論文

2 目的ファジィ割当問題†

多田 実*¹ 石井 博昭*²

通常の割当問題とは、労働者 i に仕事 j を与えれば e_{ij} の効用 (efficient) があるとき、効用の合計を最大にするには、労働者に仕事をどのように割り当てればよいかを求める問題のことである。しかしながら、現実的には、各仕事に対する各労働者の効用値を厳密に定めることが困難な状況が少なくない。そこで、本稿では、割当問題をファジィ環境において取り扱う、いわゆる「ファジィ意思決定問題」として定式化し、その解法を与える。すなわち、各仕事の重要度をメンバシップ関数によって特徴づけ、厳密な 1 つの値として決められない効用値をファジィ数として表した後、これらの間で一致指標と呼ばれる計算によって、通常の (ファジィではない) 割当問題に帰着して解けることを示す。さらには、この考え方を発展させ、労働者側が予め提示する、各仕事に対する満足度 (やりがい) を示す式を目的関数の 1 つとして追加し、(1) 効用の合計値の最大化、(2) 満足度の最小値の最大化という 2 目的問題として定式化することによって、意思決定者の視点だけで決める (効率性のみを追求する) のではない、ある意味で「柔軟な」割り当て方が求められることを示す。そして、この問題を解くために、非劣解の概念を考慮した対話型システムのアルゴリズムを提案する。

キーワード：割当問題、ファジィ効用値、多目的問題、ファジィ意思決定

1. はじめに

通常の割当問題 (AP: Assignment Problem) とは、ある労働者 i に仕事 j を与えれば e_{ij} の効用 (efficient) があるとし、効用の和を最大にするには、労働者に仕事をどのように割り当てればよいかを求める問題のことで、次のように定式化される [2], [4]。

$$AP: \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j=1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i=1, \dots, n \quad (3)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; & i \text{ に } j \text{ を割り当てる} \\ 0; & i \text{ に } j \text{ を割り当てない} \end{cases} \quad (4)$$

($i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$)

しかし、現実的には、効用値 e_{ij} を厳密に定めることは困難であり、このとき、意思決定者 (Decision Maker; 以下「DM」と略記) の主観がある程度反映させられるような柔軟性も望まれるであろう。

このような観点で割当問題を扱った研究は、我々の知る限り、これまで多くは見られないが、[6] は「満足度」の概念を導入することによって、現実的な割り当てが実現できる問題を提案した。すなわち、労働者 i と仕事 j から成るすべての組 (i, j) に対して、1 つの効用値

e_{ij} だけではなく 2 種類の効用値、すなわち i に j を割り当てたことに対する i から見た満足度 μ_{ij}^I ($0 \leq \mu_{ij}^I \leq 1$) と j から見た満足度 μ_{ij}^J ($0 \leq \mu_{ij}^J \leq 1$) が導入された。換言すれば、 μ_{ij}^I は労働者自身の各仕事に対する「やり甲斐度」、 μ_{ij}^J は経営者側が適性試験などを用いて客観的に決めた「能力度」であり、これらは「大満足なら 1」「不満足なら 0」「かなり満足なら 0.7」などのように、閉区間 $[0, 1]$ 内の実数値で示される。

さらに [6] では、DM が仕事ごとに理想とする人物像をメンバシップ関数で表現し、定式化 (問題の記述) の一助とすることも提案されている。例えば、「あまり高い能力は必要でない仕事」や「ある程度の能力の高さが要求される仕事」等々をメンバシップ関数 $\mu_{\bar{m}_j}(x)$ を用いて「満足度関数」として表現した (ここで、 x は能力の高さを表す; 詳細は次節で記述)。そのとき、 μ_{ij}^J をこの関数の変数 x とみなして代入した値、要するに $\mu_{\bar{m}_j}(\mu_{ij}^I)$ を求めることによって、DM の主観も考慮した効用値が、ファジィでない値として決められることに注意されたい。これらは、通常の効用値に直ちに置き換え可能なので、従来の問題に帰着させて解くことも考えられるが、より現実的なモデルにするために、 i を j に割り当てたことに対するコスト c_{ij} や、DM が μ_{ij}^I と μ_{ij}^J それぞれにおいて最低限必要であると判断し決定する、2 つの「しきい値 (threshold)」 α_i, β_j を用いた制約を設けるなど、新たなアイデアを採り入れた定式化 (これらの問題の目的は、総コストの最小化、すべての満足度の maxmin など) が試みられた。

しかしながら現場においては、効用値を 1 つの値に固定して考えるよりも、ある程度の幅をもったファジィ要素として扱うことが望まれる状況が少なくないように思われる。例えば、何らかの客観的なデータから

