論文

建材メーカーにおける生産・輸送問題に 対するファジィ計画と利益および コスト分配 —事例研究—†

坂和 正敏*1 西崎 一郎*1 植村 芳雄*2

本論文では、建材メーカーにおける現実の生産・輸送問題を取り上げ、既存の複数の生産拠点(工場)で複数の製品を製造し、かつその生産拠点自身が需要地でもある状況のもとで生産・輸送計画を考察する。最初に、各生産拠点での生産能力と需要の条件のもとで生産コストと輸送コストの合計を最小にする生産・輸送計画を決定する問題を定式化する。さらに、工場の生産量や製品供給量の満足度を考慮したファジィ生産・輸送計画問題を考察する。最後に、複数の拠点が協調して作成した生産・輸送計画による利益やコストの分配問題に対して、協力ゲームの解に基づく分配計画を与える。それぞれの問題に対して、適用例を示す。

キーワード：生産・輸送問題、ファジィ計画、利益・コストの分配

1. はじめに

大規模な製造企業において、有用で品質の良い製品を製造することと同様に、できるだけ低いコストで需要地に製品を提供するために製品をどの工場で製造し、いかに輸送するかという問題は重要であり、この問題に対する効率的で効果的な方法論を開発することが求められてきている。近年、製造業において製品の製造から販売までの異なる機能に対する統合的な意思決定を支援する情報システムの構築が要求されていることから、最適なあるいは合理的な仕事の分担をそれぞれの事業部、工場、支店などの個別の活動単位で受け持つことが要求されている。

輸送計画は施設立地と複合して考察される場合が多く、施設設置問題(facility location problem)と呼ばれる[7,11]。すなわち、複数の工場で生産された製品を複数の需要地に、それぞれの生産能力や需要量を満たしながら、総コストを最小にするように生産し、輸送する問題で、需要地に倉庫をもつように考えて、稼働する工場や設置する倉庫の選択を同時に考慮する問題が施設配置問題と呼ばれている。施設配置問題では、すべての製品は輸送されるので、ある工場から輸送される製品の数量がその工場での生産量となる。工場の

稼働や倉庫の設置に関する変数は0-1変数が採用され、定式化される数理計画問題は混合0-1計画問題となる。施設設置問題は分枝限定法、ラグランジュ緩和、Bendersの分割法などの手法や、さらにヒューリスティクスを組合せた手法で解かれている[2,8,11,16]。

本論文では、著者らによって推進された建材メーカーの生産・輸送計画に関する事例研究の結果を報告する。本論文では、既存の生産拠点(工場)で製品を生産し、かつその生産拠点自身が需要地でもある問題を取り扱う。したがって、工場や倉庫の施設立地は考慮しないが、各生産拠点での生産能力と需要の条件のもとで製造コストと輸送コストの合計を最小にする生産・輸送計画を決定する問題を考察する。ここでは、個別の需要家への配送までは考慮しない。一般に、需要地で製品を生産し、販売することによって、納期、クレーム対応、特別注文の対応などの顧客サービス度の向上が望めるとの観点から、需要地で製品は生産され、販売される。しかし在庫や納期の関係から、ある需要地で注文された製品がその需要地にある生産拠点で生産するより、他の需要地にある生産拠点で製造し輸送して供給することによって販売機会を確保することが可能となると同時に、次回以降の注文も期待できるとの観点から、拠点間の製品の輸送が行われる。

第2節では、各生産拠点での生産能力と需要を考慮して、生産と輸送コストの合計を最小にする生産・輸送問題を定式化し、適用例を示す。特に、現実には製品の輸送は1製品ごとに行われるのではないので、複数製品をまとめてトラックによる輸送を考慮した定式化も行う。

一般に、通常の計画問題の最適解として得られる解は、製造コストや輸送コストを最小化するため、生産能力の上限での製造や見積もられた需要量に一致した

† Fuzzy Programming and Profit and Cost Allocation for a Production and Transportation Problem in a Housing Material Manufacturer — A Case Study —
Masatoshi SAKAWA, Ichiro Nishizaki and Yoshio UEMURA

*1 広島大学工学部第二類(電気系)
Department of Industrial and Systems Engineering, Faculty of Engineering, Hiroshima University

*2 (株)住建産業
Products Projects Development Department, Juken Sangyou Co., Ltd.

