論文

ファジィ入出力データによる可能性 DEA[†]

乾口 雅弘* 谷野 哲三*

本研究では、ファジィ入出力データが与えられた場合の DEA 分析手法が議論される。通常の DEA をファジィ入出力データの場合へ拡張するいくつかの方法が考えられるが、ここでは、自然な2種類の方法が取り上げられる。第1の方法として、DEA で解かれる線形計画問題を入出力データから D 効率値への写像とみなし、拡張原理を適用して、ファジィ入出力データからファジィ D 効率値を求める方法が提案される。第2の方法として、可能性理論に基づいた効率性分析法が提案される。これにより、可能的な効率性と必然的な効率性が定義される。DMU が与えられた度合以上で可能的に効率、必然的に効率となるための改善案が議論される。さらに、第1の方法と第2の方法の関係が調らべられる。最後に、提案された解析手法を説明するため、簡単な数値例が与えられる。

キーワード：DEA, ファジィ入出力データ, 拡張原理, 可能性理論, 線形計画法, 効率性

1. はじめに

本研究は、DEA (Data Envelopment Analysis; 包絡分析法) [1][2]へのファジィ理論の導入を試みた文献 [3][4]に動機付けられた。これらは、いずれも与えられたファジィ入出力データに DEA を適用したものであり、DEA における数値計画問題をファジィ入出力データを扱えるように、ファジィ数値計画法 [5]の考え方を導入した先駆的な研究である。

これらのアプローチでは、D 効率値 [1][2]を求める分数計画問題や線形計画問題の制約条件の取り扱いに、疑問が生じる。たとえば、入力加重和が1となる制約条件を考えると、ファジィ入力データの加重和は常にファジィ数となるので、これを実数1とすることができない。その結果、得られた解(結果)を代入すると、D 効率値のファジィ数に1を超える部分が存在する。DMU (Decision Making Unit: 意思決定者)の効率値が1以下という条件を、最大値を1となるように D 効率値を正規化するための条件と考えると、適当に正規化条件を変更しただけと捕らえられることもできるが、1にどの程度近いかにより効率性の度合を求めている通常の DEA の観点からすれば、1を超える部分の存在は奇異に感じられる。

また、文献 [3][4]では、効率性に関する定義はなく、主としてファジィ入出力データが与えられた場合の D 効率値の定義と算出について議論されている。もちろん、これらのアプローチにおいて提案された D 効率値等を用いて、効率性を定義することも可能ではあるが、

その効率性の意味を理解することは少しやっかいなものとなろう。

本研究では、文献 [3][4]より自然な方法で、ファジィ入出力データのもとでの D 効率値のファジィ集合を求めるとともに、DEA における効率性を可能性理論を用いて自然に拡張する。まず、DEA における線形計画問題が入出力データから D 効率値への写像とみなされ、拡張原理に基づき、ファジィ入出力データに対する D 効率値のファジィ集合が定められる(注1)。これにより、1を超える部分が存在しない D 効率値のファジィ集合が求められる。次に、DMU が効率的であることを一つの事象と考え、それを DMU が効率的となるファジィ入出力データの集合により定義する。この事象の可能性測度と必然性測度を算出することにより、効率的である可能性の度合と必然性の度合が定められる。任意の DMU が与えられた度合以上の可能性で効率的であるか否か、同様に、与えられた度合以上の必然性で効率的であるか否かを判定する方法、および、効率的でない場合には効率的となるための改善案を求める方法が議論される。さらに、上述の二つのアプローチの橋渡しとして、D 効率値のファジィ集合と効率的である可能性、必然性の度合との関係が論じられる。最後に、簡単な数値例を用いて、提案された解析方法が説明される。

2. 包絡分析法：DEA

事業体の経営効率は、投入した資源から、どれだけの産出物(便益, サービスを含む)を生成したかをみることににより、評価することができる。たとえば、比の形で、産出/投入を効率とみなすことができる。一般に、投入する資源には、資金、人手、物資など種々のものがあり、産出物にも、生産量、利益、サービス量

[†] Possibilistic DEA with Fuzzy Input-Output Data
Masahiro INUIGUCHI and Tetsuzo TANINO

* 大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻
Graduate School of Engineering, Osaka University

など、複数のものが存在する。このように、事業体は、多入力多出力システムとみることができる。

1入力、1出力の場合、入力量、出力量がともに実数値で表現されれば、効率値、出力量/入力量は容易に算出することができる。しかし、多入力、多出力の場合、すべての入力(出力)を通約性のある尺度を用いて一つの実数値で表現することは容易でない場合が多い。このような場合、一つの事業体における絶対的な評価は困難となる。包絡分析法(DEA)では、同種の入力と出力をもつ他の複数の事業体との相対比較により、事業体の効率値を算出し、経営効率性を評価する。

分析の対象とする事業体を DMU (Decision Making Unit: 意思決定者) と呼ぶ。\$n\$ 個の DMU に関する \$m\$ 個の入力データを \$m \times n\$ 行列 \$X = (x_{ik})\$、\$s\$ 個の出力データを \$s \times n\$ 行列 \$Y = (y_{jk})\$ とする。このとき、\$K\$ 番目の DMU、すなわち、\$DMU_K\$ の効率値 \$\theta_K\$ および効率的な活動となるために除去すべき入力の過剰量 \$\mathbf{u}^K\$ と出力の不足量 \$\mathbf{v}^K\$ は、次の2段階線形計画問題により求められる[1]。

$$\begin{aligned} & \text{lex-min} \left(\theta_K, -\sum_{i=1}^m u_i^K - \sum_{j=1}^s v_j^K \right) \\ & \text{subject to } \theta_K x_{iK} = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} + u_i^K, \\ & \quad y_{jK} = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} - v_j^K, \\ & \quad \theta_K \geq 0, \lambda_k \geq 0, u_i^K \geq 0, v_j^K \geq 0, \\ & \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, s, \\ & \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、lex-min は辞書式最小化を意味する。また、\$\mathbf{u}^K = (u_1^K, u_2^K, \dots, u_m^K)\$、\$\mathbf{v}^K = (v_1^K, v_2^K, \dots, v_s^K)\$ とする。問題(1)の最適解は与えられた入出力データ \$(X, Y)\$ に依存するので、\$(\hat{\theta}_K(X, Y), \hat{\lambda}(X, Y), \hat{\mathbf{u}}^K(X, Y), \hat{\mathbf{v}}^K(X, Y))\$ と記す。ただし、入出力データ \$(X, Y)\$ は正値をとるもの、すなわち、\$X > O_m^n, Y > O_s^n\$ と仮定する。ここで、\$O_m^n\$ は \$m \times n\$ の零行列である。以後、簡便のため、\$X, Y\$ の第 \$k\$ 列を \$X_k, Y_k\$ と表し、入力と出力の対、\$(X_k, Y_k)\$ を活動と呼ぶ。