† Bi-criteria Fuzzy Assignment Problem
Minoru TADA and Hiroaki ISHII

*¹ 龍谷大学経営学部

Faculty of Business Administration, Ryukoku University

*² 大阪大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Osaka University

効用値を決めたとしても、その客観性が疑わしいときや、DM があえて主観的な判断を効用値の中に採り入れたときなどは、厳密値としてリジッドにそれ表現することは不可能であろう。また、上記論文[6]での定式化が必ずしも現場の状況と一致するとは限らない。そこで、本稿ではこれらのことを踏まえて、より柔軟で実用的な割当問題を新たに提案する。

2. ファジィ環境における割当問題

この節では、それぞれの仕事 j に対して DM が理想とする人物像を表すファジィ集合 $\tilde{m}_j$ と、労働者 i を仕事 j に割り当てたときに得られるあいまいな効用値 $\tilde{e}_{ij}$ という 2 種類のファジィ要素を導入し、これらを如何にして割当問題として定式化するかについて述べる。

前者は、いわゆる「ファジィ意思決定 (decision making in fuzzy environments)」[7]において用いられる重み(重要度)をメンバシップ関数で(「とても重要」「あまり重要でない」などのように)表す概念を用いて $\tilde{m}_j$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{m}_j}(x)$ を設定する[6]。具体的にいうと、「あまり高い能力の労働者は必要ない」仕事には、「だいたい～以下の能力である」労働者を割り当てればよいので、この場合、仕事 j は図2.1のように特徴づけられ、次式のように与えられる。

$$\mu_{\tilde{m}_j}(x) = \begin{cases} 1 & x < a \\ 1 - \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \quad (5)$$

同様に「ある程度の能力の高さが要求される」仕事は、「だいたい～以上の能力」をもつ労働者が望まれる

図2.1 だいたい a 以下の能力

図2.2 だいたい d 以上の能力

ことになるので図2.2のように表され、対応するメンバシップ関数は、

$$\mu_{\tilde{m}_j}(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 + \frac{x-d}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 1 & x > d \end{cases} \quad (6)$$

となる。

また、「平均的な能力で十分な」仕事は、「極めて能力が高い労働者あるいは低い労働者なら不要」と解釈すれば、図2.3のような台形型のメンバシップ関数 (trapezoidal membership function) によって示されるので、

$$\mu_{\tilde{m}_j}(x) = \begin{cases} 0 & x < p \\ 1 + \frac{x-q}{q-p} & p \leq x < q \\ 1 & q \leq x \leq r \\ \frac{x-r}{s-r} & r < x \leq s \\ 0 & x > s \end{cases} \quad (7)$$

と記述できる。以前の論文[6]では、これを三角型ファジィ数 (triangular fuzzy number) で表したが、台形型の方がより一般的(三角型は台形型の特別な場合)なので、今回は台形型メンバシップ関数を採用している。なお、(5)～(7)式はすべて区分線形 (piecewise linear) 関数となっているが、必要ならば非線形関数に置き換えて考えることもできる。しかし、区分線形の方がその記述(数値の設定)や後述する計算が簡単になるなどのメリットが大きく、また実用上も問題ないと思われる。

次に、後者のファジィ要素である、あいまいな効用値 $\tilde{e}_{ij}$ について考える。通常の割当問題においては、効用値は1つの厳密値として決められるが、ここでは、図2.4に示されるような三角型ファジィ数で特徴づけることにする。 $\tilde{e}_{ij}$ をファジィ数として扱う根拠は、ここでは客観的な評価が何かあるけれども、それをそのまま使うには不十分であるといった状況を想定してい

図2.3 だいたい q 以上 r 以下の能力

図2.4 だいたい u の効用

るので、 $\tilde{e}_{ij}$ は、単峰性という特徴をもつと定義されるファジィ数[7]が、実際に関数式に数値を与えるときのことを考えれば、その容易さから適切であると考えられるからである。すなわち、単峰性とは、

$$\mu_{\tilde{e}_{ij}}(x) = \begin{cases} 0 & x < u - \epsilon_L \\ 1 + \frac{x - u}{\epsilon_L} & u - \epsilon_L \leq x < u \\ 1 & x = u \\ \frac{x - u}{\epsilon_R} & u < x \leq u + \epsilon_R \\ 0 & x > u + \epsilon_R \end{cases} \quad (8)$$

で記述された「だいたい u の効用」を示すメンバシップ関数において、 $\mu_{\tilde{e}_{ij}}(x_0) = 1$ となる x_0 が唯一存在することであり(この場合 u がそれに該当するので)、実際に問題を数値で記述する際、客観的に評価された値をそのまま u として設定すればよいことになる。それから、DMの主観に基づき ϵ_L, ϵ_R の値を調整することによって、客観的な評価だけでは足りないところを補うのである。たとえ客観的な評価が同じである労働者が複数存在しても、DMは経験や勘などからそれぞれにおいて微妙に(ことによると決定的に)異なる印象や見解を抱いている場合が少なくないであろう。例えば、 $\epsilon_L > \epsilon_R$ のような設定の場合、「客観的な評価値よりも実際の効果は低くなる可能性の方が、高くなる可能性よりも大きい」ということを示唆している。また、 $\epsilon_R - \epsilon_L$ の大小により、客観的な評価値に対するDMの同意度を設定することもできる。つまり、DMの考えと客観的な評価の一致する度合いが大きい(小さい)ほど $\epsilon_R - \epsilon_L$ の値が小さく(大きく)なる。

