特集 確率ファジィ解析とその周辺

ランダム集合の基礎をめぐって†

神田 護*

1.

“ランダム”の定式化については色々な議論がありますが、通常、数学では、ある集合 Ω の元 ω として記述される対象がランダムであるとは、 Ω に確率が導入されていることと理解し、 ω を標本点、 Ω を標本空間とよびます。 Ω が可算集合の場合、各 ω に正の数値 $p(\omega)$ を総和 $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ となるように与えることに帰着されますが、各標本点 1 点の確率は 0 であるが、ある“ひろがり”をもった標本点の集まりに対しては正といった場合を扱う必要が生じます。このときは、事象族とよばれる Ω の部分集合からなる族 F (これは通常部分集合全体とは限らない) の導入が必要になり、確率 P は F の元 (事象という) に対して定義されます。確率に対して要請される性質により、事象族 F は、数学用語で可算加法族、シグマ代数、…と呼ばれる族であることが要請され、このような 3 つ組 (Ω, F, P) を確率空間とよびます。

ランダム集合とは、標本点 ω 自身がある定まった空間 E の部分集合であり、したがって Ω は E のある種の部分集合の族となり、そこに適当な事象族 F と確率 P が導入された場合の確率空間 (Ω, F, P) のことです。ここで、一寸した注意をしておきます。確率論では、しばしば確率空間 (Ω, F, P) は、“隠されたパラメータ”として登場し (統計分野の多くでは Ω は全く登場しない)、 Ω の実態は抽象的なままで、確率変数 X は、 Ω を定義域にす

る必ずしも実数値とは限らない (F -可測な) 関数として導入されます。いま、確率変数 X は値を空間 $\mathbf{R}^3$ の点にとり、 R を非負値確率変数とします。 $\omega \in \Omega$ に対して、 $Q(\omega)$ でもって、中心 $X(\omega)$ 、半径 $R(\omega)$ の閉球を示すことにすれば、 Q は閉球の値をとる確率変数になります。さて、 $\tilde{\Omega}$ を $\mathbf{R}^3$ での閉球全体とし、そこに適当な事象族 $\tilde{F}$ を導入して、 $A \in \tilde{F}$ に対して $\tilde{P}(A) = P(\omega \in \Omega; Q(\omega) \in A)$ とおくことによって、確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ が与えられます。これは先ほどの定義によるランダム集合の特別なもの、いわばランダム閉球といったものになります。応用では、ランダム集合は上のような形で現れてくることが多いようです。そこでランダム集合の定義を、確率空間 (Ω, F, P) とそこで定義された集合値確率変数の組として与えることがあり、そのほうが柔軟性に於て有利です。(以上の記述で多少アイマイな点はお許し下さい。)しかし、上のランダム閉球でみたように、後の定義は前の定義に帰着できて、以後の議論の便宜上、本稿では、前の定義で話を進めます。

本稿の目的は、ランダム集合の、基礎的ではあるが一般的な構成に関する結果を、Choquet[1] と Kendall[2] の古典的な論文を比較しながら紹介することにあります。両者の結果の特別な場合として、 $\mathbf{R}^d$ (一般の可分局所コンパクト空間でよい) が上の閉集合全体を Ω とするランダム閉集合 (Ω, F, P) に関する構成定理が共通にえられるため、この結果が、ランダム集合に関する教科書、論文等では、基本的結果として引用されていますが、その内容にまで踏みこんで説明されていることは無いように思えます。そのため、種々の興味ある成果、あるいは将来有意義であるように思われることが見過されているのではないかという気がし、

† Around the Foundation of Random Sets
Mamoru KANDA

* 筑波大学数学系
Inst. of Math, Univ. of Tsukuba

また、一寸したことに気づいたので、両者の論文のかかわりについてほんの少しコメントできるのではないかと思います、筆をとりました。いずれにしろ、これをキッカケに、両大家の個性ある語り口に直接触れて頂けたら、筆者の幸いとするところです。

2.