D 効率性および効率性は次のように定義される。

定義1 \$\hat{\theta}_K(X, Y) = 1\$ であるとき、\$DMU_K\$ は D 効率的であるという。また、\$\hat{\theta}_K(X, Y)\$ を \$DMU_K\$ の D 効率値という。

定義2 \$\hat{\theta}_K(X, Y) = 1\$ かつ \$\hat{\mathbf{u}}^K(X, Y) = \mathbf{0}\$、\$\hat{\mathbf{v}}^K(X, Y) = \mathbf{0}\$ であるとき、\$DMU_K\$ は効率的であるという。それ以外の場合、非効率的であるという。

次の定理は、\$DMU_K\$ の活動 \$(X_K, Y_K)\$ において、入力

を \$\hat{\theta}_K(X, Y)\$ 倍に縮小し、余剰 \$\hat{\mathbf{u}}^K(X, Y)\$ を除去するとともに、出力に不足分 \$\hat{\mathbf{v}}^K(X, Y)\$ を追加すれば、効率的な活動になることを示している。

定理1 \$DMU_K\$ が非効率的であるとき、\$X_K^{\text{new}} = \hat{\theta}_K(X, Y) X_K - \hat{\mathbf{u}}^K(X, Y)\$、\$Y_K^{\text{new}} = Y_K + \hat{\mathbf{v}}^K(X, Y)\$ と変更すれば、\$DMU_K\$ の活動は効率的になる。

\$\hat{\theta}_K(X, Y)\$、\$\hat{\lambda}(X, Y)\$、\$\hat{\mathbf{u}}^K(X, Y)\$、\$\hat{\mathbf{v}}^K(X, Y)\$ を写像とみなし、その性質を議論しよう。次の補題が成立する。

補題1 \$\hat{\lambda}(X, Y) = (\hat{\lambda}_1(X, Y), \hat{\lambda}_2(X, Y), \dots, \hat{\lambda}_n(X, Y))\$ とするとき、次式が成立する。

$$\hat{\lambda}_K(X, Y) \leq \hat{\theta}_K(X, Y) \quad (2)$$

さらに、\$\hat{\theta}_K(X, Y) = 1\$ のときに限り、\$\hat{\lambda}_K(X, Y) > 0\$ となる。

(証明) 問題(1)の制約条件より、式(2)は明らかである。また、問題(1)より明らかに、\$\hat{\theta}_K(X, Y) \leq 1\$ となる。したがって、\$\hat{\lambda}_K(X, Y) = 1\$ であれば、\$\hat{\theta}_K(X, Y) = 1\$ となる。\$0 < \hat{\lambda}_K(X, Y) < 1\$ であるとき、\$\hat{\theta}_K(X, Y) < 1\$ であると仮定しよう。このとき、\$\hat{\theta}_K = (\hat{\theta}_K(X, Y) - \hat{\lambda}_K(X, Y)) / (1 - \hat{\lambda}_K(X, Y))\$、\$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_k(X, Y) / (1 - \hat{\lambda}_K(X, Y))\$、\$k \neq K\$、\$\hat{\mathbf{u}}^K = \hat{\mathbf{u}}^K(X, Y) / (1 - \hat{\lambda}_K(X, Y))\$、\$\hat{\mathbf{v}}^K = \hat{\mathbf{v}}^K(X, Y) / (1 - \hat{\lambda}_K(X, Y))\$ により定義される解 \$(\hat{\theta}_K, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{u}}^K, \hat{\mathbf{v}}^K)\$ は問題(1)の実行可能解となる。\$0 \leq \hat{\theta}_K(X, Y) < 1\$ であったから、\$\hat{\theta}_K < \hat{\theta}_K(X, Y)\$ となり、\$\hat{\theta}_K(X, Y)\$ の最適性に矛盾する。したがって、\$\hat{\lambda}_K(X, Y) > 0\$ であれば、\$\hat{\theta}_K(X, Y) = 1\$ となる。□

補題1を用いると、次の定理が証明できる。

定理2 \$\hat{\theta}_K(X, Y)\$ は、\$X > O_m^n, Y > O_s^n\$ に関して連続な関数である。また、\$\hat{\theta}_K(X, Y)\$ は、\$X_K\$ に関して非増加、\$Y_K\$ に関して非減少であり、\$X_k, k \neq K\$ に関して非減少、\$Y_k, k \neq K\$ に関して非増加である。

(証明) 後半は、補題1より容易に示せる。前半を証明しよう。この証明に、Hogan[6]の定理を用いる。\$X > O_m^n\$、\$\hat{\theta}_K(X, Y) \leq 1\$ より、\$\hat{\theta}_K(X, Y)\$ は \$\mathbf{u}^K, \mathbf{v}^K\$ を除き、いくつかの冗長な制約条件を加えた次の線形計画問題 \$P(X, Y)\$ の最適値でもある。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\theta_K, \lambda : X, Y) = \theta_K \\ & \text{subject to} \\ & \quad g_1(\theta_K, \lambda : X, Y) = X\lambda - \theta_K X_K \leq \mathbf{0}, \\ & \quad g_2(\theta_K, \lambda : X, Y) = Y_K - Y\lambda \leq \mathbf{0}, \\ & \quad g_{3k}(\theta_K, \lambda : X, Y) = x_{ik}\lambda_k - x_{iK} \leq 0, \\ & \quad g_{4k}(\theta_K, \lambda : X, Y) = -\lambda_k \leq 0, \end{aligned}$$

Vol.11 No.3
NII-Electronic Library Service

ただし, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_q)$ であり, $f^{-1}(y)$ は f の逆像で, 次のように定義される.

$$f^{-1}(y) = \{\mathbf{r} | f(\mathbf{r}) = y\} \quad (9)$$

特に, $\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_q = \Xi = \mathbf{R}$ のとき, 拡張原理に関して, 以下の定理が成立する[7].

