論文

条件付因果可能性と その因果逆問題への適用[†]

山田 耕一*

因果関係の不確実性評価には条件付確率がよく用いられるが、条件に記述した事象以外が原因となって結果が生起する事象も含む評価であるため、人間が考える因果関係の不確実性とは異なることが指摘されている。Peng & Reggia は、「原因が生起しそれが原因となって結果が生起する事象」を因果事象、因果事象の条件付確率を条件付因果確率と名付け、これを因果逆問題、つまり複数の結果が生起した条件下で任意の複数の原因が生起している確率を求める問題に適用する方法を示した。

本稿ではこの条件付因果確率と意味的に類似する条件付因果可能性分布を提案し、従来の条件付可能性分布との関係について述べる。さらに、条件付可能性分布と条件付因果可能性分布を因果逆問題に適用する方法について検討を行い、条件付可能性分布を用いると不適切な結果が得られる場合のあることを指摘し、条件付因果可能性分布を用いるとその問題が解決されることを示す。

キーワード：条件付可能性分布、条件付因果可能性分布、因果関係、因果逆問題

1. はじめに

環境を理解するためには環境内に存在する対象間の関係理解が不可欠であるが、我々は、対象間の関係を事象や属性間の因果関係に読み替えることができ、はじめてその関係を理解したと感ずることが多い。このように、因果関係は環境を理解する際に用いられる普遍的な概念[1]、あるいは世界のあらゆる現象を理解する上での本質的な要素[2]などと言われ、定性推論[2]や確率ネットワーク[1]を始めとする知識情報処理において重要な知識の一つとなっている。しかし、実際に因果関係を利用する際には、対象問題に関する情報が不完全であったり、本質的に非決定的であるために、因果関係に不確実性を導入せざるをえないことが多い。

不確実な因果関係を表す時、古くから使われてきたのは条件付確率である。可能な原因の集合を U 、結果の集合を V とし、事象 $A \subseteq U$ が原因となって事象 $B \subseteq V$ が起こり得るとき、その因果関係の不確実性を条件付確率 $P(B|A)$ によって評価する。事象 B が観測されたときにその原因である A が起きた確率は、ベイズの定理を用いて次式で与えることができる。

$$P(A|B) = \alpha \cdot P(B|A) \cdot P(A) \quad (1)$$

ただし、 $\alpha = 1/P(B)$ である。観測された B の原因を推論するとき、 B を生起しえる原因 A が複数考えられるのであれば、事前確率 $P(A)$ と条件付確率 $P(B|A)$ か

ら上式によって $P(A|B)$ を求め、この値の高い順に可能な原因を並べることができる。

しかし、この方法は次の2つの問題を抱えている。一つは推論に用いる知識の量の問題である。知識として与えるべき条件付確率 $P(B|A)$ の数は、 $2^{|U|} \times 2^{|V|}$ という膨大な数となる。もう一つは、条件付確率は人間が思い浮かべる因果関係の不確実さと異なるという点である[3]。我々が $u_i \rightarrow v_j, u_i \in U, v_j \in V$ なる因果関係の確率というとき、それは「 u_i が起きたとき、 u_i が原因で v_j が起きる確率」を意味する。しかし $P(v_j|u_i)$ は明らかに、「 u_i が起きてはいるが u_i 以外の原因で v_j が起きる事象」も含む確率である。したがって、 v_j を起こしえる原因が皆無の場合を除き、すべての u_i に対して $P(v_j|u_i) \neq 0$ となり、因果関係の存在しない u_i と v_j にまで条件付確率を評価せねばならない。そのため Peng ら[3]は「 u_i が起きたとき、 u_i が原因で v_j が起きる確率」として条件付因果確率(conditional causal probability)を提案し、 $|U| \times |V|$ の条件付因果確率を用いて $P(B|A)$ を求め、これを(1)式に適用して $P(A|B)$ を求める方法を示した。

しかしこの Peng らの方法も、事前確率分布 $P(u_i)$ のわずかな違いが $P(A|B)$ に大きな影響を与えるため、原因集合 A の順序づけの手法としては問題のあることが山田ら[4][5]によって指摘されている。そして山田らは確率でなく、条件付可能性分布を用いて、結果 B が観測されたときに原因 A が起きている可能性を求める方法を提案した。可能性理論における可能性は純粋に順序づけのスケールと考えることができ[9]、また事前を与える可能性知識の多少の誤差に鈍感であるため、主観的な知識を用いて可能な原因を順序づけするには確率よりも扱いやすい。しかし、提案された方法は与えるべき知識量を $|U| \times |V|$ に押さえては

[†] Conditional Causal Possibility and Its Application to Inverse Problem of Causalities
Koichi YAMADA

* 長岡技術科学大学 計画・経営系
Department of Planning & Management Science, Nagao-
ka University of Technology

いるものの、条件付可能性分布を用いているため、条件付確率の場合と同様に「 u_i が起きてはいるが u_i 以外の原因で v_j が起きる事象」を含む可能性を知識としている。

本稿では条件付因果確率と意味的に類似する条件付因果可能性を提案し、条件付可能性との関係、および条件付因果可能性を用いて因果逆問題を解く方法について述べる。これ以降、第2章で Peng らによる因果事象について述べ、因果事象を用いた条件付因果可能性分布を提案する。第3章で条件付可能性分布と条件付因果可能性分布の関係を明らかにし、第4章で条件付因果可能性を用いた2種類の因果逆問題の解法について述べ、第5章で簡単な数値例で比較する。

