Haddad の方法による ファジィ制御系の安定解析†

中西 英治* 森 禎弘* 森 武宏* 黒江 康明*

ファジィ制御系は、コントローラの入出力関係に注目すると非線形システムと考えることができる。ゆえに、その安定解析においても、非線形特性の解析法が用いられている。しかし、これらは特定のシステムを扱っている場合が多く、一般的な手法は存在しないといってよい。従って、様々な解析の可能性を追求することが望まれる。

そこで本論文では、Haddad の方法によりファジィ制御系を解析することを考える。この方法は、非線形特性にセクタ条件等の制約を用いていないため、様々な非線形システムに適用できるという特徴を持っている。Haddad の方法は一般に非線形最適化問題に帰着する。ここでは、この問題を簡略化推論をもつコントローラの入出力が有する一つの特性、すなわち断片単調性、に注目して解決した。この特性は広いクラスのコントローラにみられる。このようにして得た安定解析法を具体的なファジィ制御系に適用し、円板定理の適用結果やシミュレーション結果と比較し有用性を示す。

キーワード：ファジィ制御系，安定解析，Haddad の方法

1. はじめに

ファジィコントローラを含んだ制御方式は、コントローラの構成の仕方が経験則やヒューリスティックスに馴染むため、今や多数の現場への導入例を見出ししている。他方、このようなオペレータや設計者に友好的な性質は逆に、数理的な解析の側に負担を負わす結果となっている。例えば、ファジィ制御系の安定解析は制御の際の最重要課題であるにもかかわらず、その方法論として決定的といえるものが存在しないことはよく知られている。これはコントローラ中の推論機構には様々な方式があり、それらに対する入出力関係は制御理論の枠組みに一括して収まり切れないような非線形性をもつことが主因である。現在までに、円板定理[1]，位相面解析[2][3]，記述関数法[4]，リアプノフ関数法[5]など、非線形解析のアドホックな手法が適用されてきている。円板定理による方法は、非線形特性をセクタ条件で表現して解析を行う方法であり、セクタ条件を満たすシステムでなければ適用できない。位相面解析は、系のふるまいを位相面上に抽象する事によって制御系の安定性を判別する方法であり、この方法は系の動的部分の次元が3以上だと解析が困難である。記述関数法についても、系への入力が多入力に

なると適用が困難である。リアプノフ関数法は、一般にリアプノフ関数の構成に有効な方法がない。このような状況にあって考えられる一つの方向は、可能な解析手法の種類を増やすこと、つまり解析のための“工具箱”の中身を豊かにすることである。

本論文では、上に述べた趣旨に沿って、Haddad の方法と呼ぶ非線形システムの解析法のファジィ制御系への応用を検討する。この方法の特徴は、i) 非線形ブロックの入出力数に原理的には制限がない、ii) 非線形特性に過大な拘束を設けない、iii) システムが自励振動する場合もその大ききの推定値を与えることが出来る、などであり、これらはファジィコントローラの特性によく適合しており、上述の各種の解析法が適用不能なシステムに対しても解析できる可能性がある。もちろん、この方法はコントローラの多様な推論形式のすべてをカバーするものではないが、その少くない部分に適用可能であると考えられる。ここでは、適用可能な推論法として、簡略化推論法と一部の Mamdani の推論法とを取り上げる。以下の叙述の進め方は次のようである。次節では、Haddad による非線形システムの解析法の概略を説明する。3節ではここで取り上げるファジィコントローラについて述べ、それを含むファジィ制御系への Haddad の方法の適用に際して鍵となる定理を示す。4節では、3節で示した定理をもとにして Haddad の方法によるファジィ制御系の具体的な安定解析法を示す。5節は、適用例と検討である。2入力1出力のコントローラをもつフィードバック系を対象に、円板定理による結果と比較しつつ本方法の得失を論ず

† Stability Analysis of Fuzzy Control Systems via the Method by Haddad
Eiji NAKANISHI, Yoshihiro MORI, Takehiro MORI and Yasuaki KUROE

* 京都工芸繊維大学 工芸学部 電子情報工学科
Department of Electronics & Information Science, Faculty of Engineering & Design, Kyoto Institute of Technology

る. 第6節で論文をまとめ, 結びとする.

2. Haddad による非線形システムの安定解析法

ここでは, 文献[6]に示されている Haddad の安定解析法についてのあらましを説明し, 実際に適用するにあたっての問題点を述べる.

対象とするシステムは, 図1に示されるような入出力関係が $f(e(t))$ で表される非線形ブロックと, インパルス応答が $h(t)$ である線形システムからなるフィードバックシステムであり, 次式によって表される. ただし, $*$ はコンボリューションを表すものとする.

$$u(t) - e(t) = h(t) * f(e(t)) \quad (1)$$

ここで $u(t)$, $e(t)$, $h(t)$, $f(e(t))$ は

$$\begin{aligned} u(t) &: n \times 1 \text{ の入力ベクトル} \\ e(t) &: n \times 1 \text{ の偏差ベクトル} \\ h(t) &: n \times m \text{ の行列} \\ f(e(t)) &: m \times 1 \text{ のベクトル} \end{aligned}$$

であり, 線形部は安定であるとする. この仮定は, 解析のための技術的なものである. なお, 不安定な場合の対処については, 後の5.3で示唆されている.