定理4 写像 f が連続であり, $\tilde{A}_i$ の h -レベル集合 $[\tilde{A}_i]_h = \{\omega | \mu_{\tilde{A}_i}(\omega) \geq h\}$ が任意の $h \in (0, 1]$ に関して有界閉集合となるときの, 次式が成立する.

$$[f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_q)]_h = f([\tilde{A}_1]_h, [\tilde{A}_2]_h, \dots, [\tilde{A}_q]_h) \quad (10)$$

定理5 定理4と同じ仮定のもとで, さらに, $\tilde{A}_i$ が凸であり, 写像 f が $x_1, \dots, x_{q'}$ に関して非減少, $x_{q'+1}, \dots, x_q$ に関して非増加であるとき,

$$[f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_q)]_h = [f^L(h), f^R(h)] \quad (11)$$

が成立する. ただし, $q' \leq q$ とし, 式(11)の右辺の閉区間の上下限値は, 次のように定義される.

$$f^L(h) = f(a_1^L(h), \dots, a_{q'}^L(h), a_{q'+1}^R(h), \dots, a_q^R(h)) \quad (12)$$

$$f^R(h) = f(a_1^R(h), \dots, a_{q'}^R(h), a_{q'+1}^L(h), \dots, a_q^L(h)) \quad (13)$$

ここで, $a_i^L(h)$, $a_i^R(h)$ は $[\tilde{A}_i]_h$ の下限値と上限値である. $\tilde{A}_i$ が凸であり, $[\tilde{A}_i]_h$ は閉区間となるので, $[\tilde{A}_i]_h = [a_i^L(h), a_i^R(h)]$ と表せる.

さて, D 効率値のファジィ集合について議論しよう. 定理2より, 入出力データから D 効率値への写像 $\hat{\theta}_K(X, Y)$ は (X, Y) に関して連続である. 一方, 仮定より, ファジィデータ $\tilde{x}_{ik}$, $\tilde{y}_{jk}$ は凸で, 任意の $h \in (0, 1]$ に対して $[\tilde{x}_{ik}]_h$, $[\tilde{y}_{jk}]_h$ は有界閉集合となる. したがって, 定理2, 4, 5より,

$$[\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})]_h = [\hat{\theta}_K(X^L(h:K), Y^R(h:K)), \hat{\theta}_K(X^R(h:K), Y^L(h:K))] \quad (14)$$

が成立する. ただし,

$$X^L(h:K) = (X_{i1}^L(h), \dots, X_{i,K-1}^L(h), X_{iK}^R(h), X_{i,K+1}^L(h), \dots, X_{in}^L(h)) \quad (15)$$

$$X^R(h:K) = (X_{i1}^R(h), \dots, X_{i,K-1}^R(h), X_{iK}^L(h), X_{i,K+1}^R(h), \dots, X_{in}^R(h)) \quad (16)$$

で, $X_{ik}^L(h)$, $X_{ik}^R(h)$ は, それぞれ, 次の (i, k) 成分 $X_{ik}^L(h)$, $X_{ik}^R(h)$ で構成される行列 $X^L(h) = (X_{ik}^L(h))$, $X^R(h) = (X_{ik}^R(h))$ の第 k 列である.

$$X_{ik}^L(h) = x_{ik}^L - \alpha_{ik}^L (L_{ik}^X)^{(-1)}(h) \quad (17)$$

$$X_{ik}^R(h) = x_{ik}^R + \alpha_{ik}^R (R_{ik}^X)^{(-1)}(h) \quad (18)$$

なお, 擬逆関数 $(L_{ik}^X)^{(-1)}$, $(R_{ik}^X)^{(-1)}$ は,

$$(L_{ik}^X)^{(-1)}(h) = \sup\{r | L_{ik}^X(r) \geq h\} \quad (19)$$

$$(R_{ik}^X)^{(-1)}(h) = \sup\{r | R_{ik}^X(r) \geq h\} \quad (20)$$

と定義される. $Y_{jk}^L(h)$, $Y_{jk}^R(h)$ についても同様に定められる.

式(14)は, 閉区間となる $\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})$ の h -レベル集合 $[\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})]_h$ の下限値が, 入力データに関しては, $k \neq K$ に対して h -レベル集合 $[\tilde{x}_{ik}]_h$ の下限値を, K に対しては h -レベル集合 $[\tilde{x}_{iK}]_h$ の上限値を代入し, 出力データに関しては, $k \neq K$ に対して h -レベル集合 $[\tilde{y}_{jk}]_h$ の上限値を, K に対しては h -レベル集合 $[\tilde{y}_{jK}]_h$ の下限値を代入すれば得られることを示している. また, 他方, $[\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})]_h$ の上限値が, 入力データに関しては, $k \neq K$ に対して h -レベル集合 $[\tilde{x}_{ik}]_h$ の上限値を, K に対しては h -レベル集合 $[\tilde{x}_{iK}]_h$ の下限値を代入し, 出力データに関しては, $k \neq K$ に対して h -レベル集合 $[\tilde{y}_{jk}]_h$ の下限値を, K に対しては h -レベル集合 $[\tilde{y}_{jK}]_h$ の上限値を代入すれば得られることも示している. これらは, $[\tilde{X}]_h$, $[\tilde{Y}]_h$ の範囲内で, 入出力データ (X, Y) を $[\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})]_h$ の下限値に関しては DMU_K にとって最も不利となるように, 上限値に関しては最も有利になるように定めることを表しており, 直感に合致している.

分解原理[7]より,

$$\mu_{\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})}(r) = \begin{cases} \sup\{h \in (0, 1] | r \in [\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})]_h\}; \\ \quad \exists h, r \in [\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})]_h \text{ のとき,} \\ 0; \text{その他,} \end{cases} \quad (21)$$

となるので, 十分多くの h -レベル集合 $[\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})]_h$ を求めることにより, ファジィ集合 $\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})$ を近似することができる. なお, $[\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})]_h$ の上下限値は, いずれも, 2段階線形計画問題を解くことにより得られる.