2. 因果事象と条件付因果可能性

Peng らは因果事象(causation event)を次のように定義した[3]。

【定義2.1】

可能な原因の集合 U と可能な結果の集合 V があり、 $u_i \in U, (i=1, \dots, N)$ の生起が原因となって $v_j \in (j=1, \dots, M)$ が生起する。このとき、 $u_i \in U$ を原因事象、 $v_j \in V$ を結果事象と呼ぶ。また、以下の3式を満たす $v_j : u_i$ によって「 u_i が原因となって v_j が生起する事象」を表し、これを因果事象と呼ぶ。

$$v_j : u_i \leftrightarrow (v_j : u_i) \wedge u_i \leftrightarrow (v_j : u_i) \wedge v_j \quad (2)$$

$$\leftrightarrow (v_j : u_i) \wedge u_i \wedge v_j \quad (3)$$

$$\frac{v_j : u_i \wedge u_i \leftrightarrow u_i}{v_j : u_i \wedge v_j \leftrightarrow v_j} \quad (4)$$

ただし、 $\wedge, \leftrightarrow$ はそれぞれ論理積、同値を表し、 $\overline{u_i}, \overline{v_j}$ は u_i, v_j の否定を表す。

上式が示すように、 $v_j : u_i$ が真となるのは u_i と v_j が実際に起き、しかも v_j が u_i に引き起こされたときのみである。

さて、ここで各事象の可能性分布 $\pi(\cdot)$ を考える。ただし、本稿では可能性分布を U, V 上にではなく、各事象とその否定からなる集合上に定義する。

【定義2.2】

e を任意の事象とする。このとき、 e の可能性分布とは $\{e, \overline{e}\}$ 上に定義された可能性分布 $\{\pi(e), \pi(\overline{e})\}$ である。

また、条件付因果可能性分布を次のように定義する。

【定義2.3】

事象 u_i が与えられた条件下での $v_j : u_i$ の条件付可能性分布 $\{\pi(v_j : u_i | u_i), \pi(\overline{v_j : u_i} | u_i)\} = \{\pi_{ij}, \overline{\pi_{ij}}\}$ を条件付因果可能性分布と呼ぶ。

$\pi(v_j : u_i | u_i)$ は Peng らが提案した条件付因果確率

$P(v_j : u_i | u_i)$ に対応するもので、 u_i が起きた条件下で u_i が原因で v_j が起きる可能性を示す。一般に、我々が対象問題の専門家に質問して得る原因と結果間の因果の可能性は、条件付可能性ではなく、条件付因果可能性と解釈できる。

ところで、(2)式より、次式が成り立つ。

$$\pi(u_i \wedge v_j) \geq \pi(v_j : u_i) \quad (5)$$

ここで、 $u_i \wedge v_j$ の可能性 $\pi(u_i \wedge v_j)$ は結合可能性分布 $\pi(u_i, v_j) = \pi(v_j, u_i)$ に等しい。すると条件付可能性分布の性質から、一般に次の2つの式が成立する。

$$\pi(u_i \wedge v_j) = \pi(u_i) \wedge \pi(v_j | u_i) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \pi(v_j : u_i) &= \pi((v_j : u_i) \wedge u_i) \\ &= \pi(u_i) \wedge \pi(v_j : u_i | u_i) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、本稿では $\wedge (\vee)$ が事象に対して使われる場合は論理積(論理和)、可能性分布に対して使われる場合は $\min(\max)$ を表すものとする。(5), (6), (7)式より一般に次式が成立する。

$$\pi(v_j | u_i) \geq \pi(v_j : u_i | u_i) \quad (8)$$

次に、各因果事象について、次の文脈を定義する。

【定義2.4】

X が $v_j : u_i$ を除く任意の因果事象、 u_i を除く任意の原因事象、およびそれらの否定の連言であるとき、 X を $v_j : u_i$ の文脈という。

定義された文脈を用いて、可能性的に因果独立という概念を定義する。

【定義2.5】

X を $v_j : u_i$ の任意の文脈、 x_i, z_{ij} を $x_i \in \{u_i, \overline{u_i}\}, z_{ij} \in \{v_j : u_i, \overline{v_j : u_i}\}$ を満たす変数とする。このとき、次式が満たされれば z_{ij} は可能性的に因果独立という。

$$\pi(z_{ij} | x_i \wedge X) = \pi(z_{ij} | x_i) \quad (9)$$

z_{ij} が可能性的に因果独立であるとき、 u_i (あるいは $\overline{u_i}$) が生起した条件下で、 $v_j : u_i$ (あるいは $\overline{v_j : u_i}$) が起きる可能性は、他の原因や因果事象に影響されない。なお、可能性的な因果独立の概念は、次に示す可能性的に独立(possibilistically independent) [6] の概念とは異なることに注意されたい。

【定義2.6】

w_1, w_2 を $w_1 \in \{e_1, \overline{e_1}\}, w_2 \in \{e_2, \overline{e_2}\}$ を満たす変数とする。このとき、次式が満たされれば、 w_2 は w_1 に対して可能性的に独立である。

$$\pi(w_2 | w_1) = \pi(w_2) \quad (10)$$

つまり、事象 e_2 の生起/不生起の可能性は事象 e_1 の生起/不生起に影響されない。ここで、 x_i および z_{ij} に対して次のような仮定を置く。

【仮定2.1】

(1) 任意の $x_i \in \{u_i, \overline{u_i}\}$ は他の $x_{i'}$ に対して互いに可能性的に独立である。

(2) 任意の z_{ij} は可能性的に因果独立である。

上記仮定より、 $i \neq i'$ であるとき z_{ij} と $x_{i'}$ および z_{ij} と $z_{i'j'}$ は互いに可能性的に独立であることが示される。

$$\begin{aligned}\pi(z_{ij}|x_{i'}) &= \bigvee_{x_i \in \{u_i, \overline{u_i}\}} \pi(z_{ij} \wedge x_i | x_{i'}) \\ &= \bigvee_{x_i} \{ \pi(z_{ij} | x_i \wedge x_{i'}) \wedge \pi(x_i | x_{i'}) \} \\ &= \bigvee_{x_i} \{ \pi(z_{ij} | x_i) \wedge \pi(x_i) \} = \pi(z_{ij})\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\pi(z_{ij} | z_{i'j'}) &= \bigvee_{x_i} \pi(z_{ij} \wedge x_i | z_{i'j'}) \\ &= \bigvee_{x_i} \{ \pi(z_{ij} | x_i \wedge z_{i'j'}) \wedge \pi(x_i | z_{i'j'}) \} \\ &= \bigvee_{x_i} \{ \pi(z_{ij} | x_i) \wedge \pi(x_i) \} = \pi(z_{ij})\end{aligned}\quad (12)$$