以上のようなファジィ環境において問題を定式化し解くために、「一致指標(agreement index)」の考え方が有効である[3]。一致指標とは、簡単にいうと2つのファジィ集合の重なり具合を面積比で示すことである。今、2つのファジィ集合 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ があるときこれらの交わり($\tilde{A} \cap \tilde{B}$; 図2.5の斜線)部分が、ファジィ数 $\tilde{A}$ に対して占める割合を実数値として表したものが一致指数となり、形式的には次のように定義される。

図2.5 一致指標 $\iota(\tilde{A}, \tilde{B})$

[定義1] ファジィ数 $\tilde{A}$ のファジィ集合 $\tilde{B}$ に対する一致指標 $\iota(\tilde{A}, \tilde{B})$ とは、

$$\iota(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\text{area } \tilde{A} \cap \tilde{B}) / (\text{area } \tilde{A}). \quad (9)$$

によって計算される $[0, 1]$ 内の実数値である。ここで“area・”は、次式のように、そこに与えられた領域の面積値を計算するものとする。

$$\text{area } \tilde{A} = \int_{a_1}^{a_3} \mu_{\tilde{A}}(x) dx.$$

ここで提案したファジィ要素を、この一致指標を用いることによって、ファジィではない値として決めることにする。2つのファジィ集合を比較する方法は、DuboisとPradeが提案した指標[1]をはじめ、様々なタイプのものがこれまで提案されているが[7]、(5)～(7)式で表わされるような(ファジィ数ではない)満足度関数と(8)式のようなファジィ数との比較においては、一致指標の概念が視覚的にも直観的にも理解しやすく扱いやすい。すなわち、上の定義における $\tilde{A}$ をファジィ効用値 $\tilde{e}_{ij}$ として、 $\tilde{B}$ を仕事の重要度 $\tilde{m}_j$ としてみなすことによって、これらの一致指標 $\iota(\tilde{e}_{ij}, \tilde{m}_j)$ を計算する。結果として得られる値は、文字どおりDMが主観的に考える各仕事ごとの理想とする人物像とそれに割り当てられた労働者とがどの程度一致しているか、その度合いを表すことになる。したがって、一致指標の値をあらかじめすべて(n^2 個)計算し、それらを通常の効用値 e_{ij} とみなすことによって、非ファジィ化された通常の割当問題として解くことができる。

3. 2 目的ファジィ割当問題

2.1 問題の定式化

前節ではDMの視点から、各仕事ごとに理想とされる人物像をファジィ集合とし、さらに割り当てに対する効用値もファジィ要素として割当問題を考えたが、実際の現場においては、割り当てられる仕事に関して各労働者の希望を調べ、その結果を考慮するような場合もあるだろう。しかしながら、このような状況においても通常DMの視点を外すわけにはいかないので、

次のような2目的問題を考えることによって、労働者側の意見も考慮したファジィ割当問題“BFAP: Bi-criteria Fuzzy Assignment Problem”が定式化できる。

$$BFAP: \quad Z_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (10)$$

$$Z_2 = \min_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n \mu_{ij}^l x_{ij} \rightarrow \max \quad (11)$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j=1, \dots, n \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i=1, \dots, n \quad (13)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; & i \text{ を } j \text{ に割り当てる} \\ 0; & i \text{ を } j \text{ に割り当てない} \end{cases} \quad (14)$$

($i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$)

ここで、 μ_{ij}^l は労働者*i*に仕事*j*を割り当てたことに対する*i*から見た満足度を表わす。この問題では、前節で提案した方法で e_{ij} を計算することによって、DMの主観が取り入れられ、さらに労働者の仕事に対する満足度 μ_{ij}^l をmax-min型の目的関数で定式化することによって、ある意味で「公平に」仕事が割り当てられるようになるので、労働者側の希望も一定程度は考慮されている点に注意されたい。

現実的には、すべての仕事に対して各労働者がどのように考えているかをアンケート調査などで調べ、希望する割合を $[0, 1]$ 間の実数値で μ_{ij}^l に設定し、問題を記述すればよい。例えば、「強く希望する」を1、「やや希望する」を0.75、「どちらともいえない」を0.5、「やや希望しない」を0.25、「まったく希望しない」を0として μ_{ij}^l にセットする。もちろん、このような5段階ではなく、より多段階でアンケート調査を実施しても構わないが(例えば、100点満点で評価してもらい、83点なら0.83とする)、労働者がすべての仕事内容を完璧に把握しているケースは稀であると思われる。さらに、 μ_{ij}^l に多数の値が存在することにより、計算時間が増大することも直観的に明らかである。以上のことから、 μ_{ij}^l を決めるには、5段階ぐらいの評価でアンケート調査を実施することが妥当といえるであろう。