5. 可能性理論に基づく効率性分析

通常の入出力データのもとでは, 各 DMU が効率的であるか否かを二値的に判断することができる. 一方, ファジィ入出力データのもとでは, DMU が効率的であるか否かを二値的に判断することができず, 効率的である度合が求められる. これらの度合は可能性測度[7]と必然性測度[7]により定めることができる.

ファジィ集合 $\tilde{A}$ が与えられたとき, $\tilde{A}$ の要素が集合 B に帰属する可能性の度合 $\Pi_{\tilde{A}}(B)$ と必然性の度合 $N_{\tilde{A}}(B)$ は次のように定義される.

$$\Pi_{\tilde{A}}(B) = \begin{cases} \sup_{r \in B} \mu_{\tilde{A}}(r) ; B \neq \emptyset \\ 0 ; B = \emptyset \end{cases} \quad (22)$$

$$N_{\tilde{A}}(B) = \begin{cases} \inf_{r \in B} (1 - \mu_{\tilde{A}}(r)) ; B \neq \Omega \\ 1 ; B = \Omega \end{cases} \quad (23)$$

ただし, $\mu_{\tilde{A}}$ は $\tilde{A}$ のメンバーシップ関数, Ω は全体集合である.

可能性測度 Π , 必然性測度 N について, 次式が成立する.

$$N_{\tilde{A}}(B) > 0 \implies \Pi_{\tilde{A}}(B) = 1 \quad (24)$$

$$\Pi_{\tilde{A}}(B) > h \iff (\tilde{A})_h \cap B \neq \emptyset \quad (25)$$

$$N_{\tilde{A}}(B) \geq h > 0 \iff (\tilde{A})_{1-h} \subseteq B \quad (26)$$

ただし, $(\tilde{A})_h$ はファジィ集合 $\tilde{A}$ の強 h -レベル集合で, $(\tilde{A})_h = \{r | \mu_{\tilde{A}}(r) > h\}$ と定められる.

さらに, 任意の $h \in [0, 1]$ について $[\tilde{A}]_h$ が有界閉集合であり, B が閉集合である場合には,

$$\Pi_{\tilde{A}}(B) \geq h > 0 \iff [\tilde{A}]_h \cap B \neq \emptyset \quad (27)$$

$$N_{\tilde{A}}(B) \geq h > 0 \iff \text{cl}(\tilde{A})_{1-h} \subseteq B \quad (28)$$

が成立する. ここで, $\text{cl } D$ は集合 D の閉包である.

DMU_K が効率的になる活動 (X, Y) の集合 EF_K は,

$$EF_K = \{(X, Y) \mid \hat{\theta}_K(X, Y) = 1, \mathbf{a}^K(X, Y) = \mathbf{0}, \mathbf{b}^K(X, Y) = \mathbf{0}\} \quad (29)$$

と定義できるから, 式(22), (23)の可能性測度, 必然性測度より, DMU_K が効率的である可能性の度合と必然性の度合を $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K)$ および $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K)$ により定めることができる. ただし, $E_x = (\varepsilon_{ik}), E_y = (\varepsilon_{jk})$ である. 特に, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) = 0$ であるときには, 式(25)より, $((\tilde{X})_0 \times (\tilde{Y})_0) \cap EF_K = \emptyset$ となり, $\mu_{\tilde{X}}(X) > 0, \mu_{\tilde{Y}}(Y) > 0$ なる任意の入出力データ (X, Y) に対して, DMU_K が効率的でない. すなわち, DMU_K が効率的でありえないこと, あるいは, 常に効率的でないことを示す. 一方, $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) = 1$ であるときには, 式(26)より, $((\tilde{X})_0 \times (\tilde{Y})_0) \subseteq EF_K$ となり, $\mu_{\tilde{X}}(X) > 0, \mu_{\tilde{Y}}(Y) > 0$ なる任意の入出力データ (X, Y) に対して, DMU_K が効率的である. すなわち, DMU_K が必ず効率的であること, あるいは, 常に効率的であることを示す. さらに, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) > 0$ であるときには, DMU_K がある程度(可能性の度合 $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K)$ で)効率的でありうることを表し, $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) > 0$ であるときには, DMU_K がある程度(必然性の度合 $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K)$ で)効率的であると確信できることを表す.

以下では, 任意の $h \in (0, 1]$ について, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ あるいは $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ であるか否かを調べ

る方法, および, そうでない場合にそうなるために必要な改善案の一つを求める方法を議論する. しかし, 式(25), (26)より,

$$([\tilde{X}]_h \times [\tilde{Y}]_h) \cap EF_K \neq \emptyset \implies \Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h \quad (30)$$

$$\text{cl}((\tilde{X})_{1-h} \times (\tilde{Y})_{1-h}) \subseteq EF_K \implies N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h \quad (31)$$

は成立するが, EF_K が閉集合でないため, これらの逆は成立しない. その代わり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次式が成立する.

$$\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h \implies ([\tilde{X}]_{h-\varepsilon} \times [\tilde{Y}]_{h-\varepsilon}) \cap EF_K \neq \emptyset \quad (32)$$

$$N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h \iff ((\tilde{X})_{1-h} \times (\tilde{Y})_{1-h}) \subseteq EF_K \quad (33)$$

したがって, 厳密に $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ および $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ を議論する代わりに, それらを幾分強めた条件(十分条件), $([\tilde{X}]_h \times [\tilde{Y}]_h) \cap EF_K \neq \emptyset$ および $\text{cl}((\tilde{X})_{1-h} \times (\tilde{Y})_{1-h}) \subseteq EF_K$ の成否を議論することにする.