(11), (12) 式における 2 つめの等号は (6) 式に基づく式変形である。なお、互いに可能性的に独立な変数は互いに非相互作用 (non-interactive) でもある [7]。つまり、 $\pi(z_{ij} \wedge x_{i'}) = \pi(z_{ij}) \wedge \pi(x_{i'})$ および $\pi(z_{ij} \wedge z_{i'j'}) = \pi(z_{ij}) \wedge \pi(z_{i'j'})$ が成立する。また、 Y を任意の x_i の連言とすると Y による条件付け時にも z_{ij} と $z_{i'j'}$ は非相互作用であることが示される。

$$\begin{aligned}\pi(z_{ij} \wedge z_{i'j'} | Y) &= \pi(z_{ij} | z_{i'j'} \wedge Y) \wedge \pi(z_{i'j'} | Y) \\ &= \bigvee_{x_i} \pi(z_{ij} \wedge x_i | z_{i'j'} \wedge Y) \wedge \pi(z_{i'j'} | Y) \\ &= \bigvee_{x_i} \{ \pi(z_{ij} | x_i \wedge z_{i'j'} \wedge Y) \wedge \pi(x_i | z_{i'j'} \wedge Y) \} \\ &\quad \wedge \pi(z_{i'j'} | Y) \\ &= \bigvee_{x_i} \{ \pi(z_{ij} | x_i \wedge Y) \wedge \pi(x_i | Y) \} \wedge \pi(z_{i'j'} | Y) \\ &= \pi(z_{ij} | Y) \wedge \pi(z_{i'j'} | Y)\end{aligned}\quad (13)$$

3. 条件付可能性分布との関係

x_i, y_j を、それぞれ $\{u_i, \overline{u_i}\}, \{v_j, \overline{v_j}\}$ の要素を値にとる変数とすると、 x_i に対する y_j の条件付可能性分布 $\pi(y_j | x_i)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\pi(y_j | x_i) &= \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, \\ x_{i+1}, \dots, x_N}} \pi\left(\frac{y_j \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{i-1}}{\wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_N} \middle| x_i\right) \\ &= \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, \\ x_{i+1}, \dots, x_N}} \left\{ \pi(y_j | x_1 \wedge \dots \wedge x_N) \wedge \right. \\ &\quad \left. \pi(x_1 \wedge \dots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_N) \right\}\end{aligned}\quad (14)$$

仮定2.1(1) より $x_i, (i=1, \dots, N)$ は互いに可能性的に独立であるから互いに非相互作用的となり、(14) 式内の $\pi(x_1 \wedge \dots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_N)$ は次式のようにな

る。

$$\begin{aligned}\pi(x_1 \wedge \dots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_N) \\ = \pi(x_1) \wedge \dots \wedge \pi(x_{i-1}) \wedge \pi(x_{i+1}) \wedge \dots \wedge \pi(x_N)\end{aligned}\quad (15)$$

以下、 $y_j = v_j$ と $y_j = \overline{v_j}$ の場合に分けて、条件付可能性分布 $\pi(y_j | x_i)$ を検討する。

(1) $y_j = v_j$ の場合

はじめに、次のように結合因果事象を定義する。

【定義3.1】 [3]

$v_j : (u_1 \wedge \dots \wedge u_r) = v_j : u_1 \wedge \dots \wedge u_r, r \leq N$ を結合因果事象 (joint-causation event) と呼び、次式で定義する。

$$v_j : u_1 \wedge \dots \wedge u_r \leftrightarrow \left[\bigvee_{i=1, r} (v_j : u_i) \right] \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_r \quad (16)$$

つまり、 $v_j : u_1 \wedge \dots \wedge u_r$ は $u_1, \dots, u_r$ が生起し、そのうちのいずれかが原因となって v_j を引き起こす事象である。ところで、 v_j は何れかの原因によって引き起こされるから、次式が成り立つ。

$$v_j \leftrightarrow \bigvee_i (v_j : u_i) \wedge u_i \leftrightarrow \bigvee_i (v_j : u_i) \quad (17)$$

したがって、

$$\begin{aligned}\pi(v_j | x_1 \wedge \dots \wedge x_N) &= \pi\left(\bigvee_i (v_j : u_i) \middle| x_1 \wedge \dots \wedge x_N\right) \\ &= \bigvee_i \pi(v_j : u_i | x_1 \wedge \dots \wedge x_N)\end{aligned}\quad (18)$$

可能性的に因果独立の仮定から、

$$\pi(v_j : u_i | x_1 \wedge \dots \wedge x_N) = \pi(v_j : u_i | x_i) \quad (19)$$

(14), (15), (18), (19) 式より以下の関係が導かれる。

$$\begin{aligned}\pi(v_j | x_i) \\ = \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, \\ x_{i+1}, \dots, x_N}} \left\{ \left(\bigwedge_{k \neq i} \pi(x_k) \right) \wedge \left(\bigvee_k \pi(v_j : u_k | x_k) \right) \right\}\end{aligned}\quad (20)$$

ただし、 $\pi(v_j : u_i | x_i)$ は次式で得られる。

$$\pi(v_j : u_i | x_i) = \begin{cases} \pi(v_j : u_i | u_i), & \text{if } x_i = u_i \\ \pi(v_j : u_i | \overline{u_i}) = 0, & \text{if } x_i = \overline{u_i} \end{cases} \quad (21)$$

