 \\ -3.409 & 4.926 \end{bmatrix}$$

である。 $c_i = c, i=1, \dots, r$ であり、 $Y(t)$ は系3.1の条件を満たすので、誤差システム(13)は指数安定になる。

$\bar{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & Y(t) \end{bmatrix}$ を用いて、ファジィシステム(16)の指数安定を示すことはできないが、 $\alpha=6$ とし、 $\bar{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & \alpha Y(t) \end{bmatrix}$ を用いると、系4.1により、ファジィシステム(16)の指数安定性を示すことができる。

図3に、 $x(0) = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ としたときのサンプル値ファジィモデル(29)のシミュレーション結果を示す。同じコントローラを非線形システム(26)に適用したシミュレーション結果を図4に示す。図3と図4は、よく一致している。

6. おわりに

本稿では、サンプル値ファジィシステムの安定化問題を考察した。最初に、サンプル値ファジィモデルを導入し、安定な状態フィードバックコントローラと漸近収束するオブザーバの設計を提案した。さらに、安定な状態フィードバックコントローラとオブザーバが存在すれば、それらに基づく出力フィードバックコントローラが常にサンプル値ファジィシステムを安定にすることを示した。最後に、質量-バネ系を例に取り、サンプル値システムに対するレギュレータ問題を解くことにより、状態フィードバックとその安定性を保証する正定行列を求め、設計例を紹介した。

図2 $\dot{X}(t) + G_2^T X(t) + X(t) G_2$ の固有値の時間依存

図3 シミュレーション結果
(サンプル値ファジィモデル)

図4 シミュレーション結果
(非線形システム)

参 考 文 献

- [1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, "Optimal Control" (Prentice-Hall, 1989).
- [2] B. A. Bamieh and J. B. Pearson, "A general framework for linear periodic systems with application to H_∞ sampled-data systems," IEEE Trans. on Automatic Control 37 (1992) 418-435.
- [3] T. Chen and B. A. Francis, "Optimal sampled-data control systems" (Springer-Verlag, 1995).
- [4] G. Feng, S. G. Gao, N. W. Rees and C. K. Chak, "Design of fuzzy control system with guaranteed stability," Fuzzy Sets and Systems 85 (1997) 1-10.
- [5] A. Ichikawa and H. Katayama, " H_2 and H_∞ control for jump systems with application to sampled-data systems," International Journal of Systems Science (掲載決定).
- [6] 川本, 多田, 尾上, 石亀, 谷口, "非線形システムの厳密なファジィシステムの構成と安定性解析," 第8回ファジィシンポジウム論文集 (1992) 517-520
- [7] W. K. Sun, K. M. Nagpal, P. P. Khargonekar and K. R. Poola, "Digital control systems: H_∞ controller design with zero-order hold," Proc. of 31st IEEE Conf. on Decision and Control (1992) 337-342.
- [8] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," IEEE Trans. on Systems, Man, Cybernetics 15 (1985) 116-132.
- [9] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," Fuzzy Sets and Systems 45 (1992) 135-156.
- [10] K. Tanaka and M. Sano, "On the concepts of regulator and observer of fuzzy control system," Proc. of 3rd IEEE Conf. on Fuzzy Systems (1994) 767-772.
- [11] 田中, "アドバンスドファジィ制御" (共立出版, 1994)
- [12] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities," IEEE Trans. on Fuzzy Systems 4 (1996) 1-13.
- [13] K. Tanaka and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: a linear matrix inequality approach," 36th IEEE Conf. on Decision and Control (1997).
- [14] H. O. Wang, K. Tanaka and M. Griffin, "Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model," Proc. of Joint Conf. of 4th IEEE Conf. on Fuzzy Systems and 2nd Fuzzy Eng. Symposium (1995) 531-538.
- [15] J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama and A. Ichikawa, "Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems," Fuzzy Sets and Systems (掲載決定).
- [16] J. Zhao, R. Gorex and V. Werts, "Synthesis of fuzzy control systems based on linear Takagi-Sugeno fuzzy models, in: R. Murray-Smith and T.A. Johansen, Ed., Multiple Model Approach to Modeling and Control" (Taylor and Francis, 1997) 308-336.