$(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ について,

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = \{(X, Y) \mid (X_1, Y_1) \leq (X, Y) \leq (X_2, Y_2)\} \quad (34)$$

と定義すれば, $[\tilde{x}_{ik}]_h, [\tilde{y}_{jk}]_h$ は有界閉集合となることより,

$$([\tilde{X}]_h \times [\tilde{Y}]_h) = [(X^L(h), Y^L(h)), (X^K(h), Y^K(h))] \quad (35)$$

と書ける. また, $(X, Y) \in EF_K$ は $\hat{\theta}(X, Y) = 1, \mathbf{a}^K(X, Y) = \mathbf{0}, \mathbf{b}^K(X, Y) = \mathbf{0}$ が成立することを表すので, 定理2より次式が得られる.

$$([\tilde{X}]_h \times [\tilde{Y}]_h) \cap EF_K \neq \emptyset \iff \begin{cases} \hat{\theta}_K(X^K(h:K), Y^L(h:K)) = 1, \\ \mathbf{a}^K(X^K(h:K), Y^L(h:K)) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}^K(X^K(h:K), Y^L(h:K)) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (36)$$

したがって, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ の十分条件は, 入出力データを $(X^K(h:K), Y^L(h:K))$ として, 問題(1)を解けば容易に確認できる.

いま, 式(36)の右辺が成立しないとすると, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ が成立すると断言できない. しかし, 定理1より, DMU_K の活動 (X_K, Y_K) を次式で定義される $(X_K^{\text{new}}, Y_K^{\text{new}})$ に改善すれば, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ が成立する, すなわち, DMU_K は可能性の度合 h 以上で効率的であると断言できる.

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{\cdot K}^{\text{new}} &= \hat{\theta}(X^R(h:K), Y^L(h:K)) \tilde{X}_{\cdot K} \\ &\quad - \hat{a}(X^R(h:K), Y^L(h:K))\end{aligned}\quad (37)$$

$$\tilde{Y}_{\cdot K}^{\text{new}} = \tilde{Y}_{\cdot K} + \hat{\theta}(X^R(h:K), Y^L(h:K)) \quad (38)$$

一方、擬逆関数 $(L_{ik}^x)^{<-1>}, (R_{ik}^x)^{<-1>}$ を

$$(L_{ik}^x)^{<-1>}(h) = \sup\{r \mid L_{ik}^x(r) > h\} \quad (39)$$

$$(R_{ik}^x)^{<-1>}(h) = \sup\{r \mid R_{ik}^x(r) > h\} \quad (40)$$

と定義し、

$$X_{ik}^L(h) = x_{ik}^L - \alpha_{ik}^L (L_{ik}^x)^{<-1>}(h) \quad (41)$$

$$X_{ik}^R(h) = x_{ik}^R + \alpha_{ik}^R (R_{ik}^x)^{<-1>}(h) \quad (42)$$

を用いて、 $X^L(h) = (X_{ik}^L(h))$, $X^R(h) = (X_{ik}^R(h))$ と定める。 $Y^L(h)$, $Y^R(h)$ も同様に定めると、

$$\begin{aligned}\text{cl}((\tilde{X})_{1-h} \times (\tilde{Y})_{1-h}) \\ = [(X^L(1-h), Y^L(1-h)), \\ (X^R(1-h), Y^R(1-h))]\end{aligned}\quad (43)$$

となる。式(15), (16)と同様に、

$$\begin{aligned}X^L(h:K) &= (X_{\cdot 1}^L(h), \dots, X_{\cdot K-1}^L(h), \\ &\quad X_{\cdot K}^R(h), X_{\cdot K+1}^L(h), \dots, X_{\cdot m}^L(h))\end{aligned}\quad (44)$$

$$\begin{aligned}X^R(h:K) &= (X_{\cdot 1}^R(h), \dots, X_{\cdot K-1}^R(h), \\ &\quad X_{\cdot K}^L(h), X_{\cdot K+1}^R(h), \dots, X_{\cdot m}^R(h))\end{aligned}\quad (45)$$

と定義する。ただし、 $X_{\cdot k}^L(h)$, $X_{\cdot k}^R(h)$ は、それぞれ、 $X^L(h)$, $X^R(h)$ の第 k 列である。同様に、 $Y^L(h:K)$, $Y^R(h:K)$ も定義すると、定理2より、次式が得られる。

$$\begin{aligned}\text{cl}((\tilde{X})_{1-h} \times (\tilde{Y})_{1-h}) \subseteq EF_K \\ \iff \begin{cases} \hat{\theta}_K(X^L(1-h:K), Y^R(1-h:K)) = 1, \\ \hat{a}^K(X^L(1-h:K), Y^R(1-h:K)) = 0, \\ \hat{\theta}^K(X^L(1-h:K), Y^R(1-h:K)) = 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (46)$$

したがって、 $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ の十分条件は、入出力データを $(X^L(1-h:K), Y^R(1-h:K))$ として、問題(1)を解けば容易に確認できる。

いま、式(46)の右辺が成立しないとすると、 $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ が成立すると断言できない。しかし、定理1より、 DMU_K の活動 $(X_{\cdot K}, Y_{\cdot K})$ を次式で定義される $(X_{\cdot K}^{\text{new}}, Y_{\cdot K}^{\text{new}})$ に改善すれば、 $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \geq h$ が成立する。すなわち、 DMU_K は必然性の度合 h 以上で効率的であると断言できる。

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{\cdot K}^{\text{new}} &= \hat{\theta}(X^L(1-h:K), Y^R(1-h:K)) \tilde{X}_{\cdot K} \\ &\quad - \hat{a}(X^L(1-h:K), Y^R(1-h:K))\end{aligned}\quad (47)$$

$$\tilde{Y}_{\cdot K}^{\text{new}} = \tilde{Y}_{\cdot K} + \hat{\theta}(X^L(1-h:K), Y^R(1-h:K)) \quad (48)$$

6. 二つのアプローチの関係

DMU_K が D 効率的になる活動 (X, Y) の集合 DEF_K は、

$$DEF_K = \{(X, Y) \geq (E_x, E_y) \mid \hat{\theta}(X, Y) = 1\} \quad (49)$$

と書ける。定理2より、 $\hat{\theta}(X, Y)$ は連続であるから、 DEF_K は閉集合となる。

DMU_K が D 効率的となる可能性と必然性の度合を考えると、 $N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(DEF_K) = 1 - \Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}((DEF_K)^c)$ 、および、定義より明らかに、

$$\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(DEF_K) = \mu_{\hat{\theta}(\tilde{X}, \tilde{Y})}(1) \quad (50)$$

$$N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(DEF_K) = 1 - \sup_{r < 1} \mu_{\hat{\theta}(\tilde{X}, \tilde{Y})}(r) \quad (51)$$