(2) $y_j = \overline{v_j}$ の場合

まず、次式が成り立つ。

$$\overline{v_j} \leftrightarrow \bigvee_i (\overline{v_j} : u_i) \leftrightarrow \bigwedge_i (\overline{v_j} : u_i) \quad (22)$$

よって、

$$\pi(\overline{v_j} | x_1 \wedge \dots \wedge x_N) = \pi\left(\bigwedge_i (\overline{v_j} : u_i) \middle| x_1 \wedge \dots \wedge x_N\right) \quad (23)$$

ここで(13)式を利用すると,

$$\begin{aligned}\pi(\bigwedge_i \overline{(v_j : u_i)} | x_1 \wedge \cdots \wedge x_N) \\&= \bigwedge_i \pi(\overline{(v_j : u_i)} | x_1 \wedge \cdots \wedge x_N) \\&= \bigwedge_i \overline{(v_j : u_i | x_i)}\end{aligned}\quad (24)$$

よって, $\pi(\overline{(v_j : u_i)} | x_i)$ は次のように得られる.

$$\begin{aligned}\pi(\overline{(v_j : u_i)} | x_i) \\&= \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, \\ x_{i+1}, \dots, x_N}} \left\{ \left(\bigwedge_{k \neq i} \pi(x_k) \right) \wedge \left(\bigwedge_k \pi(\overline{(v_j : u_k)} | x_k) \right) \right\} \\&= \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, \\ x_{i+1}, \dots, x_N}} \left\{ \begin{aligned} &\bigwedge_{k \neq i} (\pi(x_k) \wedge \pi(\overline{(v_j : u_k)} | x_k)) \\ &\wedge \pi(\overline{(v_j : u_i)} | x_i) \end{aligned} \right\} \\&= \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, \\ x_{i+1}, \dots, x_N}} \left\{ \bigwedge_{k \neq i} (\pi(x_k) \wedge \pi(\overline{(v_j : u_k)} | x_k)) \right\} \wedge \pi(\overline{(v_j : u_i)} | x_i)\end{aligned}\quad (25)$$

ただし,

$$\begin{aligned}\pi(\overline{(v_j : u_i)} | x_i) \\&= \begin{cases} \pi(\overline{(v_j : u_i)} | u_i), & \text{if } x_i = u_i \\ \pi(\overline{(v_j : u_i)} | \overline{u_i}) = 1, & \text{if } x_i = \overline{u_i} \end{cases}\end{aligned}\quad (26)$$

(3) まとめ

以上を整理しよう. 事前知識として u_i (あるいは $\overline{u_i}$) が生起した条件下で因果事象 $v_j : u_i$ ($\overline{(v_j : u_i)}$) が起きる条件付可能性が, 次のように与えられているとする.

$$\begin{aligned}\pi(z_{ij} | x_i) \\&= \begin{cases} \pi(v_j : u_i | u_i) = \pi_{ij}, & \text{if } x_i = u_i, z_{ij} = v_j : u_i \\ \pi(v_j : u_i | u_i) = \pi_{ij}, & \text{if } x_i = u_i, z_{ij} = \overline{v_j : u_i} \\ \pi(v_j : u_i | \overline{u_i}) = 0, & \text{if } x_i = \overline{u_i}, z_{ij} = v_j : u_i \\ \pi(v_j : u_i | \overline{u_i}) = 1, & \text{if } x_i = \overline{u_i}, z_{ij} = \overline{v_j : u_i} \end{cases}\end{aligned}\quad (27)$$

このとき, $\pi(y_j | x_i)$ は次のように求めることができる.

$$\begin{aligned}\pi(y_j | x_i) = \\&\begin{cases} \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, \\ x_{i+1}, \dots, x_N}} \left\{ \left(\bigwedge_{k \neq i} \pi(x_k) \right) \wedge \left(\bigvee_k \pi(v_j : u_k | x_k) \right) \right\}, \\ \hspace{15em} \text{if } y_j = v_j \\ \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, \\ x_{i+1}, \dots, x_N}} \left\{ \bigwedge_{k \neq i} (\pi(x_k) \wedge \pi(\overline{(v_j : u_k)} | x_k)) \right\} \\ \hspace{15em} \wedge \pi(\overline{(v_j : u_i)} | x_i), & \text{if } y_j = \overline{v_j} \end{cases}\end{aligned}\quad (28)$$

なお, 一般に可能性と必然性は双対の概念であり, u_i の必然性 $\eta(u_i)$ は可能性を用いて次のように求めることができる.

$$\eta(u_i) = 1 - \pi(\overline{u_i}) \quad (29)$$

ただし, $\eta(u_i) \leq \pi(u_i)$. そこで, 条件付因果必然性分布を次のように定義する.

【定義3.2】

条件付因果可能性分布 $\pi(z_{ij} | x_i)$ が与えられているとき, 次式で与えられる $\eta(z_{ij} | x_i)$ を条件付因果必然性分布と呼ぶ.

$$\eta(z_{ij} | x_i) = \begin{cases} 1 - \pi(\overline{(v_j : u_i)} | u_i) = 1 - \pi_{ij} = \eta_{ij}, & \text{if } x_i = u_i, z_{ij} = v_j : u_i \\ 1 - \pi(\overline{(v_j : u_i)} | u_i) = 1 - \pi_{ij} = \overline{\eta_{ij}}, & \text{if } x_i = u_i, z_{ij} = \overline{v_j : u_i} \\ 1 - \pi(\overline{(v_j : u_i)} | \overline{u_i}) = 0, & \text{if } x_i = \overline{u_i}, z_{ij} = v_j : u_i \\ 1 - \pi(\overline{(v_j : u_i)} | \overline{u_i}) = 1, & \text{if } x_i = \overline{u_i}, z_{ij} = \overline{v_j : u_i} \end{cases} \quad (30)$$

ただし, $\pi_{ij} \geq \eta_{ij}$ を満たさねばならない.