供給量を与える解となる。しかし、工場の生産能力の上限での製造が安定していたり、予測された需要量が正確に見積もられていれば、得られた解は望ましい結果を与えるが、これらのパラメータにはあいまい性が含まれる場合がある。そこで、第3節ではこのようなあいまい性を考慮するため、生産・輸送問題に対するファジィ計画を考察し[12,17]、その適用例を与える。

生産と輸送のコストを最小にする各拠点での生産量と拠点間の輸送を考察する場合、各拠点間の完全な協調のもとでの製品の生産と輸送が要求される。しかし、各拠点に独立性の高い事業部があると考えると合理的なコストあるいは利益の分配が保証されなければ、そのような協調関係を維持することは困難となる。第4節では、複数の拠点が協調して生産と輸送のコストを最小にする生産・輸送計画を最適化の手法によって立案した結果、その計画に基づいて予想される利益を協力ゲーム[4,10]の考えを利用して各拠点に分配し、生じるコストを調整する問題を考察する。

2. 生産・輸送計画

2.1 定式化

本論文では建材メーカーにおける実際の生産・輸送問題を取り上げる。全国で複数の拠点があり、各拠点では複数種類の製品の生産と販売が同時に行われ、需要に満たない製品は他の拠点から輸送されるものとする。最初に、このような生産・輸送計画問題の基本的な条件を考慮して、製品を個別に輸送できるとした最も基礎的な定式化を行う。

複数種類の製品を輸送する問題に対する基本的な条件を以下に示す。

- ・生産拠点数を m カ所とする。
- ・製品は各生産拠点で n 種類製造する。
- ・各生産拠点が需要地でもある。
- ・各拠点の生産コスト、生産能力、需要、各拠点間の輸送コストが与えられている。
- ・生産量が需要に満たないときは他の拠点から製品を輸送する。
- ・各拠点での生産量と他の拠点から送られてくる輸送量の総和がその拠点での需要を満たす。

問題の定式化において、次の記号が用いられる。

定数

S_{ki} : 拠点 i での製品 a_k の需要。

P_{ki} : 拠点 i での製品 a_k の生産能力。

c_{ki} : 拠点 i での製品 a_k の単位生産コスト。

d_{ij} : 拠点 i から j へ輸送する1製品当たりの輸送コスト。ただし、すべての製品に対して同一の輸送コストを仮定する。

決定変数

x_{ki} : 拠点 i での製品 a_k の生産量。

y_{kij} : 拠点 i から j への製品 a_k の輸送量。

製品を1個ずつ個別に輸送できるとした場合の生産コストと輸送コストの総和の最小化問題は次のように定式化できる。

$$\min \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ki} x_{ki} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1, +i}^m d_{ij} y_{kij} \quad (1a)$$

$$\text{s. t. } x_{ki} \leq P_{ki}, \quad k=1, \dots, n; i=1, \dots, m \quad (1b)$$

$$x_{ki} \geq \sum_{j=1, +i}^m y_{kij}, \quad k=1, \dots, n; i, j=1, \dots, m \quad (1c)$$

$$x_{ki} - \sum_{j=1, +i}^m y_{kij} + \sum_{j=1, +i}^m y_{kji} \geq S_{ki}, \quad k=1, \dots, n; i, j=1, \dots, m \quad (1d)$$

$$0 \leq x_{ki} \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq y_{kij} \in \mathbb{Z}, \quad k=1, \dots, n; i, j=1, \dots, m \quad (1e)$$

目的関数(1e)は生産コストと輸送コストの総和であり、制約式(1b)は、拠点 i での製品 a_k の生産量はその拠点の生産能力 P_{ki} より小さいか等しいことを表し、制約式(1c)は、拠点 i での製品 a_k の生産量はその拠点から送り出す総輸送量以上であることを表し、制約式(1d)は、拠点 i での製品 a_k の供給量は需要量 S_{ki} より大きいことを表し、制約式(1e)は、拠点 i での製品 a_k の生産量および拠点 i から j への製品 a_k の輸送量は非負の整数であることを表しており、 $\mathbb{Z}$ は整数の集合を表す。

問題(1)の制約式の係数はすべて0, 1, -1であるので、 S_{ki}, P_{ki} が整数のとき整数条件を除いた線形計画問題の最適解が問題(1)の最適解でもある(例えば[13]を参照)。

問題(1)を基礎として、製品は容量 M のトラックでまとめて輸送されるとする場合の生産コストと輸送コストの総和の最小化問題は、拠点 i から j へ輸送するトラックの台数を表す整数決定変数 u_{ij} を導入し、次のように定式化される。

$$\min \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ki} x_{ki} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1, +i}^m M d_{ij} u_{ij} \quad (2a)$$

$$\text{s. t. } (1b), (1c), (1d), (1e) \text{ を満たす}$$

$$\sum_{k=1}^n y_{kij} \leq M u_{ij}, \quad i, j=1, \dots, m \quad (2b)$$

$$M(u_{ij}-1)+1 \leq \sum_{k=1}^n y_{kij}, \quad i, j=1, \dots, m \quad (2c)$$

$$0 \leq u_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad i, j=1, \dots, m \quad (2d)$$