が成立する。ただし、 D^c は集合 D の補集合である。一方、 $EF_K \subseteq DEF_K$ より、

$$\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \leq \Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(DEF_K) \quad (52)$$

$$N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \leq N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(DEF_K) \quad (53)$$

となるので、次式が成立する。

$$\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \leq \mu_{\hat{\theta}(\tilde{X}, \tilde{Y})}(1) \quad (54)$$

$$N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) \leq 1 - \sup_{r < 1} \mu_{\hat{\theta}(\tilde{X}, \tilde{Y})}(r) \quad (55)$$

特に、すべての型関数 L_{ik}^x と R_{ik}^x 、あるいは、すべての型関数 L_{jk}^y と R_{jk}^y が連続な関数であるとき、式(54)、(55)が等号で成立することが、次の定理に与えられている。

定理6 型関数 $L_{ik}^x, R_{ik}^x, i=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, n$ が連続な関数であるとき、

$$\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) = \mu_{\hat{\theta}(\tilde{X}, \tilde{Y})}(1) \quad (56)$$

$$N_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) = 1 - \sup_{r < 1} \mu_{\hat{\theta}(\tilde{X}, \tilde{Y})}(r) \quad (57)$$

が成立する。同様に、 $L_{jk}^y, R_{jk}^y, j=1, 2, \dots, s, k=1, 2, \dots, n$ が連続な関数であるとき、式(56), (57)が成立する。

(証明) 仮定より、 L_{ik}^x は非減少で連続であるから、 $(L_{ik}^x)^{(-1)}$ は厳密な減少関数になる。 $(R_{ik}^x)^{(-1)}, (L_{jk}^y)^{(-1)}$ および $(R_{jk}^y)^{(-1)}$ についても同様である。一方、 $(X(E), Y(\Delta))$ を

$$X_{\cdot k}(E) = \begin{cases} X_{\cdot k} - E_{\cdot k}, & \text{if } k=K, \\ X_{\cdot k} + E_{\cdot k}, & \text{if } k \neq K, \end{cases}$$

$$Y_{\cdot k}(\Delta) = \begin{cases} Y_{\cdot k} + \Delta_{\cdot k}, & \text{if } k=K, \\ Y_{\cdot K} - \Delta_{\cdot K}, & \text{if } k \neq K. \end{cases}$$

と定義すると, $\hat{\theta}_K(X, Y) = 1$ かつ $\sum_{i=1}^m \hat{u}_i^K(X, Y) + \sum_{j=1}^s \hat{v}_j^K(X, Y) > 0$ であるとき, $E > O_m^n$ かつ $\Delta \geq O_s^n$, ある i は, $E \geq O_m^n$ かつ $\Delta > O_s^n$ なる任意の (E, Δ) について, $\hat{\theta}_K(X(E), Y(\Delta)) = 1$, $\sum_{i=1}^m \hat{u}_i^K(X(E), Y(\Delta)) + \sum_{j=1}^s \hat{v}_j^K(X(E), Y(\Delta)) = 0$ が成立することが容易に示せる. これらの性質を用いると, $\hat{\theta}_K(X^R(h:K), Y^L(h:K)) = 1$ であるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\hat{\theta}_K(X^R(h-\varepsilon:K), Y^L(h-\varepsilon:K)) = 1$, $\hat{u}^K(X^R(h-\varepsilon:K), Y^L(h-\varepsilon:K)) = \mathbf{0}$ かつ $\hat{v}^K(X^R(h-\varepsilon:K), Y^L(h-\varepsilon:K)) = \mathbf{0}$ となる. したがって, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) = \Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(DEF_K)$ が示され, 式(56)が成立する. 式(57)についても同様に証明できる.

定理6より, ファジィ入力データか, もしくは, ファジィ出力データがすべて連続なメンバシップ関数をもつ凸なファジィ数であれば, 式(56), (57)が成立することを示している.

7. 数値例

表1に示すファジィ入力データをもつ七つの活動($\mathbf{x}, \mathbf{y}$)を, 提案したファジィ入出力データに対するDEAにより解析しよう. ただし, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ である. 表1において, 型関数 L は $L(r) = 1-r$ と定義される. したがって, 表1のファジィ入力データはすべて三角型ファジィ数で表される. 出力 $\mathbf{y}$ がすべて1であることより, 入力 x_1 を横軸に, 入力 x_2 を縦軸にとった各データのグラフを図1に示す. 各データはピラミッド型のファジィベクトルになるので, 図1ではそれを上から見たものを示している.

DEAでは, 実現しうる活動の集合を, 与えられた入出力データ(X, Y)に基づき

$$P = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid x_i \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik}, y_j \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk}, \right. \\ \left. \lambda_k \geq 0, i=1, 2, \dots, m, \right. \\ \left. j=1, 2, \dots, s, k=1, 2, \dots, n \right\}$$

と定義し, 生産可能集合と呼んでいる. 図1の折線 l_1 および l_3 はそれぞれ, ファジィ入力データが与えられた範囲 ($\mu_{\tilde{x}_{ik}}(r) > 0$ の範囲) で, どのような値をとろうとも生産可能となる集合(確実に生産可能となる活動の集合), および, ある特別な値の実現により生産可能となる集合(生産可能となりうる活動の集合)の境界を示している. また, l_2 は各ファジィ入力データの中心値より求められる生産可能集合を表している.

各活動について, $\hat{\theta}_K(\tilde{X}, \tilde{Y})$ を求めた結果を図2に示す. 図2に示すように, DMU_3, DMU_4, DMU_5 で, $\mu_{\hat{\theta}_K}(\tilde{X}, \tilde{Y})(1) = 1, K=3, 4, 5$ となった. したがって, 定理6より, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K) = 1, K=3, 4, 5$ となる. 一方, $K=1, 2, 6, 7$ について, $\mu_{\hat{\theta}_K}(\tilde{X}, \tilde{Y})(1) < 1$ である. 定理6に基づき, $\Pi_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}(EF_K), K=1, 2, 6, 7$ を求めると,