4. 因果逆問題への適用

文献[4]で提案された条件付可能性分布を用いた診断問題に, (28)式で求めた条件付可能性分布を適用する方法と, 条件付因果可能性分布を直接に用いる方法について述べる. 診断問題は次のように定義される.

【診断問題】

$U = \{u_i\}$, ($i=1, \dots, N$) を可能な原因の集合, $V = \{v_j\}$, ($j=1, \dots, M$) を可能な結果の集合とする. 今, 結果 $Q^+ = \{v_1, \dots, v_m\}$, $m \leq M$ が生起し, $Q^- = \{v_{m+1}, \dots, v_L\}$, $m < L \leq M$ が生起せず, 残りの $V - (Q^+ \cup Q^-)$ については不明とする. このとき, Q^+ と Q^- が与えられた条件下で U の任意の部分集合 $P = \{u_1, \dots, u_n\}$, $n \leq N$ が原因である可能性を求めよ. ただし, 可能性は

$$\text{Pos}(P | Q^+, Q^-) = \pi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n \wedge \overline{u_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \overline{u_N} | v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \wedge \overline{v_{m+1}} \wedge \cdots \wedge \overline{v_L}) \quad (31)$$

で定義され, 事前知識として $\{u_i, \overline{u_i}\}$ 上の可能性分布 $\pi(x_i)$, 条件付因果可能性 $\pi(v_j : u_i | u_i) = \pi_{ij}$, 条件付因果必然性 $\eta(v_j : u_i | u_i) = \eta_{ij} = 1 - \pi_{ij} \leq \pi_{ij}$ が与えられる.

4.1 条件付可能性分布に変換して用いる場合

変数 $x_i \in \{u_i, \overline{u_i}\}$, $y_j \in \{v_j, \overline{v_j}\}$ を用いると (31) 式は,

$$\text{Pos}(P | Q^+, Q^-) = \pi(x_1 \wedge \cdots \wedge x_N | y_1 \wedge \cdots \wedge y_L) \quad (32)$$

x_i は互いに非相互作用的であるから上式は次のように分解できる.

$$\text{Pos}(P | Q^+, Q^-) = \bigwedge_{i=1, N} \pi(x_i | y_1 \wedge \cdots \wedge y_L) \quad (33)$$

ここで, $\pi(y_j | x_i)$ が含意の可能性を表すと考え, 含意と

して次に示すゲーデルの含意[8]を用いる.

$$\pi(y_j|x_i) = \begin{cases} 1.0, & \text{if } \pi(x_i) \leq \pi(y_j) \\ \pi(y_j), & \text{if } \pi(x_i) > \pi(y_j) \end{cases} \quad (34)$$

すると、確率におけるベイズの定理と同様に以下の式が成立することが示されている[4].

$$\pi(y_j)\pi(x_i|y_j) = \pi(x_i)\pi(y_j|x_i) \quad (35)$$

さらに、ゲーデルの含意に基づくと任意の y_j と $y_{j'}$ も非相互作用的事実であることが示されるため[4], $\pi(x_i|y_1, \dots, y_L)$ は次のように得られる.

$$\begin{aligned} \pi(x_i|y_1 \wedge \dots \wedge y_L) \\ = \frac{\pi(x_i)(\pi(y_1|x_i) \wedge \dots \wedge \pi(y_L|x_i))}{\pi(y_1) \wedge \dots \wedge \pi(y_L)} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\pi(y_j) = \bigvee_{\substack{i=1, \dots, N \\ x_i \in \{u_i, \bar{u}_i\}}} (\pi(x_i) \wedge \pi(y_j|x_i)) \quad (37)$$

したがって、(28)式で得られる $\pi(y_j|x_i)$ を用いて $Pos(P|Q^+, Q^-)$ を次式で求めることができる.

$$Pos(P|Q^+, Q^-) = \frac{\bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(x_i) \pi(y_j|x_i)}{\pi(y_1) \wedge \dots \wedge \pi(y_L)} \quad (38)$$

なお、(27), (28), (37)式より、以下の仮定をすると、任意の j において $\pi(y_j) > 0$ であることが保証される(証明は付録1).

【仮定4.1】

$$1) \quad \forall i, \forall x_i \in \{u_i, \bar{u}_i\}, \pi(x_i) > 0 \quad (39)$$

$$2) \quad \forall j, \exists i; \pi(v_j|u_i|u_i) = \pi_{ij} \neq 0 \quad (40)$$

$$3) \quad \forall j, \exists i; \eta(v_j|u_i|u_i) = 1 - \pi_{ij} \neq 1 \quad (41)$$

1)はすべての原因 u_i は生起/不生起のどちらも可能なことを、2)はすべての結果 v_j にはそれを起こし得る原因が少なくとも一つ存在することを、そして3)はすべての結果 v_j に対し、それを必然的には起こさない原因が少なくとも一つ存在することを示す.

4.2 条件付因果可能性分布を直接用いる場合

まず、次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \pi(y_1 \wedge \dots \wedge y_L) \wedge \pi(x_1 \wedge \dots \wedge x_N | y_1 \wedge \dots \wedge y_L) \\ = \pi(x_1 \wedge \dots \wedge x_N) \wedge \pi(y_1 \wedge \dots \wedge y_L | x_1 \wedge \dots \wedge x_N) \end{aligned} \quad (42)$$

x_i, y_j は非相互作用的事実であるから、(32)式を考慮すると、

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j) \wedge Pos(P|Q^+, Q^-) \\ = \bigwedge_{i=1, \dots, N} \pi(x_i) \wedge \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j|x_i \wedge \dots \wedge x_N) \end{aligned} \quad (43)$$

上式より明らかに、次式が成立する.

$$\bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j) \geq \bigwedge_{i=1, \dots, N} \pi(x_i) \wedge \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j|x_i \wedge \dots \wedge x_N) \quad (44)$$