Kendall は、[2]に於て、狩の好きな国民らしい面白い発想により、ランダム集合の構成に取り組みました。ある空間 E の部分集合を捕えるのに“罠”をしかけます。“罠”とはあらかじめ決められた E の空ではない部分集合のことであり、その組 $\mathfrak{S} = \{T_i\}$ が、 $\bigcup_i T_i = E$ をみたすとき、“罠システム”とよぶことにします。 T_i は互に重なっていてもよく、また個数は有限個でも非可算個でも構いません。以下、 T とか T_i とかは断りなく最初に決められた罠システムに所属する罠を示すことにします。

E の部分集合 Z を、各 T_i に対して $T_i \cap Z$ が空であるか否かによって推定します。当然、一般には Z の形がそのまま分かるわけではなく、罠システム $\mathfrak{S}$ の“細かさ”に応じた Z の形が推量できるだけでしょう。そこで、 $Cl(Z) = (\bigcup_{T \cap Z = \emptyset} T)^c$ とおき、 $\mathfrak{S}$ -閉集合とよぶことにし、 $Z(\mathfrak{S}) = \{Z \subset E; Z = Cl(Z)\}$ 、すなわち $\mathfrak{S}$ -閉集合の全体を考えます。 $Z \subset Z' \subset Cl(Z)$ なら $Cl(Z) = Cl(Z')$ であり、 $Cl(Z) = Cl(Cl(Z))$ が成立し、 $Z(\mathfrak{S})$ は普通の閉集合全体と類似の性質を多く共有しますが、一般には閉集合の公理を全てみたすとは限りません。

罠システム $\mathfrak{S}$ によって識別できる妥当な集合族として、Kendall は $Z(\mathfrak{S})$ をとりあげ、そこに確率を導入することを試みました。そのために、 $\mathfrak{S}$ を定義域とし、0 または 1 の値をとる関数全体を考えました。それは、集合 $\{0, 1\}$ の無限積 $\{0, 1\}^{\mathfrak{S}}$ といひ直せます。積集合には、積の可算加法族として事象族が導入できて、確率導入に関するコルモゴロフの基本定理が適用できます。そして、 $Z(\mathfrak{S})$ は“強示性関数” (strong incidence function, 以下その

全体を SIF と記す) とよばれる $\{0, 1\}^{\mathfrak{S}}$ の部分族と 1 対 1 に対応することが分かります。ここで、 $f \in \{0, 1\}^{\mathfrak{S}}$ が、 $f \in SIF$ であるとは、任意の組 T, T_i で $T \subset \bigcup_i T_i$ をみたすものに対して、 $f(T_i) = 0$ ならば、 $f(T) = 0$ となることとします。 $Z \in Z(\mathfrak{S})$ に対しては、 $Z \cap T \neq \emptyset$ のとき、 $f_Z(T) = 1$ 、 $Z \cap T = \emptyset$ のときは、 $f_Z(T) = 0$ として $f_Z \in \{0, 1\}^{\mathfrak{S}}$ を導入すれば、 $f_Z \in SIF$ となり、 $f \in SIF$ が与えられたときは、 $Z = \bigcap_{f(T)=0} T^c$ とすれば、 $Z \in Z(\mathfrak{S})$ かつ $f = f_Z$ であることが分かります。この対応によって、 $Z(\mathfrak{S})$ と SIF は 1 対 1 になります。当然のことながら、 $Z, Z' \in Z(\mathfrak{S})$ のとき、 $Z = Z'; \iff f_Z = f_{Z'}$ が成立しています。

以上より、 $\mathfrak{S}$ -閉集合の全体 $Z(\mathfrak{S})$ に確率を導入するには、 $\{0, 1\}^{\mathfrak{S}}$ に導入された確率 P が、 SIF に台を持つ、すなわち、 $P(SIF) = 1$ とできたらよいことになります。このプランを実現しようとすれば、数学的に厄介な問題が生じてきます。たとえば、 f が SIF の元であることを特徴づける式が一般には非可算個要求されることにより生ずる可測性の問題があります。

そこで、Kendall は、中間段階としての概念、弱示性関数 (weak incidence function, 以下これの全体を WIF と記す) を導入しました。ここで、 $f \in \{0, 1\}^{\mathfrak{S}}$ が $f \in WIF$ とは、任意の有限組 $T, T_i, i = 1, \dots, n$ で $T \subset \bigcup_{i=1}^n T_i$ となるものに対して、 $f(T_i) = 0, i = 1, \dots, n$ ならば $f(T) = 0$ となることとします。

当然、 $SIF \subset WIF$ であり、 WIF の方が SIF より扱いやすくなります。 WIF に台をもつ確率 P を特徴づけようというのが、Kendall の構成定理の出発点です。そのような確率 P は次の性質(*)をもつはずで

“任意の有限組 $T, T_i, i = 1, \dots, n, T \subset \bigcup_{i=1}^n T_i$ に対して、

$$(*) P(f \in \{0, 1\}^{\mathfrak{S}} : f(T) = 1, f(T_1) = \dots = f(T_n) = 0) = 0”$$