ベクトル $e(t)$ に対して, $[e(t)]_+$, $[e(t)]_-$ を, $e(t)$ の要素の絶対値をとったベクトル $|e(t)|$ により

$$[e(t)]_+ = \frac{1}{2}(e(t) + |e(t)|) \quad (2)$$

$$[e(t)]_- = \frac{1}{2}(e(t) - |e(t)|) \quad (3)$$

と定義すると, $e(t) = [e(t)]_+ + [e(t)]_-$ と表される. 他の変数に対しても同様にこの記号を用いるものとする. (1)式において, 両辺の要素の正の部分をとると次のようになる. ただし, これより先のベクトル間の不等号は要素毎に考えるものとする.

$$\begin{aligned} -[e(t)]_- &= [h(t) * f(e(t)) - u(t)]_+ \\ &\leq [h(t) * f(e(t))]_+ - [u(t)]_- \end{aligned} \quad (4)$$

ここで

$$\begin{aligned} &[h(t) * f(e(t))]_+ \\ &= [[h(t)]_+ * [f(e(t))]_+ + [h(t)]_+ * [f(e(t))]_- \\ &\quad + [h(t)]_- * [f(e(t))]_+ + [h(t)]_- * [f(e(t))]_-]_+ \end{aligned}$$

図1 非線形フィードバックシステム

$$\leq [h(t)]_+ * [f(e(t))]_+ + [h(t)]_- * [f(e(t))]_- \quad (5)$$

より

$$\begin{aligned} -[e(t)]_- &\leq [h(t)]_+ * [f(e(t))]_+ \\ &\quad + [h(t)]_- * [f(e(t))]_- - [u(t)]_- \end{aligned} \quad (6)$$

となる.

今 $e(t)$ に対して $t \rightarrow \infty$ の場合を考える. $t \rightarrow \infty$ における上極限及び下極限ベクトルが存在すれば, それらを

$$\begin{aligned} e_+ &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} [e(t)]_+, \\ e_- &:= \liminf_{t \rightarrow \infty} [e(t)]_- \end{aligned} \quad (7)$$

とする. 同様に u_+ , u_- を定義する. そうすると, $t \rightarrow \infty$ のとき $e_- \leq e(t) \leq e_+$ であるので, この範囲での $f(e(t))$ の上限及び下限を

$$\begin{aligned} f_+(e_+, e_-) &:= \sup\{[f(\eta)]_+ : e_- \leq \eta \leq e_+\} \\ f_-(e_+, e_-) &:= \inf\{[f(\eta)]_- : e_- \leq \eta \leq e_+\} \end{aligned} \quad (8)$$

と定義し, さらに

$$A_{\pm} := \int_0^{\infty} [h(t)]_{\pm} dt \quad (9)$$

とすると, (6)式から次式が得られる.

$$-e_- \leq A_+ f_+(e_+, e_-) + A_- f_-(e_+, e_-) - u_- \quad (10)$$

(1)式において両辺の要素の負の部分を取り, 同様にして次式を得る.

$$-e_+ \geq A_+ f_-(e_+, e_-) + A_- f_+(e_+, e_-) - u_+ \quad (11)$$

(10), (11)式を満たす最大の e_+ 及び最小の e_- の値を $\hat{e}_+$, $\hat{e}_-$ とすると

$$\hat{e}_+ \geq e_+, \quad \hat{e}_- \leq e_- \quad (12)$$

が成り立つので, $\hat{e}_+$, $\hat{e}_-$ によって偏差の評価と安定解析を行うことができる. つまり, $\hat{e}_+$, $\hat{e}_-$ が $\hat{e}_+ = \hat{e}_- = 0$ と求まれば, (12)式より $e_+ = e_- = 0$ となるので, この系は漸近安定であることがわかる. また, $\hat{e}_+$, $\hat{e}_-$ がある有界な値として求まれば有界出力安定であることがわかる. $\hat{e}_+$, $\hat{e}_-$ が有界値として求まらなければ, この方法ではその系の解析を行うことが出来ない.

そこで, $\hat{e}_{\pm}$ を求めることが問題となるが, これは一種の非線形最適化問題である. 1入出力システムについては文献[7]で詳しく述べられており, この場合のファジィ制御系への適用については文献[8]で扱われているが, 多入出力システムについては文献[6]で適用の可能性が上述のように示唆されているに留まっており, いかにして上記の非線形最適化問題を解くかが問題となる. とりわけファジィコントローラの場合, $f_{\pm}(\cdot, \cdot)$ の形を陽に得ることやそれらの微分値を知ることは一

般に期待できないため、最適化の際によく用いられている勾配法などの手法が適用できない。これが問題をさらに困難にしている。

この困難に対して文献[9]では、非線形特性が単調であるという制約を加えることによって解決している。しかし、この単調性の要求は適用可能なシステムを制限する。そこで、できる限り一般性を失うことなくこの制約をとりはらうことが本論文の目的である。

以下ファジィ制御系に適用するにあたり、非線形部に相当するファジィコントローラの入出力関係に制約を加えるのではなく、ファジィコントローラの推論法にしばしば見られる特性を利用した具体的な解析法を提案する。

3. 対象とするファジィコントローラ

3.1 ファジィコントローラの推論機構

まずはじめに、ここで用いるメンバーシップ関数を定義する。今、入力を x とし、 $x > 0$ に対応するファジィ集合を J (≥ 1) 個、 $x < 0$ に対応するものを J 個、 $x = 0$ に対応するものを1個考えると、合計数は

$$N = 2J + 1 (\geq 3) \quad (13)$$

となる。この N 個のファジィ集合に対するメンバーシップ関数を $\mu_i(x)$ ($i = -J, -J+1, \dots, J-1, J$) とし、それらは底辺 $2S$ 、高さ1の三角型の関数であるものとする。これを図2に示す。メンバーシップ関数の形から明らかに次式が成り立つ。

$$\mu_i(x) + \mu_{i+1}(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \exists i \quad (14)$$

ファジィコントローラの推論法には、Mamdani の推論法 (min-max 重心法) [10] をはじめとしていくつかの方法が存在するが、ここでは文献[11]に紹介されている簡略化推論法をもとに、出力の計算法を示す。ただし文献[11]の推論法は、2入力である特定のルールテーブルを用いた場合について述べているが、ここではより一般的に n 入力であらゆるルールテーブルに対応できる方法に拡張して考える。