図1 七つの活動の図示

図2 七つの活動に対するファジィ D 効率値

表1 ファジィ入力データをもつ七つの活動

	DMU ₁	DMU ₂	DMU ₃	DMU ₄	DMU ₅	DMU ₆	DMU ₇
x_1	(4, 4, 1, 1) _{LL}	(7, 7, 1, 1) _{LL}	(8, 8, 1, 1) _{LL}	(4, 4, 1, 1) _{LL}	(2, 2, 1, 1) _{LL}	(10, 10, 1, 1) _{LL}	(3, 3, 1, 1) _{LL}
x_2	(3, 3, 1, 1) _{LL}	(3, 3, 1, 1) _{LL}	(1, 1, 0.5, 0.5) _{LL}	(2, 2, 0.5, 0.5) _{LL}	(4, 4, 0.5, 0.5) _{LL}	(1.2, 1.2, 0.5, 0.5) _{LL}	(7, 7, 1, 1) _{LL}
$\mathbf{y}$	1	1	1	1	1	1	1

$$\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_1) = \mu_{\hat{\theta}_1(\bar{X}, Y)}(1) = 0.714$$

$$\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_2) = \mu_{\hat{\theta}_2(\bar{X}, Y)}(1) = 0.125$$

$$\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_6) = \mu_{\hat{\theta}_6(\bar{X}, Y)}(1) = 0.800$$

$$\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_7) = \mu_{\hat{\theta}_7(\bar{X}, Y)}(1) = 0.500$$

が得られる。

一方、 $N_{(\bar{X}, Y)}(EF_K)$ の値は、 $K=1, 2, 6, 7$ に対して、式(24)より、 $N_{(\bar{X}, Y)}(EF_K)=0$ となり、 $K=3, 4, 5$ について算出すると、定理6より、

$$N_{(\bar{X}, Y)}(EF_3) = 1 - \sup_{r < 1} \mu_{\hat{\theta}_3(\bar{X}, Y)}(r) = 0.469$$

$$N_{(\bar{X}, Y)}(EF_4) = 1 - \sup_{r < 1} \mu_{\hat{\theta}_4(\bar{X}, Y)}(r) = 0.418$$

$$N_{(\bar{X}, Y)}(EF_5) = 1 - \sup_{r < 1} \mu_{\hat{\theta}_5(\bar{X}, Y)}(r) = 0.709$$

が得られる。

以上より、 DMU_5 の活動が高い確信度で効率的であるといえ、 DMU_3, DMU_4 の活動については、中程度の確信度で効率的であるといえる。一方、他の活動については、確信して効率的であるとはいえず、効率的であるかもしれないとしかいえない。その可能性は、 DMU_1, DMU_6 の活動については高く、 DMU_7 については中程度であるが、 DMU_2 については低く、ほぼありえないともいえる。これらの分析結果は、図1を見れば理解できる。すなわち、折線 l_2 は、 DMU_3, DMU_4, DMU_5 のファジィ入力データの中心を頂点としていることより、 $N_{(\bar{X}, Y)}(EF_K) > 0, K=3, 4, 5$ が理解できる。 DMU_5 を除外すれば、折線 l_3 はかなり変化し、生産可能集合を示す l_3 より右上の領域がかなり小さくなる一方、 DMU_3, DMU_4 のいずれかを除外しても、折線 l_3 は大きく変化しない。これより、 $N_{(\bar{X}, Y)}(EF_5)$ が大きく、 $N_{(\bar{X}, Y)}(EF_K), K=3, 4$ がそれほど大きくないことが理解できる。 DMU_2 のファジィ入力データは、折線 l_1 より右上に位置していることより、 $\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_2)$ が小さくなること、および、 DMU_7 のファジィ入力データが折線 l_2 に接し、半分が折線 l_1 の右にあることより、 $\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_7) = 0.5$ となることが理解できる。 $\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_1)$ 、 $\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_6)$ についても、 DMU_1, DMU_6 のファジィ入力データと折線 l_1, l_2 の位置関係から理解できる。

次に、 DMU_2 の活動について、高い可能性で効率的であるといえるための一つの改善案を考えよう。可能性の度合がほぼ0.7以上で、高い可能性といえるとして、式(37)、(38)より、 $\hat{\theta}_2(X^R(0.7:2), Y^L(0.7:2))$ 、 $\hat{a}^K(X^R(0.7:2), Y^L(0.7:2))$ 、 $\hat{\sigma}^2(X^R(0.7:2), Y^L(0.7:2))$ を求めればよい。 $\hat{\theta}_2(X^R(0.7:2), Y^L(0.7:2)) = 0.737$ 、 $\hat{a}^2(X^R(0.7:2), Y^L(0.7:2)) = 0$ 、 $\hat{\sigma}^2(X^R(0.7:2), Y^L(0.7:2)) = 0$ が得られるので、 DMU_2 の活動における入力を0.737倍に縮小すれば、 $\Pi_{(\bar{X}, Y)}(EF_2) \geq 0.7$ となり、高い可能性で効率的であるといえる。

同様に、 DMU_5 の活動が、わずかな確信度でも効率的であるといえるための一つの改善案を考えよう。必然性の度合が0.05以上であることが、確信度がわずかあるといえるとしよう。式(47)、(48)より、 $\hat{\theta}_K(X^L(0.95:5), Y^R(0.95:5))$ 、 $\hat{a}^K(X^L(0.95:5), Y^R(0.95:5))$ 、 $\hat{\sigma}^K(X^L(0.95:5), Y^R(0.95:5))$ を求めればよい。これらを求めると、 $\hat{\theta}_K(X^L(0.95:5), Y^R(0.95:5)) = 0.796$ 、 $\hat{a}^K(X^L(0.95:5), Y^R(0.95:5)) = (0.049, 0)$ 、 $\hat{\sigma}^K(X^L(0.95:5), Y^R(0.95:5)) = 0$ となり、 DMU_5 の活動における入力 (x_1, x_2) を0.796倍に縮小し、縮小した入力 x_1 をさらに0.049だけ小さくすれば、 $N_{(\bar{X}, Y)}(EF_5) \geq 0.05$ となり、わずかな確信度で効率的になる。