付録 サンプル値システムに対するレギュレータ問題

ここでは、状態に跳び(ジャンプ)のあるシステムに対するレギュレータ理論を要約し、それをサンプル値システムに適用する。また、定理3.1を満たす F_i , $X(t)$ を見つけるのに、サンプル値システムに対するレギュレータ問題が有用であることを示す。

最初に、状態に跳び(ジャンプ)のある次のシステムを考えよう。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), x(0) = x_0, kh < t < (k+1)h, \\ x(kh^+) &= \hat{A}x(kh) + Bu(k), k=0,1,2,\dots\end{aligned}\quad (30)$$

ここで、 $([A, \hat{A}], [0, B])$ が安定化可能とする。すなわち、システム

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), kh < t < (k+1)h, \\ x(kh^+) &= (\hat{A} + BF)x(kh)\end{aligned}$$

を指数安定にするような $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$ が存在するとする。システム(30)に対し、次のような評価関数を導入する。

$$\begin{aligned}J(u; x_0) &= \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt \\ &+ \sum_{k=0}^\infty \{x^T(kh) \hat{Q} x(kh) + u^T(k) R u(k)\}\end{aligned}$$

ここで、 $Q, \hat{Q}$ は $n \times n$ の正定行列であり、 R は $m \times m$ の正定行列である。[5]の結果を修正することで、次の定理が得られる。

定理 A.1 $([A, \hat{A}], [0, B])$ が安定化可能とする。このとき、

$$\begin{aligned}-\dot{X}(t) &= A^T X(t) + X(t) A + Q, \\ &\quad kh < t < (k+1)h, \\ X(kh^-) &= \hat{A}^T X(kh) \hat{A} - \hat{A}^T X(kh) B (R \\ &\quad + B^T X(kh) B)^{-1} B^T X(kh) \hat{A} + \hat{Q}\end{aligned}\quad (31)$$

の h -周期正定解 $X(t)$ で、システム

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), kh < t < (k+1)h, \\ x(kh^+) &= (\hat{A} + BF)x(kh)\end{aligned}$$

が指数安定となる一意解が存在する。ここで、 $F = -(R + B^T X(0) B)^{-1} B^T X(0) \hat{A}$, $X(0) = X(kh)$ である。さらに、

$$\min_u J(u; x_0) = J(Fx(kh); x_0) = x_0^T X(0) x_0$$

となる。

注意 A.1 (31)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) + A^T X(t) + X(t) A &= -Q < 0, \\ kh < t < (k+1)h, \\ (\hat{A} + BF)^T X(kh) (\hat{A} + BF) - X(kh^-) \\ &= -F^T R F - \hat{Q} < 0 \end{aligned}$$

次に、定理 A.1をサンプル値システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \tilde{u}(t)$$

に適用しよう。ここで、 $x(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ であり、 $\tilde{u}(\cdot) \in \mathbf{R}^m$ は零時ホールドで実現される制御入力である。これは次のシステムと等価である。

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t), \quad kh < t < (k+1)h, \\ x_c(kh^+) &= \hat{A}_c x_c(kh) + B_c u(k) \end{aligned}$$

x_c は(9)で定義され、

$$A_c = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{A}_c = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