今、次のように m 個のルール R^i が与えられたとする。

$$R^i: \text{if } x_1 \text{ is } A_{i1} \text{ and } \dots x_n \text{ is } A_{in} \text{ then } y \text{ is } b_i. \\ (i = 1, 2, \dots, m)$$

ここで、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ は制御対象の出力変数あるいは状態変数であり、ファジィコントローラの入力変数である。また y は制御対象への操作量であり、コントローラの入力変数である。 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) はそれぞれ i 番目の規則におけるファジィ集合を表すファジィラベルであり、 b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) は実数値 (非フ

ァジィ値) である。上述の制御規則に対し入力メンバーシップ関数 $\mu_{A_{i1}}(x), \mu_{A_{i2}}(x), \dots, \mu_{A_{in}}(x)$ がすべて図2のように与えられるとする。このとき、後件部において出力 y は次のようにして定められる。

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i b_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i} \quad (15)$$

ただし、 ω_i は i 番目の規則における前件部の適合度であり、次式で表されるものである。

$$\omega_i(x) = \min(\mu_{A_{i1}}(x_1), \mu_{A_{i2}}(x_2), \dots, \mu_{A_{in}}(x_n)) \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ である。簡単に表現するなら、この推論機構は min-凸和法といえる。

3.2 ファジィコントローラの入出力特性

ここでは、ファジィコントローラの入出力関係 (15), (16) 式より考えられる特性について考察する。以下では、入力 $\mathbf{x}$ の定義されている実数空間を入力空間と呼ぶ。

ファジィコントローラの入力数が n でそれぞれの入力に対するファジィ集合の数が N のとき、総ルール数 m は N^n 個になる。しかし、どの入力についてもメンバーシップ関数が0以外の値をもつものは、 N 個のうちで高々2つしかない。入力値が確定すれば、それに対して実際に適用されるルールは多くても2個ということになる。特に、すべての入力値が $i \cdot S$ ($i = -J, \dots, J$) であるような特徴点であった場合は、各入力に対して0以外の値をもつメンバーシップ関数が1つだけであるので、この特徴点での出力値はただ1つのルール

図2 入力メンバーシップ関数

図3 局所入力空間 (2入力の場合)

により決定される。このことから出力値を決定するのに全てのルールを考える必要はなく、入力空間を同一のルールが適用される部分に分割して、この局所入力空間ごとに考えてやれば少ないルール数で出力値を決定することができる。

ここで、局所入力空間 $X_{i^{(0)}}$ を

$$X_{i^{(0)}} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid x_j \in [i_j^{(0)} S, (i_j^{(0)} + 1) S] \right\} \quad (17)$$

ただし

$$\begin{aligned} i^{(0)} &= (i_1^{(0)}, i_2^{(0)}, \dots, i_n^{(0)}) \\ i_j^{(0)} &= -J, \dots, J-1 \end{aligned}$$

とする(図3参照)。

$X_{i^{(0)}}$ 上の端点は 2^n 個存在しており、それらはすべて前述の特徴点(ただ1つのルールから出力が決定される点)に相当している。そして、任意の定まった $i^{(0)}$ に対して、この空間上でのすべての入力値において適用されるルールは同一のものとなっている。つまり、各 $X_{i^{(0)}}$ ごとに考えれば最大でも 2^n 個だけのルールの情報から出力を決定することができる。ゆえに、 $X_{i^{(0)}}$ 上で出力値を考える場合は、(15)式を次のように書き換えることができる。

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{2^n} \omega_i b_i}{\sum_{i=1}^{2^n} \omega_i} \quad (18)$$

今、ある局所入力空間 $X_{i^{(0)}}$ に関して(18)式を構成し、このときの $b_i (i=1, 2, \dots, 2^n)$ の最大、最小値を b_{max} , b_{min} すなわち

$$b_{min} \leq b_i \leq b_{max}, \quad \forall i \quad (19)$$

とすると、

$$\begin{aligned} b_{min} &= \frac{b_{min} \sum \omega_i}{\sum \omega_i} \leq \frac{\sum \omega_i b_i}{\sum \omega_i} \leq \frac{b_{max} \sum \omega_i}{\sum \omega_i} \\ &= b_{max} \end{aligned} \quad (20)$$

となるので、(18), (20)式より $X_{i^{(0)}}$ 上での出力 y に対して次式が成り立つ。

$$b_{min} \leq y \leq b_{max} \quad (21)$$

ところで、 $X_{i^{(0)}}$ の端点は 2^n 個存在するが、これらの点は先に述べた特徴点に相当しており、この点において有効なルールはただ1つだけであるので、出力は

$$y = b_i (i=1, \dots, 2^n) \quad (22)$$

となる。(19), (21), (22)式より、結局 $X_{i^{(0)}}$ 上での出力 y の最大値および最小値を取り得る点は、 $X_{i^{(0)}}$ の 2^n 個

図4 局所入力空間の分割(2入力の場合)

の端点のうちのいずれかの点であることがいえる。

ここで、 $k=0, 1, 2, \dots$ として、 $X_{i^{(k)}}$ を以下のように定義する。

$$X_{i^{(k)}} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid x_j \in [i_j^{(k)} S^{(k)}, (i_j^{(k)} + 1) S^{(k)}] \right\} \quad (23)$$

ただし

$$\begin{aligned} i^{(k)} &= (i_1^{(k)}, i_2^{(k)}, \dots, i_n^{(k)}) \\ i_j^{(k)} &= -2^k J, -2^k J + 1, \dots, 2^k J - 1 \\ S^{(k)} &= \frac{S}{2^k} \end{aligned}$$