問題(2)であらたに加わった制約は、各拠点間の製品の総輸送量はトラック u_{ij} 台での輸送可能量以下という制約(2b)と、各拠点間の製品の総輸送量はトラック

$(u_{ij}-1)$ 台での輸送可能量以上という制約(2c)とトラックの台数に対する非負整数制約(2d)である。

あらたに加わった制約の係数はすべて0,1,-1ではないので、直接線形計画問題を解くことによって最適解は得られないが、 u_{ij} を除けばすべての係数は0,1,-1のみとなるので、 u_{ij} のみを整数変数とし、 u_{ij} を分枝変数とした分枝限定法による解法を適用できる。

2.2 適用例1

事例研究の対象とした企業では実際に5都市に生産と供給の拠点をもち、それらの都市間で製品が相互に輸送されている。生産と供給の拠点は、1:広島、2:大阪、3:名古屋、4:東京、5:仙台の5拠点あり、製品は3種類毎にまとめて輸送されると仮定して、3種類の製品 a_1, a_2, a_3 を取り扱う問題を考える。ここで、製品数を3種類と仮定することは、現実の問題の製品数としては比較的小さく感じられるが、実際にはサイズや価格の同じ製品群を意味しており、形状、色、表面化粧材料、金具等の違いにより、細かい品種は10から30倍程度になるが、本研究での考察にはその違いが現れないので、3製品との表現にしている。

各拠点、各製品ごとの需要、生産能力が与えられており、また各拠点間の1製品当たりの輸送コストが各製品共通で与えられているものとする。このような条件のもとで3種類の製品を10トントラック(最大積載量:200個)で輸送する場合について次の表1に示すデータに対して最適な生産・輸送量を計算する。

表1では例えば、製品 a_1 の1製品あたりの生産コストは広島では500であり、広島での需要が120で、広島での生産能力が100であることを示している。この場合、広島では他の拠点から製品を輸送しない限り、20製品が需要に対して不足する。

表1のデータを用いて、整数計画問題(2)を定式化し、Berkelaar によって開発された、分枝限定法に基づく混合整数計画問題を解くためのフリーウェアである lp_solve[3] を UNIX ワークステーション上で使用して解いた結果を表2、表3に示す。

この結果を見ると、製品 a_1 は仙台の生産コストが東京と比べるとかなり高く、さらに東京の生産能力に余裕があるため、仙台での需要をすべて東京からの輸送で賄っている。また、製品 a_2 は広島、名古屋、仙台で需要が生産能力を越えているので生産コストが割高でも生産能力に余裕のある大阪と東京から輸送するようになっている。さらに製品 a_3 の場合は仙台で足りない分を、名古屋と東京から輸送しているが、大阪から名古屋にも輸送している。これは、大阪の生産コストが

名古屋よりも安く、輸送コストの増加分を考慮しても、大阪から名古屋、名古屋から仙台へと輸送した方が総コストは小さくなるということを意味している。

各区間の総輸送量に関しては、大阪から広島へはトラック2台で370個の製品を輸送するようになっており、トラック2台分の容量400に近く、他の区間も、大阪から名古屋の280以外はトラックの容量である200の倍数に近くなっていて、できるだけトラックの容量一杯に

表1 モデルデータ

拠点		1. 広島	2. 大阪	3. 名古屋	4. 東京	5. 仙台
生産コスト	a_1	500	300	400	250	600
	a_2	1000	1200	900	1300	1100
	a_3	700	1000	1200	1100	800
需 要	a_1	120	160	120	240	80
	a_2	1200	1600	1200	2400	800
	a_3	400	1040	560	800	1600
生産能力	a_1	100	250	100	400	50
	a_2	1000	2500	1000	4000	500
	a_3	300	1200	2000	1000	1000
輸送コスト (各製品共通)	$d_{12} = d_{21}$	= 100 (広 島 $\longleftrightarrow$ 大 阪)				
	$d_{13} = d_{31}$	= 150 ($\longleftrightarrow$ 名古屋)				
	$d_{14} = d_{41}$	= 300 ($\longleftrightarrow$ 東 京)				
	$d_{15} = d_{51}$	= 450 ($\longleftrightarrow$ 仙 台)				
	$d_{23} = d_{32}$	= 50 (大 阪 $\longleftrightarrow$ 名古屋)				
	$d_{24} = d_{42}$	= 200 ($\longleftrightarrow$ 東 京)				
	$d_{25} = d_{52}$	= 350 ($\longleftrightarrow$ 仙 台)				
	$d_{34} = d_{43}$	= 150 (名古屋 $\longleftrightarrow$ 東 京)				
	$d_{35} = d_{53}$	= 300 ($\longleftrightarrow$ 仙 台)				
	$d_{45} = d_{54}$	= 150 (東 京 $\longleftrightarrow$ 仙 台)				