ここで、(*) から $P(WIF) = 1$ が直ちに分るわけでないことを注意しておきます。有限組 T, T_i であ

っても、そのような組の個数は一般には非可算個あり、“任意の有限組 T, T_i 云々”の部分確率のなかに安易にいれるわけにはいきません。実際、 WIF 自身が $\{0, 1\}^{\mathfrak{S}}$ に導入された積の可算加法族に関して可測集合とは限りません。今の場合、この難点を事象族を拡張することによって克服できて、無事(*)をみたす P については、 $P(WIF)$ が導かれます。(似たような困難は、確率過程の構成に際してしばしば生じるものです。)

さて、(*)をみたす P に対して、 $P(f \in \{0, 1\}^{\mathfrak{S}} : f(T) = 1, f(T_1) = \dots = f(T_n) = 0)$ は T_i のえらび方によらず、その和 $\bigcup_{i=1}^n T_i$ のみに依存することが容易に分り、それを $\psi(\bigcup_{i=1}^n T_i)$ とおくことによって、 $\mathfrak{S}_+ = \{\mathfrak{S} \text{ の元の有限和} \}$ 上の関数 ψ がえられます。Kendall は、このような ψ は

“ $1 - \psi$ は $\mathfrak{S}_+$ 上の無限位数の交代関数”

として特徴づけられることを発見し、同時に上の概念が、既に Choquet [1] によって、全く違った動機から基本的なものとして研究されていたことに驚いています。

この概念の説明は次節にゆずり、Kendall の結果の解説を続けます。彼は、逆に、 $1 - \psi$ が $\mathfrak{S}_+$ 上の無限位数の交代関数となる ψ が与えられたとき、(*)をみたすような $\{0, 1\}^{\mathfrak{S}}$ 上の確率 P が定まることを示しました。既に触れたように、 $P(WIF) = 1$ とはできますが、 $P(SIF) = 1$ とは限りません。残念なことに、 WIF に対しては、 SIF のときのように E の部分集合との対応を与えることは、一般にはできません。その意味ではランダム集合が構成できたとはいえませんが、彼はこの場合でも応用上意義があるといって、いくつかの論文を予告しています。しかし、不幸にして私には見つけることができませんでした。御存知の方は御教示下さい。Kendall は、その論文の残りの大半をかけて、 $P(SIF) = 1$ とできるための ψ および $\mathfrak{S}$ の条件を求めることに費やしています。重要な結果ですが、繁雑さのためここでは省略させていただきます。

3.

前節で述べた無限位数の交代関数とは次のものです。 E を任意の空間とし、その部分集合からなる族 E が加法族、すなわち、 $A, B \in E$ ならば $A \cup B \in E$ であったとします。 E 上の非負値関数 A に対して、 $\nabla(A; A_1) = A(A) - A(A \cup A_1)$ とおき、帰納的に $\nabla(A; A_1, \dots, A_n, A_{n+1}) = \nabla(A; A_1, \dots, A_n) - \nabla(A \cup A_{n+1}; A_1, \dots, A_n)$ と定義したとき、全ての自然数 n と $A, A_1, \dots, A_n$ に対して、 $\nabla(A; A_1, \dots, A_n) \leq 0$ となるとき、 A を無限位数の交代関数とよびます。有限位数の交代関数も考えられ、Choquet はそれらについても考察しています。 $\emptyset, E \in E$ かつ $A(\emptyset) = 0, A(E) = 1$ のとき、正規であるということにしましょう。Choquet は、[1] に於て、熱容量の数学的定式化である“容量”を特徴づけるものとしてそれを導入しました。 $\mathbf{R}^3$ 全体の熱容量は無限大ですので、 $A(E) = \infty$ となる場合も重要で、Choquet はそのような場合にも考察をしているのですが(最後にこのことについて一寸触れます)、以下では正規なものに限って話を進めます。

正規無限位数の交代関数全体 $\mathbf{A}$ に各点収束による位相を導入すると、分離公理をみたすコンパクト凸集合になることに Choquet は注目します。そうすると、クライン・ミルマンの端点定理により、 $e(\mathbf{A})$ を $\mathbf{A}$ の端点全体、 $\overline{e(\mathbf{A})}$ をその閉包とすれば、任意の $A \in \mathbf{A}$ に対して $\overline{e(\mathbf{A})}$ 上の確率 μ_A が、 $A = \int_{\overline{e(\mathbf{A})}} f \mu_A(df)$ をみたすように定まります。さて、 $E^c = \{A \in E; A^c \in E\}$ とおけば、 E^c は乗法族、すなわち、 $A, B \in E$ ならば $A \cap B \in E$ となり、位相の基礎概念である E^c -フィルターのクラス $F(E^c)$ が導入できます。ここで $\gamma \in F(E^c)$ とは、 γ は E^c の元からなる集合族で、i) $\emptyset \notin \gamma$, ii) $A, B \in \gamma \Rightarrow A \cap B \in \gamma$, iii) $A \in \gamma, A \subset B, B \in E^c \Rightarrow B \in \gamma$ を意味します。Choquet は、正規無限位数の交代関数の全体 $\mathbf{A}$ に対し、 $e(\mathbf{A})$ はコンパクトであり、さらに $e(\mathbf{A})$ は $F(E^c)$ と 1 対 1 に対応することを証明しました。 $\gamma \in F(E^c)$ が与えられたとき、 $B^c \in$