$X_{i^{(k)}}$ は、ベクトル $\mathbf{x}$ の各成分 x_j の存在領域が $X_{i^{(k-1)}}$ のそれを2等分したものになっている。つまり、1つの $X_{i^{(k-1)}}$ に対して、 2^n 個の $X_{i^{(k)}}$ が生成される(図4参照)。すなわち1つの $X_{i^{(0)}}$ に対しては、 $(2^k)^n$ 個の $X_{i^{(k)}}$ が生成されることになる。そして $X_{i^{(k)}}$ にも $X_{i^{(0)}}$ 同様に高々 2^n 個の端点が存在する。このとき、局所入力空間 $X_{i^{(k)}}$ 上での(18)式の出力 y について次の定理が成り立つ。証明の大略は付録に示している。

[定理]

(18)式の出力 y が局所入力空間 $X_{i^{(k)}}$ 上で最大値および最小値を示す点は、 $X_{i^{(k)}}$ の 2^n 個の端点のうちのいずれかである。

この定理は、ファジィコントローラの推論法として3.1節の推論法を用いた場合に成り立つ特性であって、他の推論法で成り立つとは限らない。現によく知られた Mamdani の推論法[10]を用いてファジィコントローラを構成したときには、ルールの選び方によってはこの定理が成り立たない場合がある。それは分割した入力空間の内部で極値をとる場合があるためである。しかしのちに議論するように、この定理は相当広いクラスの推論法を扱うことができる。次節では、この特性を使って非線形最適化問題を解くことによりファジィ制御系の具体的な解析法を示す。

4. 提案する安定解析法

4.1 Haddad の方法による安定解析

2節で問題となっていたのは、(10), (11)式における

非線形関数 f_+, f_- の形を陽に求めることができないことであった。そこで、 f_+, f_- の入力 e_+, e_- について

$$e := \begin{pmatrix} -e_- \\ e_+ \end{pmatrix} \quad (24)$$

なるベクトル e を考え、この e に対して前節の $X_{i^{(k)}}$ に相当する局所入力空間 $E_{i^{(k)}} (k=0, 1, \dots)$ を次のように定義する。

$$E_{i^{(k)}} := \left\{ e \in \mathbb{R}^{2n} \mid e_j \in [i_j^{(k)} S^{(k)}, (i_j^{(k)} + 1) S^{(k)}] \right\} \quad (25)$$

ただし

$$\begin{aligned} i^{(k)} &= (i_1^{(k)}, i_2^{(k)}, \dots, i_{2n}^{(k)}) \\ i_j^{(k)} &= 0, 1, \dots, 2^k J - 1 \\ S^{(k)} &= \frac{S}{2^k} \end{aligned}$$

(10), (11) 式を満たす e_+, e_- の最適解 $\hat{e}_+, \hat{e}_-$ が局所入力空間 $E_{i^{(k)}}$ 上に存在するためには、少なくとも $E_{i^{(k)}}$ 上の点が (10), (11) 式を満たしていなければならない。また、 $E_{i^{(k)}}$ 上での f_+ の上界および f_- の下界値は、前節の定理より $E_{i^{(k)}}$ 上の端点での値から求めることができるので、これを、 $\bar{f}_+, \bar{f}_-$ とすると

$$f_+ \leq \bar{f}_+, \quad f_- \geq \bar{f}_- \quad (26)$$

となり、結局 $E_{i^{(k)}}$ 上に最適解 $\hat{e}_-, \hat{e}_+$ が存在するためには

$$\begin{aligned} e_- &\geq -A_+ \bar{f}_+ - A_- \bar{f}_- + u_- \\ e_+ &\leq -A_- \bar{f}_+ - A_+ \bar{f}_- + u_+ \end{aligned} \quad (27)$$

を満たしていなければならない。つまり、(27) 式の制約を満たすような e_-, e_+ が局所入力空間 $E_{i^{(k)}}$ 上に全くない場合には $E_{i^{(k)}}$ において最適解は存在しないことになるので、その時の $E_{i^{(k)}}$ は以後考慮しなくてもよく、これを削除することが出来る。このことを全ての $E_{i^{(k)}}$ について考えることにより、最適解の存在可能空間を限定していくことができる。そして残った $E_{i^{(k)}}$ に対して、さらに分割した空間 $E_{i^{(k+1)}}$ を考え、同様の作業を行う。この操作を逐次行って、限定された空間から最適解 $\hat{e}_-, \hat{e}_+$ を求めることで安定解析を行うことができる。

4.2 アルゴリズム

4.1 節の考え方に基づいて、2 節の非線形最適化問題の具体的な解法を与えるアルゴリズムを示す。

Step 1 $k=0$ として、入力空間をいくつかの局所空間 $E_{i^{(k)}}$ に分割する。

Step 2 $E_{i^{(k)}}$ における f_+ の最大値 $\bar{f}_+$ 及び f_- の最小値 $\bar{f}_-$ を求める。

Step 3 $\bar{f}_\pm$ を (27) 式に代入して最適解が存在可能な空間を求める。

Step 4 Step 3 で求めた空間と $E_{i^{(k)}}$ との間に共通部分が存在しなければ、 $E_{i^{(k)}}$ を削除する。

Step 5 全ての $E_{i^{(k)}}$ について Step 2~4 を繰り返す。

Step 6 Step 4 で削除されずに残った $E_{i^{(k)}}$ から、 $E_{i^{(k+1)}}$ を生成する。

Step 7 $k+1 \rightarrow k$ として Step 2 へ。

Step 8 $E_{i^{(k)}}$ が十分小さくなるまで Step 2~7 を繰り返す。

ただし Step 8 における終了条件であるが、適当な小さな $E_{i^{(k)}}$ の大きさを与えればよい。各局所入力空間 $E_{i^{(k)}}$ は更新するごとに 2 の巾乗の割合で小さくなるので、十数回ほど更新すれば十分な精度で解を得ることができる。また、最適解が有界値であれば、その値を含む $E_{i^{(k)}}$ は必ず存在するので、全ての $E_{i^{(k)}}$ が削除されることはない。因みに最適解が非有界値の場合は、すべての $E_{i^{(k)}}$ が削除されずに残る。