表2 適用例1の生産量

拠点		1. 広島	2. 大阪	3. 名古屋	4. 東京	5. 仙台
a_1	生産	50	250	100	320	0
	受入	70	-90	20	-80	80
	需要	120	160	120	240	80
	能力	100	250	100	400	50
a_2	生産	1000	2000	1000	2700	500
	受入	200	-400	200	-300	300
	需要	1200	1600	1200	2400	800
	能力	1000	2500	1000	4000	500
a_3	生産	300	1200	900	1000	1000
	受入	100	-160	-340	-200	600
	需要	400	1040	560	800	1600
	能力	300	1200	2000	1000	1000

表3 適用例1の輸送量と総コスト

出発地 → 到着地	トラック (台数)	製品 a_1 y_{1ij}	製品 a_2 y_{2ij}	製品 a_3 y_{3ij}	合計
大 阪 → 広 島	$u_{21} = 2$	70	200	100	370
大 阪 → 名古屋	$u_{23} = 2$	20	200	60	280
名古屋 → 仙 台	$u_{35} = 2$	0	0	400	400
東 京 → 仙 台	$u_{45} = 3$	80	300	200	580
総コスト: $z = 13240000$ (生産: 12970000, 輸送: 270000)					

製品を載せることができるように各製品の生産量及び輸送量が決められていることが分かる。

事例研究の対象とした企業では、すでに述べたように5都市3製品の問題を取り扱えばよかったが、より大規模な問題に対する考察も有用である。分枝限定法を基礎とするフリーウェアを用いた場合、本論文でのモデルでは5都市10製品以上の問題では、本研究と同じ計算機環境では計算時間の意味で実用上の限界であることが追加的な数値実験で検証されている。それ以上の問題に対しては、近年有効性が示されている遺伝的アルゴリズムのような解法を導入する必要があると考えられる。

3. ファジィ生産・輸送計画

3.1 ファジィ目標・ファジィ制約を導入した定式化

現実にかかる生産・輸送問題では、とくに需要や生産能力の数値は予測、あるいは設備設計時に計画した値が用いられ、使用できる数値が必ずしも適切でない場合がある。そのようなときには特定の数値を用いて定式化するよりも、目的関数や制約式の満足度合いを考慮したファジィ目標やファジィ制約を導入した定式化や、パラメータのあいまい性を考慮するためにファジィパラメータを含む定式化が有効になると考えられる。本節では、生産・輸送計画問題において、生産量や製品供給の満足度を考慮してファジィ目標やファジィ制約を導入した定式化を行い、その適用例を示す。

各拠点での需要は $\pm s$ (100s%)の変動があり、生産能力に関しては最大の生産能力に対して実際には $-p$ (100p%)まで変動する可能性があるとする。目的関数値である総コストに対しては、過去の経験から目標値 z_0 と許容幅 d_z を決めるものとする。

2.1節で考察した複数製品をトラックで輸送するとして定式化した問題(2)に対して、需要と生産能力が含まれている制約条件式

$$x_{ki} \leq P_{ki}, \quad i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, n \quad (1b)$$

$$w_{ki} \triangleq x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^m y_{kij} + \sum_{j=1, j \neq i}^m y_{kji} \geq S_i, \quad i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, n \quad (1d)$$

と、目的関数

$$z = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ki} x_{ki} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1, j \neq i}^m M d_{ij} u_{ij} \quad (2a)$$

に対して、図1、図2、図3のような線形メンバシップ関数を次のように定義する。

生産量に関する制約式(1b)に関しては、

$$\mu_{P_{ki}}(x_{ki}) = \begin{cases} 1, & x_{ki} < (1-p)P_{ki} \\ 1 + \frac{(1-p)P_{ki} - x_{ki}}{pP_{ki}}, & (1-p)P_{ki} \leq x_{ki} \leq P_{ki} \\ 0, & P_{ki} < x_{ki}. \end{cases} \quad (3)$$

である。需要に関する制約式(1d)に関しては、

$$\mu_{S_i}(w_{ki}) = \begin{cases} 0, & w_{ki} < (1-s)S_i \\ 1 - \frac{(1+s)S_i - w_{ki}}{2sS_i}, & (1-s)S_i \leq w_{ki} \leq (1+s)S_i \\ 1, & (1+s)S_i < w_{ki}. \end{cases} \quad (4)$$

である。また、目的関数(2a)に関しては、

$$\mu_z(z) = \begin{cases} 1, & z < z_0 \\ 1 + \frac{z_0 - z}{d_z}, & z_0 \leq z \leq z_0 + d_z \\ 0, & z_0 + d_z < z. \end{cases} \quad (5)$$

図1 生産能力に関するメンバシップ関数

図2 需要に関するメンバシップ関数

図3 総コストに関するメンバシップ関数

である。

Bellman and Zadeh[1]のファジィ決定に従い、統合オペレータとして最小オペレータを採用すると、次の問題を解くことによって最小のメンバシップ関数値を最大化させる解を得ることができる[12,17].