γ に対して $f_\gamma(B)=0$ 、 $B^c \in \gamma$ に対して $f_\gamma(B)=1$ において E 上の関数 f_γ を導入すれば、 $f_\gamma \in e(\mathbf{A})$ となり、逆に $e(\mathbf{A})$ の元はそのような形であるという意味での対応です。そうすると、今述べた積分表現は、各 $A \in \mathbf{A}$ に対して、 E^c -フィルターの族 $F(E^c)$ 上に確率 μ_A が定まって、任意の $B \in E$ に対して $A(B) = \mu_A(\gamma \in F(E^c); B^c \in \gamma)$ となることを意味します。

ここで前節の Kendall の設定に戻ってみましょう。“罫”の有限和全体である $\mathfrak{F}_+$ を、上で E として Choquet の結果を適用してみます。ここで、 WIF と $\mathfrak{F}_+^c$ -フィルターの全体 $F(\mathfrak{F}_+^c)$ が 1 対 1 に対応することに注意します。そのことを示すのに、 $D = \bigcup_{i=1}^n T_i$ に対して、 $f(D) = \max_{1 \leq i \leq n} f(T_i)$ として、 $f \in WIF$ を $\mathfrak{F}_+$ 上に拡張しておきます。そうすると、 $\gamma_f = \{T^c; T \in \mathfrak{F}_+, f(T)=0\}$ とおけば、 $\gamma_f \neq \emptyset$ ならば $\gamma_f \in F(\mathfrak{F}_+^c)$ であり、逆に $\gamma_f \in F(\mathfrak{F}_+^c)$ に対して、 $T^c \in \gamma$ の場合 $f(T)=1$ 、 $T^c \in \gamma$ のとき $f(T)=0$ とおくことによって f を導入すれば $f \in WIF$ となります。

さて、 $\psi = 1 - A$ として、Choquet の結果を書き直すと、 $T = \bigcup_{i=1}^n T_i \in \mathfrak{F}_+$ に対して、 $1 - \psi(T) = \mu_A(\gamma \in F(\mathfrak{F}_+^c); T^c \in \gamma)$ が成立し、したがって、 $\psi(T) = \mu_A(f \in WIF; f(T)=0) = \mu_A(f \in WIF; f(T_1)=\dots=f(T_n)=0)$ が成立することになります。このことは、Kendall の $P(WIF)=1$ となる確率 P の構成を、全く異なった観点から、Choquet は与えたことになっています。観点、手法の違いを越えて両者の結果はこの個所で一致するのですが、その先の展開が大きく分れてきます。そして、1 節で述べたように“特殊な場合”には一致するといった具合で、数学的には大変面白いと思います。以下では、Choquet の展開の 2 例を説明してみます。

E として $\mathbf{E}$ の部分集合全体 2^E の場合を考えます。この場合、 $E = E^c$ で、 E -フィルターを単にフィルターということにします。その場合の Choquet の結果は以下の通りです。 U を E での極大フィルターの全体とし、そこに適当な位相を導入すると、分離公理をみたすコンパクト空間となり、

E 上のフィルターは、 U での閉集合と 1 対 1 に対応する。したがって、 2^E 上に定義された正規無限位数の交代関数 A に対して、 U 上の閉集合全体上の確率 μ_A が定まって、任意の $B \subset \mathbf{E}$ に対し、 $A(B) = \mu_A(K: U \text{ での閉集合で } K \cap U_B \neq \emptyset)$ が成立する。ここで $U_B = \{\gamma \in U; B \in \gamma\}$ 。任意の E 上の加法族 E で定義された正規無限位数の交代関数は、 2^E 上のそれに拡張できるので、その意味では、正規無限位数の交代関数には、ランダム閉集合が対応しているといえます。論文の本筋と関係無いせいか Choquet は注意していませんが、上の場合の位相空間 U は、通常のものからするとかなり異様で、 E に離散位相を導入したときのストーン・チェックのコンパクト化になっています。この種の結果が応用面から意義があるのかどうかは疑問ですが、数学的には、無限位数の交代関数の定義域の集合族と、対応するランダム集合が実現される空間の関係については、もう少しつこんでみる必要がありそうです。定義域 E が乗法族かつ加法族の場合には、部分集合全体の場合と類似の結果が成立するであろうと、Choquet の予想めいた一行があるのですが、多少違った形で解決はできたと思いますが、意義がまだ掴めません。