以上の操作により残ったすべての $E_{i^{(k)}}$ を合わせた空間における e_+ の最大値および e_- の最小値をそれぞれ $\hat{e}_+, \hat{e}_-$ とすることにより解析することができる。

ところで、 e から f への非線形特性が単調である場合には、3.2 節の定理は任意の局所入力空間について成り立つことが明らかであるので、入力空間の分割は不要である。ゆえにこの場合は、上述の方法を簡略化して次の手順で最適解を求めることができる。

Step 1 全入力空間における f_+ の最大値 $\bar{f}_+$ 及び f_- の最小値 $\bar{f}_-$ を求める。

Step 2 $\bar{f}_\pm$ を (27) 式に代入して最適解が存在可能な空間を求める。

Step 3 Step 2 で求めた空間において、 $\bar{f}_\pm$ を求める。

Step 4 空間の変化量が十分小さくなるまで Step 2~3 を繰り返す。

この方法は文献[9]での方法と全く同じであるが、結局前述の方法と同様の計算をしていることになる。従って、今回提案した方法は文献[9]を非線形特性が単調でない場合にも適用できるように拡張したものになっていることがわかる。

5. 解析例と検討

ここでは、具体的なファジィ制御系に対して、前節で提案した解法をもとに安定解析を行い、有用性を示

図5 ファジィ制御系

図6 適用する入力メンバーシップ関数

表1 適用する後件部変数値

NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
-6	-4	-2	0	2	4	6
B : big M : medium S : small ZO : zero P : positive N : negative						

す。また、この解析法一般についてやや立ち入った検討を行う。

5.1 対象とするファジィ制御系

ここで考えるファジィ制御系は図5のような構成をとる。零入力の安定性を考えるため u は0、ファジィコントローラは2入力1出力とし、コントローラの入力の一つとして他の入力を微分器に通したものを考える。また K_1 と K_2 は与えられたゲイン定数であり、 $H(s)$ は安定な制御対象とする。なお、コントローラの推論機構は3.1節で示した推論法を用い、適用する入力メンバーシップ関数は2つの入力ともに図6に示すものとする。また、後件部変数は表1に示すような実数値(非ファジィ値)をとるものとする。

Haddad の方法をファジィ制御系に適用するために、図5のシステムを図7のように等価変換する。ファジィコントローラの入出力特性を $f(e)$ とし、線形部を

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 H(s) \\ K_2 s H(s) \end{bmatrix} \quad (28)$$

とすると、図7は、図1において、非線形部が2入力1出力の場合に相当する。今、 K_1 、 K_2 、 $H(s)$ をそれぞれ

$$K_1 = 1, K_2 = 0.1 \\ H(s) = \frac{K}{(s+1)(s^2+2s+2)} \quad (29)$$

と与えるものとする。ここで K は定数ゲインとする。このとき、 $H_1(s)$ 、 $H_2(s)$ のインパルス応答 $h_1(t)$ 、 $h_2(t)$ を計算すると

図7 等価変換したファジィ制御系

$$h_1(t) = Ke^{-t}(1 - \cos t) \quad (30)$$

$$h_2(t) = 0.1Ke^{-t}(\sin t + \cos t - 1)$$

となるので、(9)式より $A_{\pm}$ の要素は

$$A_{1+} = 0.5K, \quad A_{1-} = 0 \\ A_{2+} = 0.0208K, \quad A_{2-} = -0.0208K \quad (31)$$

のように求められる。

以下では、ファジィコントローラのルールテーブルが異なるいくつかの例を対象に、提案する方法と円板定理による方法[1]の2つの解法により安定解析を行う。同時にシミュレーションを行い、解析結果を確認する。シミュレーションは、状態変数のすべての初期値を $[-3, 3]$ の範囲で2ずつ変化させた場合を考え、刻み幅は0.001、回数は5000回とした。

5.2 数値例

[数値例1]

$K=5.0$ とし、ルールテーブルは表2に示すものを用いる。このときのコントローラの入出力特性は図8のようになる。図8の特性は各入力について単調であり、セクタ条件を満たしている。このようなシステムに対して、提案する方法により解析を行った結果、

$$\hat{e}_{1-} = -15.000, \quad \hat{e}_{1+} = 15.000, \\ \hat{e}_{2-} = -1.250, \quad \hat{e}_{2+} = 1.250 \quad (32)$$

となった。よって、このシステムは有界出力安定であるといえる。同様のシステムを円板定理で解析を行った結果、安定と判定することができなかった。ゆえにこのシステムについては本解法の方が優れた解析結果を示している。これに対してシミュレーション結果は漸近安定となるので、本解法での解析結果はなお保守的である。とはいえ、少くとも解の限界値は示せているので、意味のない結果ではない。さらにシミュレーションによると、このシステムは $K=18$ のときにリミットサイクルを発生し、この時のファジィコントローラの入力 e_1 、 e_2 の振幅は $|e_1| \leq 1.7$ 、 $|e_2| \leq 0.5$ であった。一方、本方法による解析結果は $|e_1| \leq 54$ 、 $|e_2| \leq 4.5$ となり、精度は劣るものの解の有界性が正しく判定されている。もちろん、円板定理ではこのときも判定不能である。

表3 ファジィルールテーブル(数値例2)

		e_1							
		NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB	
e_2	NB	NB	NB	NB	NB	NM	ZO	ZO	
	NM	NB	NB	NB	NM	ZO	PM	PS	
	NS	NB	NB	NS	ZO	PS	PS	PM	
	ZO	NB	NM	ZO	ZO	PS	PM	PB	
	PS	NM	ZO	PS	PS	PM	PB	PB	
	PM	ZO	PM	PS	PM	PB	PB	PB	
	PB	ZO	PS	PM	PB	PB	PB	PB

図9 ファジィコントローラの入出力特性
(数値例2)