2.2 問題の解法

この問題“BFAP”は2目的なので、一般的に目的関数間にトレードオフの関係が生じ、その結果、唯一の最適解が存在しないことが予想される。つまり、このことは最終的な(解が得られた後に下す)意思決定が難しくなることを示唆している。この問題を解くにあたって、通常の多目的問題と同様、非劣解(パレート最適解)をどのように扱うかが、実用的な意思決定支援シ

ステムを設計するという観点から重要になる。その対処法としては、次のようなものが挙げられる。

- ・目的関数の最適値が2つとも同じになる解が複数存在するとき、任意の1つだけを解として求めるようにする。
- ・それぞれの目的関数に対して「しきい値(threshold)」を設定し制約とすることによって、実行可能解の数を減少させる。

前者の方法は、 μ_{ij}^l を数段階評価のアンケート調査で決めたとしても、 e_{ij} が適性試験やDMの主観を表わしたファジィ数などから計算されることを考えれば、有効な解決策にはならないだろう。後者の方法については、適切なしきい値を設定することができれば有効なアプローチとなるが、そうでなければ非劣解の数をほとんど絞り込めない結果になる恐れもある。そこで本稿では、与えられたしきい値に対して、どのような非劣解が存在するかを提示し、その結果を見てDMが必要に応じてしきい値を更新するような「対話型システム(interactive system)」[5]の設計を試みることにする。

ここで導入されるしきい値は、 μ_{ij}^l に対して $\alpha \in [0, 1]$ で与えられるものとし、割り当てられた仕事に対する満足度が、すべて α 以上となる解を実行可能と考えることによって、非劣解の数を抑える絞り込みが可能となる。すなわち、次式を制約条件に加えることによって、2番目の目的関数(11)式でのmax-min値“ Z_2 ”は α 以上になることが保証されることになり、同時に、 α 未満の満足度しか得られない割り当てはすべて切り捨てられることになる。

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij}^l x_{ij} \geq \alpha, \quad i=1, \dots, n \quad (15)$$

したがって、しきい値としてある値“ α' ”が与えられたとき、 $\mu_{ij}^l < \alpha'$ となるような*i*と*j*の組“(i, j)”と呼ぶことにする)すべてに対して、本来設定されていた e_{ij} の値ではなく $-\infty$ となる(「罰金」を課す)ような負の値に更新し(つまり、 $e_{ij} := -\infty$)、通常の割当問題を解くことによって、最適な割り当て方が一般的には唯一つ求められるように思われる。しかしながら、 α の値が大きすぎると実行可能な解が存在しない(1番目の目的関数値“ Z_1 ”が負の値になる)場合もあるので、通常の割当問題に帰着させて解く前に実行可能性をチェックしておくことが、無駄な計算時間を省くためにも必要である。そこで、以下のように定義される「割当ネットワーク」を導入する。

[定義2] 割当ネットワークとは、

N_I : 労働者 i を示すノードの集合

$$i \in N_I, |N_I| = n$$

N_J : 仕事 j を示すノードの集合

$$j \in N_J, |N_J| = n$$

A : $\mu_{ij}^l \geq \alpha$ を満たす組 (i, j) の i から j への有向アークの集合

$$(i, j) \in A, |A| \leq n^2$$

から構成される二部グラフ (bi-partite graph) $B = [N_I, N_J; A]$ に, スーパーソース s , スーパーシンク t と, 計 $2n$ 個の有向アーク $(s, i), (j, t)$ を加えたネットワークのことで, すべてのアークの容量は 1 とする ($c(i, j) = c(s, i) = c(j, t) = 1$).

割当ネットワークにおいて s から t への最大流問題を考えたとき, あるアーク $(h, k) \in A, h \in N_I, k \in N_J$ に流量 1 のフローが存在すれば, 労働者 h に仕事 k を割り当てることになるが, (15) 式の制約条件を満たさない組 (i', j') に対応するアークは存在しないので, s から t への最大流問題を解き, 得られた最大流量の値 v によって実行可能性がチェックできる. すなわち, $v = n$ なら (15) 式をも含めた制約 (11) ~ (14) 式を満足する実行可能解が存在し, $v < n$ なら存在しないことが判定できる [6]. しかし, $v = n$ となる最大フローが複数パターン存在する場合もありうることを考えれば, そのフローパターンより最適な割り当てが直ちに決まらないことになるので, 改めて通常の割当問題を解き, 与えられた α に対する最適な割り当てを見つけなければならない. ただし, その際, (15) 式を満たさない (i, j) の割り当てを排除するため, それに対応する効用値 e_{ij} に前述の「罰金」を課して割当問題を解いても, すでに実行可能性は確認済みなので, (10) 式の目的関数値 “ Z_1 ” が負の値にはならないことに注意されたい.