よって、 $Pos(P|Q^+, Q^-)$ は次式で得られる.

$$Pos(P|Q^+, Q^-) = \begin{cases} \bigwedge_{i=1, \dots, N} \pi(x_i) \wedge \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j|x_i \wedge \dots \wedge x_N), \\ \text{if } \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j) > \bigwedge_{i=1, \dots, N} \pi(x_i) \wedge \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j|x_i \wedge \dots \wedge x_N) \\ \left[\bigwedge_{i=1, \dots, N} \pi(x_i) \wedge \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j|x_i \wedge \dots \wedge x_N), 1 \right], \\ \text{if } \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j) = \bigwedge_{i=1, \dots, N} \pi(x_i) \wedge \bigwedge_{j=1, \dots, L} \pi(y_j|x_i \wedge \dots \wedge x_N) \end{cases} \quad (45)$$

ただし、 $\pi(y_j|x_i \wedge \dots \wedge x_N)$ は、(18), (19)式および(23), (24)式より次のように得られる.

$$\begin{aligned} \pi(y_j|x_i \wedge \dots \wedge x_N) \\ = \begin{cases} \bigvee_{i=1, \dots, N} \pi(v_j|u_i|x_i), & \text{if } y_j = v_j \\ \bigwedge_{i=1, \dots, N} \pi(\bar{v}_j|\bar{u}_i|x_i), & \text{if } y_j = \bar{v}_j \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

なお、(45)式において可能性が区間で得られる場合は、その上限値を可能性分布値として採用すればよい.

5. 数値例による比較と考察

簡単な数値例によって、(38)式により $Pos(P|Q^+, Q^-)$ を求める場合と、(45)式により求める場合の比較をしよう. 図1のように可能な原因と結果が3つずつあり、それぞれの事前可能性分布 $\{\pi_i, \bar{\pi}_i\}$ と条件付因果可能性 $\pi(v_j|u_i|u_i) = \pi_{ij}$ および条件付因果必然性 $\eta(v_j|u_i|u_i) = 1 - \pi_{ij}$ が与えられる. なお、可能性理論においては通常 $\pi_{ij} \vee \bar{\pi}_{ij} = 1$ を制約とするが、本数値例ではこれにこだわらない.

ここで、図に示す3種類の観測結果(Case-I, II, III)が得られたとき、任意の $P \subseteq \{u_1, u_2, u_3\}$ が起きている可能性を求める. 原因 u_i の事前可能性分布は、起きていないのが普通と考え、 $\pi(\bar{u}_i) = 1, (i=1, 2, 3)$ とする. $\pi(u_i)$ については、最大値を1.0にする場合(Case-A)と0.1(Case-B)にする場合を考える. Case-Bは、平常時において $\pi(u_i)$ が $\pi(\bar{u}_i)$ よりはるかに小さいことを考慮した設定である. 一方、異常診断を行う時は既に何らかの症状が発見されており U 内の原因の存在を前提にすることが多い. Case-Aはこれを考慮した設定であり、こちらの方が現実の異常診断には適切な設定と思われる. なお、(45)式で $Pos(P|Q^+, Q^-)$ を求める場合には、 $\pi(u_i)$ が $\pi(v_j|u_i|u_i)$ よりあまりに小さいと、 $Pos(P|Q^+, Q^-)$ が P に含まれる原因の最も小さい $\pi(u_i)$ で決まってしまう. したがってこれ以降、(45)式

事前可能性分布				$\pi(v_j:u_i u_i) / \eta(v_j:u_i u_i)$	観測結果		
Case-A		Case-B			Case-I	Case-II	Case-III
π_i	$\bar{\pi}_i$	π_i	$\bar{\pi}_i$				
0.8	1.0	0.06	1.0		生起	生起	生起
0.9	1.0	0.08	1.0		不明	不明	不明
1.0	1.0	0.10	1.0		生起	不明	不生起

図1 数値例

に Case-B を適用することは考慮しない。

まず, (28)式, (30)式を用いて $\pi(y_j|x_i)$ を求めると, 表1 (a), (b) のようになる. Case-A と B で著しく違う点は, $\pi(v_j|\bar{u}_i)$ と, $\pi(v_j:u_i|u_i)=0$ となる u_i, v_j における $\pi(v_j|u_i)$ である. Case-A の場合は, u_i 以外の原因によって v_j が引き起こされる可能性が高くなるため, 値が大きくなっている。

次に, 得られた $\pi(y_j|x_i)$ を (38)式に適用して求めた $Pos(P|Q^+, Q^-)$, および (45)式で計算した Case-A の $Pos(P|Q^+, Q^-)$ を表2 (a), (b) に示す. Case-A において可能性の高い順に P を並べると, Case- I, II, III とも, 多少のばらつきと一部の違いを除き, (38)式の結果と (45)式の結果はほぼ同じである. Case- I と II では $\{u_1\}$ と $\{u_2\}$ ((38)式の場合は $\{u_3\}$ も) の可能性が高く, それらの和集合として得られる P も高い. Case-III では v_3 が不生起であることから v_3 に対する条件付因果必然性が 0.8 と高い u_1 を含む P の可能性が低くなり, 同様に u_2 を含む P の可能性もやや低くなっている。

(38)式と (45)式の結果で大きく異なるのは P が空集合である場合と, Case- I における $\{u_3\}$ である. (17)式からわかるように, 本稿では結果 v_j は単独では生起せず, 何れかの原因に引き起こされると想定している. u_i が一つも起きていなければ, (18), (19), (21)式から,

$$\pi(v_j|\bar{u}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{u}_N) = 0 \quad (47)$$

である. 前述のように y_j も互いに非相互作用的であるから,

$$\begin{aligned} \pi(y_1 \wedge \cdots \wedge y_L | \bar{u}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{u}_N) \\ = \bigwedge_{j=1, L} \pi(y_j | \bar{u}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{u}_N) \end{aligned} \quad (48)$$