$K=1.8$ とし、ルールテーブルは表3に示すものを用いる。このときの入出力特性は図9のようである。図9の特性は明らかに非単調で、セクタ条件も満たさないの、円板定理は適用できない。このようなシステムについて提案する方法で解析を行った結果、

となった。よって、このシステムは漸近安定であると結論される。因みに、シミュレーション結果によればゲイン K の値に関わらず漸近安定となるが、本方法での解析では $K > 1.8$ のときには有界出力安定となる。

数値例1, 2ではファジィコントローラの推論法として3.1節で示した方法を用いているが, ここでは Mamdani の推論法[10]を用いた場合を考える. $K=5.1$ とし, ルールテーブルは数値例1と同様に表2とすると, 入出力特性は図10のようになる. 図10における特性も図8と同様に単調増加である. このことは解析的にも確認できる. また4.2節で述べたように, この場合明らかに3.2節の定理の前提を満たしているので, 本解法が適用可能である. 実際に解析を行うと

図10 ファジィコントローラの入出力特性
(Mamdani の推論法の場合)

となり、このシステムは有界出力安定であるといえる。一方、図10の特性はセクタ条件も満たしているので、円板定理が適用可能であるが、結果は安定と判定されなかった。さらに、シミュレーションによるリミットサイクルが発生するゲインは $K=18$ であり、この時のファジィコントローラの入力 e_1, e_2 の振幅は $|e_1| \leq 1.6$, $|e_2| \leq 0.4$ となる。一方、本解法によるこの場合の解析結果は $|e_1| \leq 48$, $|e_2| \leq 4.0$ であり、少くとも解の有界性が正しく判定され、保守的ながら解の大きさの評価式も得られている。もちろん、この場合にも円板定理による方法は答を出さない。

これらの例では、システムは飽和型非線形要素と安定プラントの組合せなので、その振舞いは漸近安定となるか自励振動をするかのいずれかであることに注意しよう。

5.3 検討

次に、Haddad の方法のファジィ制御系への適用について一般的な検討を行う。

3.2節の定理は、Haddad の方法のファジィ制御系への適用の要である。定理が成り立つコントローラの推論形式として、ここでは文献[11]に載せられた min-凸和形式と Mamdani 形式を取り上げた。定理はしかしこれら以外のかんりの種類のクラスの推論機構に対しても成り立っている。その証明からわかるように、定理の成立に必要なコントローラの特徴は入出力関係の断片単調性である。ここにスカラ関数が断片単調(Patchwise Monotonic)とは、変数定義域が適当な断片に分割され、そのいずれにおいても関数が変数軸方向に単調であることをいう。推論機構がこの性質をもつためには、i)メンバーシップ関数の断片単調性、ii)メンバーシップ関数あるいは適合度関数間の演算前後で同じ性質が保存されること、が必要である。i)については、メンバーシップ関数の多くが満たすので、考慮の外に置いてよい。定理の有効範囲を定めるのは、ii)の性質である。ここで取り上げた min 操作と凸和操作は、ii)の要求を満たす。max 操作も同様である。Mamdani の機構ではしかし、出力非ファジィ化操作である重心をとる過程が一部にこれを満足しない。けれどもルールテーブルの仕様によっては、入出力関係が大域的に単調となることがあり、本節で検討したのはこの場合である。このように、断片単調性をファジィ機構に要求することは決して過大ではなく、Haddad の方法は少からぬクラスのファジィコントローラを扱うことができる。

前小節の数値例では、制御対象は安定なプラントであった。これが臨界安定あるいは不安定な場合、ルリエ系に対してしばしば行われる等価変換[12]を用いることが考えられる。すなわち、システムの線形部分に定数ゲインフィードバックを施し安定化させる一方、非線形部分に符号を変えたゲインフィードフォワードを施す。このような変換でシステムの安定性は不変であり、変換後のシステムの線形部は安定である。ここで、新たな非線形部の入出力特性が、断片単調性を満たせば Haddad の方法が適用できることになる。

また、ここでは零入力システムの安定性を考慮したが、Haddad の方法はシステムに入力がある場合にも安定性を議論することができる。この場合の判定は

有界入力有界出力安定であり、定常時の入力の上、下界値さえわかれば、あとは入力がない場合と同様にして解析が行える。著者らの知る限りではファジィ制御系の入出力安定を考察した例はない。さらに、ここでは簡単のため1出力の場合を扱ったが、コントローラの出力数が複数の場合でも基本的に本解法は適用できる。もちろん、出力数が増えればそれに比例して計算量も増えるが、基本的な手法は1出力のときと何ら変わりはない。制御対象の次数についてももちろん適用に関して制限はなく、高次であっても同様の操作で解析を行うことができる。

5.1, 5.2節の例では本解法と同じ厳密解析法である円板定理との比較を行っている。本解法と円板定理とを比較した場合、安定条件の鋭さに関しては本解法も円板定理同様保守性が強い。これは、解析時に用いる非線形代数不等式を導出する際に解の評価が過大であるためだと考えられる。しかしながら、円板定理が適用不可能であったり、適用可能でも安定と判定できない場合についても、解の有界性を具体的な数値として示すことができる。このことから、本解法は円板定理を補う解析法として位置づけることができる。

6. まとめ

非線形システムの安定解析法の一つである Haddad の方法のファジィ制御系への適用について検討した。この方法の適用の隘路は、非線形最適化問題を解かねばならないことであるが、これをファジィコントローラが典型的にもつ入出力の特性を利用して解決した。さらに、得られた方法を2入力1出力のファジィコントローラを含むシステムに適用し、円板定理の適用結果と対比させた。その結果、円板定理が適用不能の場合や適用可能でも結論を出さない場合にも有意の結果を生み出せることがあり、同定理を補完する役割を果たすことがわかった。もっともこの方法は厳密な方法特有の短所、すなわち安定条件の保守性、を本質的にもっていることは否定できない。しかしながら、どうしても安定性の確証を得たいときや多入出力プラントや高次元のプラントを含むシステムを扱うときなどには、本解法は数少ない選択肢の一つであり、この適用範囲の広さは上記の短所を補って余りあると考えられる。