アルゴリズム BFAP

ステップ 0 ファジィ効用値 $\tilde{e}_{ij}$ と仕事の重要度 $\tilde{m}_j$ を設定後, ファジィでない効用値 e_{ij} を求める.

$$e_{ij} := \iota(\tilde{e}_{ij}, \tilde{m}_j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n.$$

また, パレート最適性をチェックするため, $Z_1^{\text{prev}} := 0$ とセットする.

ステップ 1 通常の割当問題 “AP” を解き, 得られた最適解と予め調査してセットしてある μ_{ij}^l より, しきい値 α の下限値 α_l を下記のようにして設定する.

$$\alpha_l := \min_{(i, j) \in OP} \mu_{ij}^l.$$

ここで, OP は “AP” を解いて得られた割当結果

($OP = \{(i, j) | x_{ij} = 1\}$) の集合を表わす. また, しきい値 α の上限値は $\alpha_u := 1$ とする.

ステップ 2 DM が μ_{ij}^l に対するしきい値 α を $\alpha_l \leq \alpha \leq \alpha_u$ の範囲で主観的に設定する. ただし, $\alpha = \alpha_l$ もしくは $\alpha_l = \alpha_u$ なら, (10) 式の目的関数値はこれ以上改善されないで終了する.

ステップ 3 $\mu_{ij}^l \geq \alpha$ を満たすアーク (i, j) から成る割当ネットワークに対して最大流問題を解き, 最大流値 v を求める. その結果, $v < n$ なら α の上限値 α_u を現在のしきい値に更新して ($\alpha_u := \alpha$) ステップ 2 へ戻る (そうでなければ, 次のステップ 4 へ進む).

ステップ 4 下記のように効用値 e_{ij} を設定して通常の割当問題 “AP” を解く.

$$e_{ij} := \begin{cases} e_{ij}; \mu_{ij}^l \geq \alpha \\ -\infty; \mu_{ij}^l < \alpha \end{cases}$$

その結果, 現在の解に対する目的関数 Z_1 の値 Z_1^{curr} が, $Z_1^{\text{curr}} \leq Z_1^{\text{prev}}$ ならば, 新たな非劣解は見い出されない. そうでなければ現在の割り当ては非劣解であり, $Z_1^{\text{prev}} := Z_1^{\text{curr}}$ のように更新する.

ステップ 5 現在の解 (割り当て方) に対する (10) 式の目的関数値に満足なら終了. そうでなければ, $\alpha_u := \alpha$ のように更新する.

ステップ 6 DM が μ_{ij}^l に対するしきい値 α を $\alpha_l \leq \alpha \leq \alpha_u$ の範囲で主観的に設定してステップ 4 へ戻る. ただし, $\alpha = \alpha_l$ もしくは $\alpha_l = \alpha_u$ なら, (10) 式の目的関数値はこれ以上改善されないで終了する.

4. 数値例

ここでは, 簡単な数値例によって, DM が満足できる割り当て方がどのような過程を経て見い出されるか, アルゴリズムの数回の反復 (iteration) の後に満足解が得られる場合を例示し, その後, 提案手法の妥当性・有向性について検証する.

まず, $n = 4$ の場合で, 問題の設定から満足解が得られるまでを, 以下の表 1 ~ 2 で与えられた数値データを用いて考える. 今, 表現の簡便性のために新たに導入された記号 “TFN($\cdot, \cdot, \cdot$)” は, 仕事 j に対する労働者 i の能力度を表わす三角型ファジィ数であり, (8) 式で定義した数式ならば $TFN(u - \epsilon_L, u, u + \epsilon_R)$ のように簡潔に記せる. 同様に, 仕事の重要度を特徴づける (5) ~ (7) 式のメンバシップ関数も, それぞれ $LS(1; a, b; 0)$, $RS(0; c, d; 1)$, $TRPZ(p, q, r, s)$ として記述される.

表1 ファジィ効用値 $\tilde{e}_{ij}$ と仕事の重要度 $\tilde{m}_j$

労働者\仕事	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=1$	(2,3,5)	(2,3,5)	(2,3,5)	(1,2,3)
$i=2$	(0,5,6)	(0,5,6)	(0,5,6)	(0,1,2)
$i=3$	(4,5,6)	(5,6,7)	(5,7,9)	(5,7,9)
$i=4$	(4,5,6)	(7,9,12)	(7,9,12)	(7,9,12)
仕事の重要度	$LS(1;2,4;0)$	$TRPZ(3,6,8,9)$	$TRPZ(4,5,7,8)$	$RS(0;8,9;1)$

表2 労働者 i の仕事 j に対する満足度 μ_{ijl}

労働者\仕事	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=1$	0.55	0.80	0.90	0.10
$i=2$	0.90	0.60	0.30	0.70
$i=3$	0.10	0.20	0.75	0.90
$i=4$	0	0.40	0.80	0.75