8. おわりに

本研究では、ファジィ入出力データに対するDEAについて考察し、自然な二つのアプローチを提案した。まず、DEAにおいて解かれる線形計画問題を、与えられた入出力データに対してD効率値を対応させる写像とみなし、拡張原理を適用してD効率値のファジィ集合を求める方法を議論した。この写像が連続であることや単調であることを示すとともに、分解原理を適用すれば、D効率値のファジィ集合が線形計画法を繰り返し適用することにより、近似的に算出できることを述べた。次に、DEAにおける効率性を可能性理論に基づき拡張し、効率的である可能性の度合と必然性の度合を定義するとともに、与えられた度合以上で可能的に、あるいは、必然的に効率的であるか否かを判定する方法を議論した。また、与えられた度合で効率的でない場合に、その度合で効率的になるための一改善案を求める方法も議論した。結果として、2段階線形計画問題を解くことにより、与えられた度合以上で効率的であるか否かの判定と効率的でない場合の一改善案が求められることを示した。さらに、これら二つのアプローチの関係を調べ、ファジィ入出力データが凸であり、そのメンバシップ関数が連続であれば、D効率値のファジィ集合から効率的である可能性の度合、必然性の度合が求められることを明らかにした。最後に、数値例を与え、提案法による解析方法を説明した。

なお、本研究では、DEAにおいて、入力の改善を意図した入力型モデル[1]を取り扱ったが、出力の改善を意図した出力型モデル[1]についても同様に、ファジィ入出力データの場合へ拡張することができる。

今後は、ファジィ入出力データに対する他の DEA による解析法[8]の確立やそれらの相互関係の議論を試みるつもりである。また、通常、入力が大きければ出力も大きくなるといった相互関係が入力データと出力データに存在すると考えられる。このような相互関係がある場合のファジィ入出力データに対する DEA についても、今後の研究課題である。

参考文献

- [1] 刀根 薫：経営効率性の測定と改善 ―包絡分析法 DEA による―，日科技連(1993)。
- [2] 上田 徹：包絡分析法 DEA とファジィ DEA，日本ファジィ学会誌，Vol.10，No.2，193-199(1998)。
- [3] 上田，上村：三角型ファジィ数を用いた DEA，第13回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，681-682(1997)。
- [4] P. Guo and H. Tanaka：Fuzzy DEA with Fuzzy Data，第13回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，685-686(1997)。
- [5] M. Inuiguchi, H. Ichihashi and H. Tanaka：Fuzzy Programming：A Survey of Recent Developments, in R. Slowinski and J. Teghem(Eds.), Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty, Kluwer Academic Publishers, 45-68(1990)。
- [6] W. W. Hogan：Point-to-Set Maps in Mathematical Programming, SIAM Review, Vol.15, No.3, 591-603(1973)。
- [7] D. Dubois and H. Prade：Fuzzy numbers：An overview, in J. C. Bezdek(Ed.), *Analysis of Fuzzy Information, Vol.I：Mathematics and Logic*, CRC Press, Boca Raton, FL, 3-39, (1987)。
- [8] M. Inuiguchi and T. Tanino：Various Possible and Necessary Extensions of Efficiency in DEA with Interval Input-Output Data, Proceedings of Third European Workshop on Fuzzy Decision Analysis and Neural Networks for Management, Planning and Optimization, 50-59(1998)。
- [9] 松下，高萩：入出力値をファジィ集合にした DEA，第2回曖昧な気持ちに挑むワークショップ，93-96(1997)。

注 1

D 効率値をファジィ集合により求めることに關しては，本研究を口頭発表した約1ヶ月後に，独立に，松下，高萩[9]によっても口頭発表により提案されている。ただし，文献[9]では，専ら D 効率値のファジィ集合を求めており，効率性の可能性理論に基づく拡張などの議論はない。

(1998年8月27日 受付)

[問い合わせ先]

〒565-0871

吹田市山田丘2-1

大阪大学大学院工学研究科

電子情報エネルギー工学専攻

乾口 雅弘

TEL：06-6879-7787

FAX：06-6879-7939

E-mail：inuiguti@eie.eng.osaka-u.ac.jp

著者紹介

乾口 雅弘 (いぬいぐち まさひろ)

大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻

1987年 大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程(経営工学専攻)修了。同年 同大学経営工学科助手，'92年 広島大学工学部第二類(電気系)計数管理工学講座助教授，'97年 大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻助教授，現在に至る。主として，可能性理論，Dempster-Shafer 理論，ファジィ数値計画法および近似的推論法に関する研究に従事。'91年 システム制御情報学会榎木記念賞奨励賞，'93年 日本ファジィ学会奨励賞，'97年 日本ファジィ学会論文賞，受賞。博士(工学)，計測自動制御学会，国際ファジィシステム学会，システム制御情報学会，電子情報通信学会，日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本経営工学会，日本ファジィ学会などの会員。

谷野 哲三 (たにの てつぞう)

大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻

1973年3月 京都大学工学部数理工学科卒業。1978年3月 同大学大学院工学研究科数理工学専攻博士課程修了。東北大学工学部助教授，岡山大学工学部教授を経て，現在大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻教授。最適化理論，意思決定論，ゲーム理論などの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会，システム制御情報学会，日本 OR 学会，日本応用数理学会，電子情報通信学会などの会員。

Possibilistic DEA with Fuzzy Input-Output Data

by

Masahiro INUIGUCHI and Tetsuzo TANINO

Abstract :

In this paper, we develop a DEA (Data Envelopment Analysis) with fuzzy input-output data. There are several approaches to extend the DEA into the case of fuzzy input-output data. We made two natural extension approaches. In the first approach, a linear programming problem solved in the conventional DEA is regarded as a mapping from an input-output data set to a D-efficiency value set. Applying the extension principle to the mapping, we obtain a fuzzy set of D-efficiency values from given fuzzy input-output data. In the second approach, we propose an efficiency analysis based on possibility theory. By this approach, possible and necessary efficiencies are defined. We discuss improvement guides for a DMU (Decision Making Unit) to be possibly and necessarily efficient to a given degree. The relations between the fuzzy set of D-efficiency values and the possibilistic efficiency analysis are investigated. A numerical example is given to illustrate the proposed analyses.

Keywords : DEA, Fuzzy Input-Output Data, Extension Principle, Possibility Theory, Linear Programming, Efficiency

Contact Address : **Masahiro INUIGUCHI**

Graduate School of Engineering, Osaka University

2-1, Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871, Japan

TEL : 06-6879-7787

FAX : 06-6879-7939

E-mail : inuiguti@eie.eng.osaka-u.ac.jp