参考文献

- [1] 北村新三：“ファジィルール制御系の安定解析—円板条件の拡張—”，計測自動制御学会論文集，Vol.27, No. 5, pp.532-537(1991)。
- [2] 前田幹夫，村上周太：“位相面を用いたファジィ制御系の安定性の解析”，日本ファジィ学会誌，Vol.3, No.2, pp.329-338(1991)。

- [3] 北條達也, 寺野寿郎, 増井重弘: “位相面によるファジィ制御系の安定解析”, 日本ファジィ学会誌, Vol.4, No. 6, pp.1133-1146(1992).
- [4] 村上周太, 井ノ口美佐子, 北川龍治: “記述関数法を用いた直接法によるファジィ制御系の安定解析”, 計測自動制御学会論文集, Vol.33, No.10, pp.988-994(1997).
- [5] K. Tanaka and N. Sugeno: “Stability Analysis of Fuzzy Control Systems using Lyapunov's Direct Method”, Proc. of NAFIPS '90, pp.133-136(1990).
- [6] A. I. Mees: “Dynamics of Feedback Systems”, Wiley-Interscience, pp.118-125(1981).
- [7] E. K. Haddad: “New Criteria for Bounded-Input-Bounded-Output and Asymptotic Stability of Nonlinear Systems”, Proc. 5th IFAC Congress, Paris, sec32-2(1972).
- [8] 森 禎弘, 森 武宏, 黒江康明: “ファジィ制御系の安定解析”, 第32回計測自動制御学会学術講演会, 311A-1(1993).
- [9] 中西英治, 森 武宏, 黒江康明: “ファジィ制御系解析のための多入力非線形システムの安定判定法”, 第35回計測自動制御学会学術講演会, 105D-4(1996).
- [10] 菅野道夫: “ファジィ制御”, 日刊工業新聞社, pp.67-90(1988).
- [11] H. Ying: “A Nonlinear Fuzzy Controller with Linear Control Rules is the Sum of a Global Two-dimensional Multilevel Relay and a Local Nonlinear Proportional-Integral Controller”, Automatica, Vol.29, No.2, pp.499-505(1993).
- [12] D. D. Siljak: “Nonlinear Systems”, John Wiley (1969).

[付録]3.2節の定理の証明の概略

ここでは, 3.2節で示したファジィコントローラの特性に関する定理の証明の概略を示す. $X_{i^{(0)}}$ については本文中で証明しているので, $X_{i^{(0)}}$ 以降の証明を行う. ただし, 証明の詳細は煩瑣にわたるので一部で大筋を述べている.

i) $X_{i^{(0)}}$ の場合

今, 任意の $X_{i^{(0)}}$ を考える. $X_{i^{(0)}}$ のときと同様に, $X_{i^{(0)}}$ 上の各入力 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ におけるメンバーシップ関数 $\mu_{A_{ij}}(x_j) (i=1, 2, \dots, 2^n)$ のうち, 0以外の値をとるものは高々2つである. そのうちの小さい値をとる方を $v_j(x_j)$ とすると, (14)式の関係からもう一方は $1-v_j(x_j)$ となるので, $\mu_{A_{ij}}(x_j)$ のとりうる値として

$$\mu_{A_{ij}}(x_j) \in \{v_j(x_j), 1-v_j(x_j)\}, \quad \forall i, \forall j \quad (35)$$

の2つを考えればよいことになる. さらに(14)式より, これらの値に対して

$$0 \leq v_j(x_j) \leq \frac{1}{2} \leq 1-v_j(x_j) \leq 1, \quad \forall j \quad (36)$$

の関係が常に成り立っている.

ここで, $\nu(x) = (v_1(x_1), \dots, v_n(x_n))^T$ とし, $X_{i^{(0)}}$ の ν による写像を考える. $\nu(x)$ の各成分 $v_j(x_j) (j=1, 2, \dots, n)$ は, それぞれ x_j のみの関数であり, かつ x_j の1次式であるので, ν は明らかに線形写像である. また, $X_{i^{(0)}}$ 上での各 x_j の定義域が $[i_j^{(1)} S^{(1)}, (i_j^{(1)}+1) S^{(1)}]$ であるのに対して, $v_j(x_j)$ の値域は $[0, \frac{1}{2}]$ であることから, $X_{i^{(0)}}$ の ν による写像は次のように表すことができる.

$$\nu(X_{i^{(0)}}) = Z := \left\{ z \in \mathbf{R}^n \mid \begin{matrix} z_j \in [0, \frac{1}{2}] \\ j=1, 2, \dots, n \end{matrix} \right\} \quad (37)$$

ただし, $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, $z_j = v_j(x_j) (j=1, 2, \dots, n)$.

一方, ν が線形写像であることより, その単調性から y の極値を与える $X_{i^{(0)}}$ 上の端点は写像先の Z の境界端点に対応している. よって, 以下では空間 Z において定理が成り立つことを証明する.