< 1 回目の反復 >

ステップ 0 表1のデータに一致指標の計算を適用して、仕事 j に対する労働者 i の適性度が、 i 行 j 列の要素として、

$$\begin{pmatrix} 0.4444 & 0.2667 & 0.1111 & 0 \\ 0.3810 & 0.3750 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0.7500 & 0.0833 \\ 0 & 0.2667 & 0.0667 & 0.8000 \end{pmatrix} \quad (16)$$

のように得られる。また、 $Z_1^{prev} := 0$ とセットされる。

ステップ 1 ステップ 0 で得られた(16)式を効用値 e_{ij} と見なして、通常の割当問題を解くと $x_{11} = x_{23} = x_{32} = x_{44} = 1$ 、要するに、労働者 $i=1$ には仕事 $j=1$ 、 $i=2$ には $j=3$ 、 $i=3$ には $j=2$ 、 $i=4$ には $j=4$ が割り当てられることになり、効用値の合計は $Z_1 = 2.5777$ で、満足度の最小値は $Z_2 = 0.20$ なので、しきい値の下限は $\alpha_l := 0.20$ となる。なお、以下では、現在の解を次式のような“*”を付けた行列で表わすことにする。

$$\begin{pmatrix} 0.4444* & 0.2667 & 0.1111 & 0 \\ 0.3810 & 0.3750 & 0.3333* & 0 \\ 0 & 1.0000* & 0.7500 & 0.0833 \\ 0 & 0.2667 & 0.0667 & 0.8000* \end{pmatrix} \quad (17)$$

ステップ 2 現在、しきい値は $0.2 < \alpha < 1$ の範囲で選べるので、DM は $\alpha = 0.9$ に設定したとする。

ステップ 3 $\mu_{ij}^l \geq 0.9$ を満たすアーク (i,j) から構成された割当ネットワークに対して最大流問題を解けば、最大流値は $v=3$ となる。

ステップ 4 $v=3 < 4=n$ なので、 $\alpha_u := 0.9$ のように更新してステップ 2 へ戻る。

< 2 回目の反復 >

ステップ 2 現在、 $\alpha_l = 0.2 < \alpha < 0.9 = \alpha_u$ なので、DM がしきい値 α を 0.7 に設定したとする。

ステップ 3 対応する割当ネットワークの最大流問題を解くと、 $v=4=n$ なので、次のステップに進む。

ステップ 4 $\mu_{ij}^l \geq 0.7$ に対応する e_{ij} が、下記のように設定され、対応する割当問題を解く。

$$\begin{pmatrix} -\infty & 0.2667* & 0.1111 & -\infty \\ 0.3810* & -\infty & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0.7500* & 0.0833 \\ -\infty & -\infty & 0.0667 & 0.8000* \end{pmatrix} \quad (18)$$

その結果、割り当ては $x_{12} = x_{21} = x_{33} = x_{44} = 1$ 、目的関数の値は、 $Z_1 = 2.1977$ 、 $Z_2 = 0.75$ となる。今、 $Z_1^{prev} = 0 < 2.1977 = Z_1^{curr}$ なので、この解は非劣解となり、 $Z_1^{prev} := 2.1977$ と設定される。

ステップ 5 DM は現在の Z_1 の値に満足できないとすれば、しきい値の上限が $\alpha_u = 0.7$ に更新される。

ステップ 6 現在、 $\alpha_l = 0.2 < \alpha < 0.7 = \alpha_u$ なので、DM がしきい値 α を 0.6 に設定したとする。

< 3 回目の反復 >

ステップ 4 $\mu_{ij}^l \geq 0.6$ に対応する e_{ij} は

$$\begin{pmatrix} -\infty & 0.2667* & 0.1111 & -\infty \\ 0.3810* & 0.3750 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0.7500* & 0.0833 \\ -\infty & -\infty & 0.0667 & 0.8000* \end{pmatrix} \quad (19)$$

であり、この割当問題を解いた結果、割り当ては $x_{12} = x_{21} = x_{33} = x_{44} = 1$ 、目的関数の値は $Z_1 = 2.1977$ 、 $Z_2 = 0.75$ となるが、 $Z_1^{prev} = 2.1977 = Z_1^{curr}$ (2 回目の反復時と同じ割り当て方) なので、新たな非劣解は見い出されない。

ステップ5 DM は現在の Z_1 の値に満足できないとすれば、しきい値の上限が $\alpha_u=0.6$ に更新される。

ステップ6 現在、 $\alpha_l=0.2 < \alpha < 0.6 = \alpha_u$ なので、DM がしきい値 α を 0.4 に設定したとする。

< 4 回目の反復 >

ステップ4 $\mu_{ij}^l \geq 0.4$ に対応する下記の e_{ij}

$$\begin{bmatrix} 0.4444^* & 0.2667 & 0.1111 & -\infty \\ 0.3810 & 0.3750^* & 0.3333 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0.7500^* & 0.0833 \\ -\infty & 0.2667 & 0.0667 & 0.8000^* \end{bmatrix} \quad (20)$$