である。ここで、 (A, B) , $(e^{Ah}, \int_0^h e^{At} dt B)$, $([A_c, \hat{A}_c], [0, B_c])$ は安定化可能とし、 $Q_c, \hat{Q}_c$ を $(n+m) \times (n+m)$

m の正定行列、 R_c を $m \times m$ の正定行列とする。このとき、定理 A.1により、(31)の $A, \hat{A}, B, Q, \hat{Q}, R$ を $A_c, \hat{A}_c, B_c, Q_c, \hat{Q}_c, R_c$ で置き換えた式の唯一の h -周期正定安定化解 $X_c(t) = \begin{bmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) \\ X_{12}^T(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix}$, $X_{11}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $X_{12}(t) \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $X_{22}(t) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ が存在する。ここで、

$$\begin{aligned} F_c &= -(R_c + B_c^T X_c(0) B_c)^{-1} B_c^T X_c(0) \hat{A}_c \\ &= [\tilde{F}, 0], \\ \tilde{F} &= -(R_c + X_{22}(0))^{-1} X_{12}^T(0), \\ \hat{A}_c + B_c F_c &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{F} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。したがって、注意 A.1により、サンプル値システムのレギュレータ問題を用いることにより、定理3.1の条件を満たす $F_i, X(t)$ の候補を見つけることができる。

(1997年9月25日 受付)

(1998年3月25日 再受付)

[問い合わせ先]

〒432-8561

浜松市城北3-5-1

静岡大学工学部電気・電子工学科

市川 朗

TEL/FAX: 053-478-1088

E-mail: ichikawa@eng.shizuoka.ac.jp

著者紹介

西川 昌宏 (にしかわ まさひろ)

静岡大学大学院電子科学研究科

1993年 静岡大学工学部電気工学科卒業、1995年 同大学大学院工学研究科修士課程修了、1995年 同大学大学院電子科学研究科博士課程入学、現在に至る。ファジィ制御の解析と設計に関する研究に従事。

片山 仁志 (かたやま ひとし)

大阪電気通信大学電子機械工学科

1988年 静岡大学工学部精密工学科卒業、1990年 同大学大学院工学研究科修士課程修了、1994年 同大学大学院電子科学研究科博士課程修了(工学博士)、1994年から大阪電気通信大学電子機械工学科講師、現在に至る。離散時間系、サンプル値系、ジャンプ系の H_∞ 制御、 H_2 制御の研究に従事。

米山 淳 (よねやま じゅん)

静岡大学工学部電気・電子工学科

1988年 早稲田大学理工学部電気工学科卒業、1991年 同大学大学院理工学研究科修士課程修了、1996年 カリフォルニア大学ロサンゼルス校(UCLA)大学院電気工学科博士課程修了(Ph.D.)、1993年 同大学助手、1996年から静岡大学工学部電気・電子工学科助手、現在に至る。ロバスト制御、確率制御、ファジィ制御の研究に従事。

市川 朗 (いちかわ あきら)

静岡大学工学部電気・電子工学科

1970年 東京大学工学部航空工学科卒業、1974年 ニューヨーク州立大学大学院応用数学博士課程修了(Ph.D.)、1974年 カナダ・ブリティッシュコロンビア大学数学科、1975年 英国・ウォーリック大学制御理論センター研究員、1978年 静岡大学工学部応用数学講座助教授、1988年 同大学工学部電気工学科教授を経て、1994年から 同大学工学部電気・電子工学科教授。制御理論の研究に従事。

Stabilization of Sampled-Data Fuzzy Systems

by

Masahiro NISHIKAWA, Hitoshi KATAYAMA, Jun YONEYAMA and Akira ICHIKAWA

Abstract :

In this paper, we consider the stabilization of sampled-data fuzzy systems. We first consider sampled-data fuzzy models and the design of stabilizing state feedback controllers and asymptotically convergent observers. We shall show that if there exist a stabilizing state feedback controller and an observer, then the output feedback controller based on them always stabilizes the sampled-data fuzzy model. Finally we design an output feedback controller of a mass-spring system to illustrate our design procedures.

Keywords : Fuzzy Systems, Sampled-Data Systems, Output Stabilization, Separation Principle

Contact Address : **Akira ICHIKAWA**

*Department of Electrical and Electronic Engineering,
Shizuoka University*

3-5-1, Jyohoku, Hamamatsu-shi, Shizuoka, 432-8561 Japan

TEL : 053-478-1088

FAX : 053-478-1088

E-mail : ichikawa@eng.shizuoka.ac.jp