$$\max \lambda \quad (6a)$$

$$\text{s. t. } \mu_z(z) \geq \lambda \quad (6b)$$

$$\mu_{P_{ki}}(x_{ki}) \geq \lambda, \quad k=1, \dots, n, \quad i=1, \dots, m \quad (6c)$$

$$\mu_{S_{ki}}(w_{ki}) \geq \lambda, \quad k=1, \dots, n, \quad i=1, \dots, m \quad (6d)$$

(1c), (1e), (2b), (2c), (2d)を満たす

さらに、メンバシップ関数の重み付け和が採用された Bellman and Zadeh[1]による凸ファジィ決定に従うと、次の問題を定式化することができる。

$$\max \alpha \mu_z(z) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \mu_{P_{ki}}(x_{ki}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \gamma_{ki} \mu_{S_{ki}}(w_{ki}) \quad (7)$$

s. t. (1c), (1e), (2b), (2c), (2d)を満たす

ここで、 $\alpha, \beta_{ki}, \gamma_{ki}$ は各メンバシップ関数の重み係数である。

3.2 適用例2

表1で示した5拠点3製品の問題をファジィ目標とファジィ制約を導入して定式化し、統合関数として和オペレータを用いた問題(7)を解く。各拠点での需要は±20%の変動があり、生産能力に関しては最大の生産能力に対して実際には−20%まで変動する可能性があるとし、目的関数値である総コストに対しては、適用例1の結果を考慮し、目標値 $z_0=13000000$ と許容幅 $d_z=1000000$ とし、各メンバシップ関数の重み係数を1として得られた結果を表4、表5、表6に示す。

生産能力に関しては、生産能力の上限 P_{ki} に達した場合、満足度を0とし、その80%で満足度を1としているので、製品 a_1 の東京、製品 a_3 の仙台を除いて、上限 P_{ki} の80%で生産している。需要に関しては、需要予測 S_{ki} の1.2倍を満足度1とし、0.8倍を満足度0としたが、計算結果は約70%の拠点と製品に関して満足度1となり、平均の満足度も70%を超える結果となった。

適用例1と比較すると、適用例1では生産能力の限界まで達したときの満足度を0とするようなファジィ制約がないので、製品 a_1 の大阪、名古屋、製品 a_2 の広島、名古屋、仙台、製品 a_3 の広島、大阪、東京では生産コストの低い拠点として限界まで生産している。一方、各製品の総生産量に関しては製品 a_1 のみが適用例

2で80だけ多く生産していて、他の製品に関しては同量生産している。したがって、適用例2では生産能力に余裕を持たせるために比較してコストの高い拠点での生産が増加しているために生産コストが13344000となり、適用例1の生産コスト1297000とくらべると高いコストの生産となっている。また、それに伴って輸送コストも適用例2では540000となり、適用例1の270000に比べて高い。

これらのことより、適用例2では各拠点での生産能力に対して余裕をもたせ、需要予測より多めの製品供給がなされた上で、総コストを最小化する解が示されているが、適用例1では生産能力の上限で生産し、需要予測に一致した製品の供給を行い、そのような状況の下で総コストが最小化された解が与えられていることがわかる。

従って、ファジィ計画を導入することによって、工

表4 適用例2の生産量

拠点	1. 広島	2. 大阪	3. 名古屋	4. 東京	5. 仙台
a_1 生産	80	200	80	400	40
受入	64	−8	64	−176	56
需要	120	160	120	240	80
能力	100	250	100	400	50
a_2 生産	800	2000	800	3200	400
受入	640	−600	640	−1240	560
需要	1200	1600	1200	2400	800
能力	1000	2500	1000	4000	500
a_3 生産	240	960	1600	800	800
受入	240	−48	−928	160	480
需要	400	1040	560	800	1600
能力	300	1200	2000	1000	800

表5 適用例2の輸送量と総コスト

出発地 → 到着地	トラック (台数)	製品 a_1 y_{1ij}	製品 a_2 y_{2ij}	製品 a_3 y_{3ij}	合計
大 阪 → 広 島	$u_{21} = 4$	8	600	152	768
名古屋 → 広 島	$u_{31} = 1$	56	40	88	184
名古屋 → 大 阪	$u_{32} = 1$	0	0	200	200
名古屋 → 東 京	$u_{34} = 4$	0	0	640	640
東 京 → 名古屋	$u_{43} = 4$	120	680	0	800
東 京 → 仙 台	$u_{45} = 6$	56	560	480	1096
総コスト: $z = 13884000$ (生産: 13344000, 輸送: 540000)					