から、割り当ては $x_{11}=x_{22}=x_{33}=x_{44}=1$ 、目的関数の値は $Z_1=2.3694$, $Z_2=0.55$ となり、 $Z_1^{prev}=2.1997 < 2.3694 = Z_1^{curr}$ が成り立つので、この解は非劣解となる

ステップ5 DM は現在の Z_1 の値に満足し、終了したものとする。

以上の過程から、提案したアルゴリズムの妥当性ならびに有向性に関して考察する。

最初に、このアルゴリズムで得られる解のパレート最適性について考察する。2つの目的関数 Z_1 と Z_2 の間にトレードオフの関係があるとき、唯一の最適解は存在しないことになる。今、ある解(この割り当て方を A と呼ぶことにする)から得られる2つの目的関数値を Z_1^A と Z_2^A で表わせば、 $Z_1^A \leq Z_1^B$ としても $Z_2^A \leq Z_2^B$ を満たす別の解(これを B とする)が存在すれば、 B は A を優越する (dominate) 解となるが、 A を優越する解が他に存在しなければ、解 A は非劣解(パレート最適解)であると定義される。提案したアルゴリズムのステップ2以降では、DM が現在の解に満足できなければ、 Z_2 に関する値 α を下げることによって、 $-\infty$ にセットされているため解として採用不可となっていた割り当てが、次の反復において $-\infty$ が解除されるので、その部分が Z_1 の改善に ($Z_1^{curr} > Z_1^{prev}$ となるために) 役立つならばその部分が採用され、その結果、新たな非劣解が見い出されることになる。

次に、各反復時における、しきい値の更新について解説する。DM が設定できるしきい値は、上限値 α_u の更新によりその範囲が限定されるので、DM が主観的に理想とする (Z_1 の値が改善される) 非劣解に早くたどり着けるようにするという利点が挙げられる。ただし、数値例の3回目の反復時に見られるような、 Z_1 の値が改善されず以前と同じ解が求められる場合もあるが、上述したように、 α を下げることによって解としての選択肢は広がっていることに注意されたい。この

限定操作により、 n (厳密には、 μ_{ij}^l) の数が大きくなればなる程、その効果が現われるが、同時に一部の非劣解を見落とすことにもつながる。例えば、数値例の2回目の反復時において $\alpha=0.7$ と設定されるが、その結果、 $\alpha=0.8$ に対応する解

$$\begin{bmatrix} -\infty & 0.2667^* & 0.1111 & -\infty \\ 0.3810^* & -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & 0.7500 & 0.0833^* \\ 0 & -\infty & 0.0667^* & -\infty \end{bmatrix} \quad (21)$$

が見落とされることになる(この解は、 $Z_1=0.7997$, $Z_2=0.8$ なので、非劣解である)。したがって、もしこのような事態を避けたいのであれば(あるいは n の数が少なければ)、 α_u を各反復時において更新することをやめ、その代わりに、すべての μ_{ij}^l を予めソートしておき、減少順に α を更新するようにアルゴリズムを改良すればよい。

最後に、上の数値例では見られないが、解の一意性について触れておくことにする。今、1回目の反復のステップ1において、解が一意的ではなく、効用の合計値が $Z_1=2.5777$ で、満足度の最小値が $\alpha_l > 0.20$ となる、別の割り当て方が存在すると仮定する。このとき、しきい値を更新する次回以降の反復過程で、DM にとってその解が必要ならば(現在の解に満足できないならば)、非劣解としてそれが見い出される可能性は保証される。なぜならば、しきい値の更新により、解の一部を構成していた $\mu_{ij}^l=0.2$ に対応する割り当ては、更新後には効用値が $-\infty$ となるので明らかに効用の合計値を最大にする解としては採用されなくなり、新たに得られた解は非劣解となりうる。もしそれが $Z_1=2.5777$ かつ $\alpha_l < 0.20$ のような解ならば、非劣解の考え方から不要であるため、しきい値の下限値は $\alpha_l=0.20$ と設定できることになる。同様に、その他のステップにおいて解が一意的でない場合も、それぞれの解における μ_{ij}^l の最小値が異なれば、しきい値の更新を行うことによって、別の割り当て方が見い出されることの可能性が保証される。なお、場合によっては、 Z_1, Z_2 の双方において同じ値となる別の割り当て方が存在するかもしれないが、このことは今回提案したアルゴリズムでは考慮されていない。これについては、現在のような2つの目的関数だけでは対処しづらいので、何らかの別の要因から判断し識別することが望まれるので、3目的問題へと拡張することも視野に入れながら今後の課題として検討していくつもりである。

5. おわりに

本稿の前半では、効用値をファジィ数として取り扱うときの設定・解法を示した。すなわち、各仕事の重要度をメンバシップ関数によって特徴づけ、厳密な1つの値として決められない効用値をファジィ数として表した後、これらの間で一致指標をとり、通常のファジィではない割当問題として解くことによって、効用値が不正確なとき、あるいはDMの主観を効用値として考慮したいときなどにこの方法が適用できることを明らかにした。