Choquet のもう 1 例として、分離公理をみたす位相空間 $\mathbf{E}$ と、そこでのコンパクト集合全体となる E そして E 上の正規無限位数の交代関数 A の場合をあげます。 A が右連続、すなわち、任意のコンパクト集合 K と任意の $\delta > 0$ に対して、 $K \subset U$ となる開集合 U が、 $K \subset F \subset U$ となるコンパクト集合に対して $A(F) - A(K) < \delta$ となるように選べる時、 $\mathbf{E}$ 上の閉集合全体の上に確率 μ_A が、 $A(B) = \mu_A(K: K \text{ は } E \text{ での閉集合で } K \cap B \neq \emptyset)$ が全てのコンパクト集合 B について成立するように構成できることを示しています。この結果は、初期のランダム集合に関する重要な結果として特筆すべきものです。これは、Kendall による結果を用いても導けます。

4.

本稿で述べてきたことは、応用面からはあまり面白くなかったかも知れません。Choquet、Kendall に共通する主要概念は、無限位数の交代関数であり、それが応用面で素直に現れてくるとは考えにくい点もあると思います。しかし、Shafer の信頼理論[3]に於ては、正規無限位数の交代関数及びその変形は中心的な役割を果し、その後、ランダム集合、ファジィ集合と関連しながら、推測論的・情報理論的側面からの研究がいくつかなされていることを思うと、このような報告も全くの無駄ではないと考えた次第です。

最後に、確率過程との関連に少し触れてみます。たとえば、ブラウン運動 $X = (X_t, 0 \leq t < \infty)$ の1つの軌道 $\{X_t(\omega), 0 \leq t < \infty\}$ を集合とみれば、ランダム集合を構成し、ボレル集合の族 E に対して $A(B) = P(\omega; \{X_t(\omega), 0 \leq t < \infty\} \cap B \neq \emptyset)$ を考えれば、正規無限位数の交代関数となる。Choquet もこの種のことに気づいていて、純ポテンシャル論の立場からボレル集合に対して導入された平衡ポテンシャルは正規無限位数の交代関数であり、それに対応して自分の与えた確率測度がブラウン運動それに相当するであろうことに触れている。勿論、ブラウン運動等をランダム集合として捕えることは、時間発展による変化を見失うことになるし、ランダム閉集合として捕えると、2次元ブラウン運動の場合のように軌道が平面上稠密である場合は無意味になる。さて、 A として熱容量を選んだ場合、Choquet は、正規でない交代関数をも考察しているので、 $A(B) = \mu(K; \text{閉集合で } K \cap B \neq \emptyset)$ をみたすシグマ有限な測度 μ の構成を与

—— 著 者 紹 介 ——

神田 護 (かんだ まもる)

筑波大学数学系

京都大学理学部数学科卒、同大学院修士課程理学研究科修了後、大阪大助手、名古屋大講師、広島大助教授、筑波大助教授を経て、現教授。[専門]確率論 特にマルコフ過程論の研究

えている。 μ が確率でないので、Choquet はその確率論的意義づけについては疑問を持っていたようである。近年、主として、Gettoor と Fitzsimmons によって提唱された一般マルコフ過程の理論及びそれに関連した“容量”の定式化を含めたポテンシャル論の展開(それは壮大すぎて使い道が分らないという批判がある)は、Choquet の結果に新たな照明を投げかけたものと筆者は信じており、さらなる解明がなされるべきと思っている(が不勉強のため実行していない)。彼等のマルコフ過程の基礎となる測度は一般には確率ではなく、シグマ有限な測度である。この測度こそ、Choquet の構成した“容量”の積分表現に対応する測度の、より精密された実現である。

最後の部分はもう少ししていねいに述べるべきでしょうが、種々の概念を導入せねばならないので、この程度でお許し下さい。

参 考 文 献

- [1] Choquet, G. Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier.*, V, 131-296 (1954).
- [2] Kendall, D. G. Foundations of a theory of random sets. *Stochastic Geometry*, E. F. Harding and D. G. Kendall (eds.), 322-376.
- [3] Shafer, G. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1976.

(1998年9月28日 受付)

[問い合わせ先]

〒305-8571

つくば市天王台1-1-1

筑波大学数学系

神田 護

TEL : 0298-53-4396