表6 適用例2のメンバシップ関数値

	$\mu_z = 0.116$				
	1. 広島	2. 大阪	3. 名古屋	4. 東京	5. 仙台
μ_{P_1}	1.0	1.0	1.0	0.0	1.0
μ_{P_2}	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
μ_{P_3}	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
μ_{S_1}	1.0	1.0	1.0	0.333	1.0
μ_{S_2}	1.0	0.188	1.0	0.042	1.0
μ_{S_3}	1.0	0.192	1.0	1.0	0.0

場の生産能力の上限での製造が安定していない場合や予測された需要量が正確に見積もられていない場合には、総コストを犠牲にしても、工場での安定した生産計画の立案や、販売の機会を失うことの少ない製品の供給を可能にする生産・輸送計画が立案できるようになったと考えられる。

4. 利益およびコストの分配

4.1 協力ゲームの解による分配計画

これまでの節では、生産と輸送のコストを最小にする生産・輸送計画、あるいは生産量や製品供給の満足度を考慮した上でのコスト最小化による生産・輸送計画を考察してきた。このことは、各拠点間の協調を基礎として生産・輸送計画が決定されることを意味する。しかし、各拠点に独立性の高い事業部があると考えると合理的なコストあるいは利益の分配が保証されなければ、そのような協調を維持することは困難になる。

コストあるいは利益の分配案としての基礎的な手法には比例分配、均等分配、等余剰分配などが考えられるが、これらの手法にはそれぞれ問題点があり、提携の概念を導入し、協力ゲームの解の概念を用いた分配案が考察されている[5,9]。

そこで、本節では複数の拠点で協調して生産と輸送のコストを最小にする生産・輸送計画を最適化の手法によって立案した結果、その計画に基づいて予想される利益やコストを協力ゲームの考えを利用して各拠点に分配する問題を考察する[4,10]。

各拠点を協力ゲームにおけるプレイヤーとし、その集合を $N = \{1, \dots, m\}$ とする。 N の部分集合 S を提携と呼ぶ。このとき、各提携 S の値 $v(S)$ は問題

$$\min \sum_{k=1}^n \sum_{i \in S} c_{ki} x_{ki} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} m d_{ij} u_{ij} \quad (8a)$$

$$\text{s. t. } x_{ki} \leq P_{ki}, \quad k=1, \dots, n, \quad i \in S \quad (8b)$$

$$x_{ki} \geq \sum_{j \in S, j \neq i} y_{kij}, \quad k=1, \dots, n, \quad i, j \in S \quad (8c)$$

$$x_{ki} - \sum_{j \in S, j \neq i} y_{kij} + \sum_{j \in S, j \neq i} y_{kji} \geq S_{ki}, \quad k=1, \dots, n, \quad i, j \in S \quad (8d)$$

$$\sum_{k=1}^n y_{kij} \leq M u_{ij}, \quad k=1, \dots, n, \quad i, j \in S \quad (8e)$$

$$M(u_{ij}-1)+1 \leq \sum_{k=1}^n y_{kij}, \quad k=1, \dots, n, \quad i, j \in S \quad (8f)$$

$$0 \leq x_{ki} \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq y_{kij} \in \mathbf{Z}, \quad k=1, \dots, n, \quad i, j \in S \quad (8g)$$

$$0 \leq u_{ij} \in \mathbf{Z}, \quad i, j \in S \quad (8h)$$

の最適解から計算される。得られた最適解に従って、各製品は各拠点で生産され、拠点間で輸送されるとす

る。各拠点では、需要量だけ製品が供給され、それらの製品は当該拠点の生産コストと他の拠点から輸送された製品のコストを考慮した価格で販売されるとする。

また、ある提携 S に関して、問題(8)は実行不可能となる場合があり、単に問題(8)の最適値、すなわちコストを $v(S)$ にすると、需要を満足できない提携に対するペナルティーを考慮できない。そのため、需要に満たない製品に対して、機会損失が生じるとして利益から差し引き、各提携の合計の利益を計算する。その利益から正規化された利得を計算し、提携 S の値 $v(S)$ とし、ゲーム (N, v) を考える。協力ゲームの解である仁(nucleolus)[14,15]を適用し、全体提携 N に対する問題(8)の最適解から計算される利益を各拠点に分配する。仁は必ず存在し、唯一に定まるという望ましい性質をもっているため、本問題における分配計画の良い候補となると考えられる[9]。