となり, すべての i で $x_i = \bar{u}_i$ のとき $y_j = v_j$ となる j が一つでも存在すると可能性は 0 である. $P = \{u_3\}$ の場合

も, u_3 だけでは v_1 と v_3 の両方をおこさないため可能性は 0 となるべきである. にもかかわらず, (38)式で P が空集合であるときの可能性が 0 とならないのは, (14)式によって, すべての u_i に対する条件付可能性分布を一つの u_i に対する条件付可能性分布に集約しているからである. これによって (47)式の知識が失われ, また前述の理由から $\pi(v_j|\bar{u}_i)$ の値も大きいため, P が空である場合の可能性が高くなる. Case- I における $\{u_3\}$ の可能性が高いのも同様の理由による。

これに対し Case-B では, Case- I における $P = \{u_3\}$ の可能性が低い. これは $\pi(u_i)$ が小さいために $\pi(v_3|\bar{u}_3)$ も小さく押さえられたからであるが, (38)式の性質から u_3 を含むすべての P の可能性も小さくなる問題を新たに生む. これは $\{u_1, u_3\}$ や $\{u_2, u_3\}$ が冗長であることとは関係がなく, たとえば図1から u_1 と v_1 間の因果関係を取り除いたときでも $\{u_1, u_3\}$ の可能性は低くなる. また, P が空集合である場合に大きな可能性がで

表1 条件付因果可能性から求めた条件付可能性分布

(a) Case A					(b) Case B				
		v_1, v_2, v_3					v_1, v_2, v_3		
		$\pi(v_j u_i)$	$\pi(v_j \bar{u}_i)$	$\eta(v_j:u_i u_i)$			$\pi(v_j u_i)$	$\pi(v_j \bar{u}_i)$	$\eta(v_j:u_i u_i)$
u_1	$\pi(v_1 u_1)$	1.0	0.4	0.9	u_1	$\pi(v_1 u_1)$	1.0	0.08	0.9
	$\pi(v_2 u_1)$	0.7	0.4	0.8		$\pi(v_2 u_1)$	0.1	0.08	0.08
	$\pi(v_3 u_1)$	0.5	1.0	0.2		$\pi(v_3 u_1)$	0.5	1.0	0.2
	$\pi(v_j \bar{u}_1)$	1.0	1.0	1.0		$\pi(v_j \bar{u}_1)$	1.0	1.0	1.0
u_2	$\pi(v_1 u_2)$	0.8	0.4	0.8	u_2	$\pi(v_1 u_2)$	0.6	0.4	0.8
	$\pi(v_2 u_2)$	0.8	0.0	0.8		$\pi(v_2 u_2)$	0.1	0.0	0.06
	$\pi(v_3 u_2)$	1.0	1.0	0.6		$\pi(v_3 u_2)$	1.0	1.0	0.6
	$\pi(v_j \bar{u}_2)$	1.0	1.0	1.0		$\pi(v_j \bar{u}_2)$	1.0	1.0	1.0
u_3	$\pi(v_1 u_3)$	0.8	0.4	0.8	u_3	$\pi(v_1 u_3)$	0.7	0.08	0.08
	$\pi(v_2 u_3)$	0.8	0.4	0.8		$\pi(v_2 u_3)$	0.08	0.08	0.08
	$\pi(v_3 u_3)$	0.5	1.0	1.0		$\pi(v_3 u_3)$	0.5	1.0	1.0
	$\pi(v_j \bar{u}_3)$	1.0	1.0	1.0		$\pi(v_j \bar{u}_3)$	1.0	1.0	1.0

表2 数値例から求めた $Pos(P|Q^+, Q^-)$

(a) Case Aの場合							(b) Case B, (38)式による場合			
P	(38)式による場合			(45)式による場合			P	Case I	Case II	Case III
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III				
$\{u_1, u_2, u_3\}$	0.9	0.9	0.2	1.0	1.0	0.2	$\{u_1, u_2, u_3\}$	0.1	0.48	0.12
$\{u_1, u_2\}$	0.9	0.9	0.2	1.0	1.0	0.2	$\{u_1, u_2\}$	0.6	0.48	0.12
$\{u_1, u_3\}$	0.9	1.0	0.2	1.0	1.0	0.2	$\{u_1, u_3\}$	0.1	0.6	0.12
$\{u_2, u_3\}$	0.88	0.88	0.68	0.7	0.7	0.6	$\{u_2, u_3\}$	0.1	0.48	0.48
$\{u_1\}$	0.9	1.0	0.2	1.0	1.0	0.2	$\{u_1\}$	0.68	0.6	0.12
$\{u_2\}$	0.88	0.88	0.68	0.6	0.6	0.6	$\{u_2\}$	0.6	0.48	0.48
$\{u_3\}$	0.88	0.88	0.88	0.0	0.7	0.7	$\{u_3\}$	0.1	0.7	0.7
$\{\}$	0.88	0.88	0.88	0.0	0.0	0.0	$\{\}$	0.75	0.8	0.8

る問題については、Case-Bでも解決されていない。

以上から、条件付可能性分布に変換した後(38)式を適用する方法は、複数の原因の生起と不生起の相互作用を扱うことができず、計算された可能性の一部に不適切な場合のあることが明らかになった。これは、条件付因果可能性分布から条件付可能性分布を求めたことに原因があるのではなく、一つの原因のみに対する条件付可能性分布を知識とすることに原因がある。しかし、すべての u_i に対する条件付可能性分布を知識として(45)式を用いると、必要な知識量は $2^{|U|} \times |V|$ にもなる。これに対し、条件付因果可能性分布を知識として(45)、(46)式を用いる方法は、人間が考える因果関係の不確実性に適合することに加え、知識量も $|U| \times |V| \times 2$ でよく、より現実的な方法といえる。なお、文献[4]は条件付可能性分布を用いた因果逆問題の解法を提案しているが、この方法は $\pi(y_j|x_i), x_i \in \{u_i, \bar{u}_i\}, y_j \in \{v_j, \bar{v}_j\}$ を、 $U \times V$ 上の条件付可能性分布、 U 上の事前可能性分布、および想定する P から計算する。つまり、 P 毎に異なる $\pi(y_j|x_i)$ を使い、これによって一つの原因のみに対する条件付可能性分布を使うことに起因する問題を回避している。