さらには、この考え方を発展させ、労働者側が予め提示する、各仕事に対する満足度(やりがい)を示す“ μ_{ij}^l ”の式を目的関数の1つとして追加することによって、DMの視点だけで決める(効率性のみを追求する)のではない、ある意味で「柔軟な」割り当て方が求められることになる。このとき、2つの目的関数がトレードオフ関係になることも予想されるので、提案したアルゴリズムでは、しきい値の上限・下限を定めた後、その範囲内でしきい値をアルゴリズムの反復ごとに改訂するときに、非劣解(パレート最適解)の概念が考慮されている。なお、すべての“ μ_{ij}^l ”を予めソートしておけば、2分法(binary search)を採用することによって、よりスムーズな対話が可能になるシステムに改良できることを付記しておく。

最後に、今後の課題としては、3目的以上へ問題を拡張することによって、より現実的な定式化とともに意思決定を容易にすることが望まれる。また、実際のデータを使ってこのアルゴリズムの有効性を探る必要もあろう。具体的には、企業においてはもちろんのこと、サッカーやアメリカンフットボールのようなポジション割り当てを必要とするスポーツにも適用してみ

たい。その場合、各選手の各ポジションに対する効用値は厳密に決めづらいことが容易に予想されるので、本稿で提案したアプローチが役立つように思われる。

参考文献

- [1] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy numbers: An overview, in analysis of fuzzy information*, Vol.1, CRC Press, 1987.
- [2] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson, *Flows in network*, Princeton University Press, 1962.
- [3] A. Kaufmann and M. M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic / Theory and applications*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
邦訳: 田中英夫監訳, ファジィ数理論と応用, オーム社, 1992.
- [4] J. Munkres, Algorithms for the assignment and transportation problems, *SIAM J.*, 10, 196-210, 1962.
- [5] 坂和正敏, ファジィ対話型多目的計画法, 日本ファジィ学会誌, Vol.4, No.1, 11-20, 1992.
- [6] 多田実, 石井博昭, 満足度を考慮した二つの割当て問題, 電気学会, Vol.114-C, No.4, 426-429, 1994.
- [7] H. J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications*, Kluwer, Boston, 2nd revised ed. 1991.

(1997年9月9日 受付)

(1998年5月28日 再受付)

[問い合わせ先]

〒612-8577

京都市伏見区深草塚本町67

龍谷大学経営学部

多田 実

TEL : 075-645-8565

FAX : 075-643-8510

E-mail : tada@rnoc.fks.ryukoku.ac.jp

著者紹介

多田 実 (ただ みのる)

龍谷大学経営学部

平成元年3月に大阪大学工学研究科数理工学専攻博士課程を単位取得の上退学し、その後、龍谷大学経営学部専任講師、現在、同助教授。平成6年に京都大学論文博士(工学)取得。主な研究分野は、ファジィ理論とその応用、組合せ最適化、情報システム学などの研究に従事。

石井 博昭 (いしい ひろあき)

大阪大学大学院工学研究科数理情報工学講座

昭和51年3月に京都大学工学研究科数理工学専攻博士課程を単位取得の上退学し、その後、大阪大学工学部応用物理学科助手、助教授、岡山大学工学部情報工学科教授を経て、現在、大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻数理情報工学講座教授。工学博士。主な研究分野は、ファジィ理論とその応用、組合せ最適化、確率計画法などの研究に従事。

Bi-criteria Fuzzy Assignment Problem

by

Minoru TADA and Hiroaki ISHII

Abstract :

The objective of the ordinary assignment problem is maximizing the total efficiency when each worker is assigned to exactly one job and each job receives exactly one worker. In some situation, however, it is not so easy to determine every efficiency rigidly. In this paper, we accordingly consider the assignment problem as a “decision making in fuzzy environment”. That is, the weights of jobs are presented by membership functions and introduce fuzzy efficiencies characterized by fuzzy numbers. In this case, we can formulate and solve the problem by making use of the agreement index. Further, in order to consider more flexible situation, we characterize each worker's satisfaction degree for each job by the corresponding membership functions and formulate the problem with two objectives, i.e., (1) the total efficiency to be maximized and (2) the minimum among all satisfaction degrees to be maximized. In other words, the bi-criteria problem is formulated from the viewpoint of not only (1) DM (Decision Maker) but also (2) workers. To solve the bi-criteria problem, we propose an efficient algorithm which is the interactive system with the concept of non-dominated solution.

Keywords : Assignment Problem, Fuzzy Efficiency, Multi-Objective Problem, Decision Making in Fuzzy Environment

Contact Address : **Minoru TADA**

Faculty of Business Administration, Ryukoku University
67 Tsukamoto-cho, Fukakusa, Fushimi, Kyoto 612-8577, Japan
TEL : 075-645-8565
FAX : 075-643-8510
E-mail : tada@rnoc.fks.ryukoku.ac.jp