まず, 適合度 $\omega_i (i=1, 2, \dots, 2^n)$ は n 個の入力 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の関数であるが, (16)式よりメンバーシップ関数 $\mu_{A_{i1}}(x_1), \mu_{A_{i2}}(x_2), \dots, \mu_{A_{in}}(x_n)$ の関数, すなわち $z_1, z_2, \dots, z_n$ の関数であるとも考えることもできる. そして, (16)式から, $z_1, z_2, \dots, z_n$ の大小関係が一定となるような空間において ω_i はただ1つの z_j に対する関数となる. 簡単のため仮に Z の部分集合の一つとして

$$Z_1 := \{z \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_n \leq \frac{1}{2}\} \quad (38)$$

となる集合を考える. すると, 集合 Z_1 において(16)式の演算は陽に求めることができる. そしてこのときの ω_i のとりうる値は(16), (38)式より

$$\omega_i \in \{z_1, \dots, z_n, 1-z_n\} \quad (39)$$

となるので, すべての $\omega_i (i=1, \dots, 2^n)$ は $z_1, \dots, z_n$ のうちのいずれか一つの線形関数となる. ゆえに, (18)式は次のように表すことができる.

$$y = \frac{a_0 + \sum_{j=1}^n a_j z_j}{b_0 + \sum_{j=1}^n b_j z_j} \quad (40)$$

ただし $a_j, b_j (j=0, 1, \dots, n)$ は実数で, $b_j \geq 0$ である.

(40)式において, 出力 y は各 z_j に対して双一次関数となっている. また, (40)式の分母は適合度の和という性質より0になることはなく, 常に正の値であるので, Z_1 の内部に極値は存在しない. つまり出力 y は, 各 z_j について単調である. このことから, Z_1 において(40)式の出力 y が最大および最小値をとりうる点は, Z_1 上の端点または $z_j = z_{j+1} (j=1, 2, \dots, n-1)$ を満たす点ということになる. さらに, $z_j = z_{j+1}$ の超平面上においても出力 y の単調性は成り立つので, 結局 y が最大

および最小値をとりうる点は、 Z_1 の端点となる。

(38)式において、 z_j の大小関係を任意に入れ換えても同様に上述の結果が得られるので、 Z_1 以外の他の Z の部分集合を考えても同じである。また、 Z の部分集合での端点は Z の端点にもなっている。かくして Z 上で(18)式の出力が最大および最小値をとりうる点は、 Z 上の端点ということになる。

$X_{i(k)}$ のどのような部分空間についても同様のことがいえるので、 $X_{i(k)}$ の場合定理は証明された。

ii) $X_{i(k)}(k=2,3,\dots)$ の場合

i)と同様に線形写像 ν を定義し、 $X_{i(k)}$ の ν による写像 Z を求める。次に Z の各成分 $z_j(j=1,2,\dots,n)$ の大小関係が一意に決まるような部分空間 $Z_1, Z_2, \dots$ を考える。以下、同様の議論により証明することができる。

以上より、すべての $X_{i(k)}(k=1,2,3,\dots)$ について、3.2節の定理が成り立つことが証明された。□

(1998年4月23日 受付)

(1998年7月16日 再受付)

[問い合わせ先]

〒606-8585

京都市左京区松ヶ崎御所海道町

京都工芸繊維大学 工学部 電子情報工学科

森 武宏

TEL : 075-724-7453

FAX : 075-724-7400

E-mail : mori@dj.kit.ac.jp

著者紹介

中西 英治 (なかにし えいじ)

京都工芸繊維大学 工学部 電子情報工学科

1996年3月 京都工芸繊維大学工学部電子情報工学科卒業、1998年3月 同大学大学院工学科学研究科博士前期課程修了、同年4月 (株)オムロン入社、現在、同社システム機器統括事業部システムコンポ事業部開発室第2グループ所属。

森 武宏 (もり たけひろ)

京都工芸繊維大学 工学部 電子情報工学科

1974年3月 京都大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了。同年4月 同大学工学部オートメーション研究施設助手、同応用システム科学研究室助教授を経て、現在、京都工芸繊維大学工学部電子情報工学科教授、工学博士。この間、主として制御系の安定解析に関する研究に従事。IEEE、電子情報通信学会、計測自動制御学会会員。

森 禎弘 (もり よしひろ)

京都工芸繊維大学 工学部 電子情報工学科

1993年3月 京都工芸繊維大学工学部電子情報工学科卒業、1995年3月 同大学大学院工学科学研究科博士前期課程修了、同年4月 同大学工学部電子情報工学科助手、現在、ロボasts制御、ファジィ制御に関する研究に従事。IEEE、計測自動制御学会会員。

黒江 康明 (くろえ やすあき)

京都工芸繊維大学 工学部 電子情報工学科

1982年3月 神戸大学大学院自然科学研究科博士課程修了。同年神戸大学工学部電気工学科助手。1991年5月 京都工芸繊維大学工学部電子情報工学科助教授。現在に至る。システム制御理論とその応用、計算機援用解析と設計、ニューラルネットワークなどの研究に従事。学術博士。IEEE、電子情報通信学会、計測自動制御学会、日本ロボット学会会員。

Stability Analysis of Fuzzy Control Systems via the Method by Haddad

by

Eiji NAKANISHI, Yoshihiro MORI, Takehiro MORI and Yasuaki KUROE

Abstract :

Fuzzy control systems can be regarded as nonlinear systems due to the input-output relations of the controller. Hence, various stability analysis methods for nonlinear systems have been successfully applied to fuzzy control systems. But such studies investigate certain specific fuzzy control systems only to get *ad hoc* results. A possible strategy to cope with such a situation is to increase the number of usable tools so as to cover a wide range of systems. This prompts us to add an alternative to the possible analysis tools.

In this paper, we explore a stability test method by Haddad for fuzzy control systems. This method has the merit in that it can be used for many types of nonlinear systems, because it does not need any constraints to the nonlinear property such as sector conditions. The method boils down to a nonlinear optimization problem, which is hard to

solve. Using the local monotonicity property of input-output relation of the controller employed here, however, we resolve this problem to obtain an effective stability test. Numerical examples are provided to show comparison with the circle condition and simulation results.

Keywords : Fuzzy Control Systems, Stability Analysis, Method by Haddad

Contact Address : **Takehiro MORI**

*Department of Electronics & Information Science,
Faculty of Engineering & Design, Kyoto Institute of Technology
Gosyokaidou-cho, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8585 Japan*
TEL : 075-724-7453
FAX : 075-724-7400
E-mail : mori@dj.kit.ac.jp