最後に、不確実性として可能性を用いると、2つの原因集合 P_1 と P_2 が高い可能性を持つ場合、冗長な原因 $P_1 \cup P_2$ も高い可能性を持つことになる。しかし、冗長な集合が不必要であればこれらを削除することは容易であるため、本質的な問題ではない。

6. おわりに

人間が知識として持つ因果関係に関する不確実性に適合する条件付因果可能性分布を提案し、従来の条件付可能性分布との関係を明らかにした。さらに、これを診断を始めとする因果逆問題に適用する方法について検討し、従来の条件付可能性分布を用いる方法の問題点を指摘し、条件付因果可能性分布を用いる方法が適切であることを示した。

参考文献

- [1] J. Pearl: *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*, Morgan Kaufmann Publishers, Inc. (1988)
- [2] Y. Iwasaki: Real-World Applications of Qualitative Reasoning, *IEEE Intelligent Systems*, Vol.12, No.3, pp.16-21 (1997)
- [3] Y. Peng, J. A. Reggia: *Abductive Inference Models for Diagnostic Problem-Solving*, Springer-Verlag (1990)
- [4] 山田耕一, 本田光弘: 条件付き可能性分布を用いた異常診断手法, 日本ファジィ学会誌, Vol.8, No.3, pp.567-575 (1996)
- [5] K. Yamada, M. Honda: A Method of Diagnosis Using Possibility Theory, *The Ninth International Conference on Industrial & Engineering Applications of Artificial Intelligence & Expert Systems (IEA-AIE 96)*, pp.149-154, Fukuoka (1996)
- [6] E. Hisdal: Conditional Possibilities Independence and non-interaction, *Fuzzy Sets and Systems* 1, pp. 283-297 (1978)
- [7] L. A. Zadeh: Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 1, pp.3-28 (1978)
- [8] M. Togai: A fuzzy inverse relation based on Gödelian logic and its applications, *Fuzzy Sets and Systems* 17, pp.211-219 (1985)
- [9] D. Dubois, H. Prade: A Survey of Belief Revision and Updating Rules in Various Uncertainty Models, *Int. J. Intelligent Systems* 9, pp.61-100 (1994)

【付録1】

(39), (40), (41)式が満たされれば, $\forall (j, y_j), \pi(y_j) > 0$ であることを示す。

まず(37), (39)式より, $\forall j, \exists (i, x_i); \pi(y_j|x_i) > 0$ であれば $\forall (j, y_j), \pi(y_j) > 0$ であることがわかる。以下, $y_j = v_j$ と $y_j = \bar{v}_j$ を分けて考えることにすると, (28)式より(40)式が満たされれば $\forall j, \exists (i, x_i); \pi(v_j|x_i) > 0$ であることは明らか。 $y_j = \bar{v}_j$ の場合は, (41)式が満たされると $\forall j, \exists i; \pi(v_j|\bar{u}_i|u_i) = \pi_{ij} \neq 0$ 。よって(28)式より $\forall j, \exists (i, x_i); \pi(\bar{v}_j|x_i) > 0$ であることは明らか。(証明終)

(1997年10月22日 受 付)
 (1998年 9月10日 再 受 付)
 (1998年11月 5日 再々受付)

[問い合わせ先]

〒940-2188

長岡市上富岡町1603-1

長岡技術科学大学 計画・経営系

山田 耕一

TEL: 0258-47-9359

FAX: 0258-47-9350

E-mail: yamada@kjs.nagaokaut.ac.jp

— 著 者 紹 介 —

山田 耕一 (やまだ こういち)

長岡技術科学大学 計画・経営系

1978年 東京工業大学工学部制御工学科卒業. 1980年 同大学院総合理工学研究科システム科学専攻修士課程修了. 三菱総合研究所, 日本 DEC, 山武ハネウエルを経て, 1996年より長岡技術科学大学計画・経営系助教授. 1991-1993年国際ファジィ工学研究所, 博士(工学). 日本ファジィ学会, 情報処理学会, 人工知能学会, 計測自動制御学会, 電気学会, IEEE 各会員.

Conditional Causal Possibility and Its Application to Inverse Problem of Causalities

by

Koichi YAMADA

Abstract :

Conditional probabilities are widely used, when we evaluate uncertainty of causalities. However, Peng & Reggia designate that conditional probability is different from the uncertainty of causation that we have in mind, since it is a probabilistic evaluation including events that the effect happens to be caused by another cause, not by the cause given as the condition. Thus they proposed causation event that the cause *actually causes* the effect, and conditional causal probability which is a conditional probability of causation event given the cause. They also applied them to an inverse problem of causalities, which is a problem to calculate the posterior probability that a given plural causes are arising, when a set of effects are observed.

This paper proposes conditional causal possibility (CCP) which has similar semantics to the conditional causal probability, and describes the relation between CCP and conditional possibility (CP). It also studies methods to apply CP and CCP to an inverse problem of causalities, and indicates that improper cases may appear when CP is used and that they can be avoided if CCP is used instead.

Keywords : Conditional Possibility Distribution, Conditional Causal Possibility Distribution, Causality, Inverse Problem of Causalities

Contact Address : **Koichi YAMADA***Department of Planning & Management Science,**Nagaoka University of Technology**1603-1 Kami-tomioka, Nagaoka, 940-2188, JAPAN*

TEL : 0258-47-9359

FAX : 0258-47-9350

E-mail : yamada@kjs.nagaokaut.ac.jp