協力ゲーム (N, v) が与えられたとき、仁は次のように定義される。仁は一種の辞書式順序解であり、提携の余剰(excess)という概念が基礎となっている。

[定義1] (ゲーム (N, v) における提携の余剰) ゲーム (N, v) において、 S を提携とし、 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{R}^m$ を利得ベクトルとする。このとき、 $\mathbf{z}$ に対する提携 S の余剰は

$$e(S, \mathbf{z}) = v(S) - \sum_{i \in S} z_i \quad (9)$$

である。

[定義2] (辞書式順序) $(r_1(\mathbf{z}), r_2(\mathbf{z}), \dots, r_k(\mathbf{z}))$ を非増加の順に並んだベクトルとする。すなわち、 $i < j$ ならば、 $r_i(\mathbf{z}) \geq r_j(\mathbf{z})$ である。そのとき、任意の利得ベクトル $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^m$ に関して、最初に異なる要素が $r_h(\mathbf{z}) < r_h(\mathbf{w})$ となるか、または $\mathbf{z} = \mathbf{w}$ となるか、 $\mathbf{z}$ は $\mathbf{w}$ よりも辞書式順序で小さいまたは等しいという。また、この辞書式順序を表わす記号を $\leq_L$ で表現する。

[定義3] (ゲーム (N, v) における仁) ゲーム (N, v) に関して、空集合 $\emptyset$ と全体提携 N を除くすべての提携の余剰のベクトル $e(S_1, \mathbf{z}), e(S_2, \mathbf{z}), \dots, e(S_{2^n-2}, \mathbf{z})$ が非増加の順に並んでいるとする。そのとき、余剰のベクトルを辞書式順で最小化する解

$$N(N, v) = \{ \mathbf{z} \in X(N, v) \mid (e(S_1, \mathbf{z}), \dots, e(S_{2^n-2}, \mathbf{z})) \leq_L (e(S_1, \mathbf{y}), \dots, e(S_{2^n-2}, \mathbf{y})), \forall \mathbf{y} \in X(N, v) \} \quad (10)$$

を仁と呼ぶ。ここで $X(N, v)$ はゲーム (N, v) の配分(imputation)で次のように定義される。

$$X(N, v) = \{ \mathbf{z} \in \mathbf{R}^m \mid \sum_{i \in N} z_i = v(N) = 1, z_i \geq v(\{i\}) = 0, i=1, 2, \dots, m \} \quad (11)$$

上述のように定義された π の計算方法はKopelowitz[6]によって与えられた。 π は最大の余剰を最小にする利得ベクトルの集合に属するので、 π の計算方法は最大余剰の最小化問題を解き、最適解が唯一解でないときには、その問題を一部変更し唯一の最適解を求めるまで繰り返すというアルゴリズムによって求めることができる。最初の最大余剰の最小化問題は次のように表現される。

$$\min \varepsilon \quad (12a)$$

$$\text{s. t. } v(S) - \sum_{i \in S} z_i \leq \varepsilon, \quad \forall S \subset N \quad (12b)$$

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_m = v(N) = 1 \quad (12c)$$

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12d)$$

この問題の最適解 (z^*, ε^*) が唯一解であるならば、 z^* が π である。そうでなければ、任意の最適解 z^* に対して $v(\hat{S}) - \sum_{i \in \hat{S}} z_i^* = \varepsilon^*$ となる $\hat{S}$ に対して、最小化問題の不等式制約 $v(\hat{S}) - \sum_{i \in \hat{S}} z_i \leq \varepsilon$ を $v(\hat{S}) - \sum_{i \in \hat{S}} z_i = \varepsilon^*$ に代えて、再び最小化問題を解く。この手順を高々 $2^m - 1$ 回繰り返すことによって唯一の最適解が得られ、その最適解が π となる。 $\hat{S}$ は最小化問題の双対問題の解によって知ることができる。

π による配分率を $z_i^*, i = 1, \dots, m$ とし、見積もら

れた総利益を P とすると、分配される利益は Pz_i^* となる。供給される製品はすべて販売されるとすると、各生産拠点での製品ごとの価格が定まれば、各生産拠点で供給する製品量は $S = N$ とした全体提携の問題(8)を解くことによって得られるので、生産拠点 i での売上げ L_i が計算できる。さらに、生産拠点 i での生産量も全体提携の問題(8)の最適解により得られ、生産コスト CP_i が計算できる。したがって、各生産拠点が協調して生産・輸送したことによる調整コスト CC_i は

$$CC_i = L_i - Pz_i^* - CP_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (13)$$

によって計算できる。

4.2 適用例3

表1で示した5拠点3製品の問題に対して、利益およびコストの分配問題を考える。プレイヤーの集合を $N = \{1: \text{広島}, 2: \text{大阪}, 3: \text{名古屋}, 4: \text{東京}, 5: \text{仙台}\}$ とする。各製品の価格は当該拠点の生産コストと他の拠点から輸送された製品のコストを考慮して表7に示

表7 各製品の価格

製品	広	島	大	阪	名	古	東	京	仙	台
a_1	792		454		532		420		743	
a_2	1315		1403		1155		1545		1320	
a_3	1013		1238		1350		1268		1114	

表8 各提携のコストと売上げ

提携 S	生産コスト	輸送コスト	総コスト	売上げ	機会損失	利益	$v(S)$
{1}	1260000	0	1260000	1698100	63357	374743	0.060
{2}	3008000	0	3008000	3604960	0	596960	0.168
{3}	1612000	0	1612000	1964200	40273	311927	0.030
{4}	4060000	0	4060000	4823200	0	763200	0.249
{5}	1380000	0	1380000	1811150	181115	250035	0.000
{1,2}	4600000	53260	4653260	5683200	0	1029940	0.378
{1,3}	2992000	18400	3010400	3662300	103630	548270	0.144
{1,4}	5675000	133600	5808600	6901440	0	1092840	0.408
{1,5}	2640000	0	2640000	3509250	244472	624778	0.182
{2,3}	4832000	33600	4865600	5810800	0	945200	0.337
{2,4}	7068000	0	7068000	8428160	0	1360160	0.538
{2,5}	4917000	188160	5105160	6012640	81693	825787	0.279
{3,4}	5914000	73600	5987600	7029040	0	1041440	0.383
{3,5}	3712000	200400	3912400	4443750	109988	421362	0.083
{4,5}	6057500	97520	6155020	7275440	74267	1046153	0.386
{1,2,3}	6450000	82100	6532100	7889040	0	1356940	0.536
{1,2,4}	8660000	53260	8713260	10506400	0	1793140	0.747
{1,2,5}	6423000	217640	6640640	7989580	98576	1250364	0.485
{1,3,4}	7552000	177200	7729200	9107280	0	1378080	0.546
{1,3,5}	5092000	218800	5310800	6243150	156461	775889	0.255
{1,4,5}	7582500	171000	7753500	9252380	91150	1407730	0.561
{2,3,4}	8892000	33600	8925600	10634000	0	1708400	0.706
{2,3,5}	7291000	384880	7675880	8708640	0	1032760	0.379
{2,4,5}	9225500	158960	9384460	11058640	44560	1629620	0.668
{3,4,5}	8388000	312840	8700840	9926880	0	1226040	0.473
{1,2,3,4}	10510000	82100	10592100	12712240	0	2120140	0.906
{1,2,3,5}	8927000	426780	9353780	10786880	0	1433100	0.573
{1,2,4,5}	10731500	188440	10919940	13035580	61726	2053914	0.874
{1,3,4,5}	10032000	415080	10447080	12005120	0	1558040	0.634
{2,3,4,5}	11352000	276920	11628920	13531840	0	1902920	0.801
{1,2,3,4,5}	12970000	325420	13295420	15610080	0	2314660	1.000

される価格で販売されるとする。

N のすべての部分集合に対して、問題(8)を解いた結果を表8に示す。ただし、実行不可能な問題に対しては実行可能な範囲で生産し、 S に属する拠点間の輸送も考慮している。

表8のように得られた利益を0-1正規化して各提携の値 $v(S)$ として π による配分率を計算し、その配分率で利益を各拠点に分配した結果を表9に示す。

配分率は協力ゲームの解である π から計算され、その率に従って総利益2314660が各拠点に分配される。費用の分担は分配された利益から式(13)に基づいて輸送コストに当たる部分が調整コストとして計算され、各拠点に課せられる。

表9を見ると利益の配分に関しては、東京の配分率が最も高い。これは、すべての製品の需要に対して拠点内での生産で対応しており、需要も大きいことがあげられる。大阪も同様の特徴をもつが、東京は製品 a_2 の販売価格が大阪に比べて高く、さらにその需要が大きいため東京の配分率が高いと考えられる。また、表8の利益を見ればわかるように名古屋あるいは仙台がメンバーとなる提携の利益が低いため、名古屋と仙台については配分率が低いと考えられる。

5. おわりに

本論文では、既存の生産拠点(工場)で製品を生産し、かつその生産拠点自身が需要地でもある問題を取り扱い、各生産拠点での生産能力と需要の条件のもとで製造コストと輸送コストの合計を最小にする生産・輸送計画を決定する問題を考察した。複数製品をまとめてトラックによる輸送を考慮した問題、および工場の生産量や生産供給量の満足度を考慮したファジィ生産・輸送計画問題を定式化し、適用例を示した。最後に、複数の拠点が協調して作成した生産・輸送計画による利益やコストの分配問題に対して、協力ゲームの解に基づく分配計画を示し、その適用例を示した。

参考文献

- [1] R.E. Bellman and L.A. Zadeh, "Decision making in a fuzzy environment," *Management Science*, vol.17, pp.209-215, 1970.
- [2] J.E. Beasley, "Lagrangian heuristics for location problems," *European Journal of Operational Research*, vol.65, pp.389-399, 1993.
- [3] M. Berkelaar, "lp_solve 2.0," ftp://ftp.es.ele.tue.nl/pub/lp_solve
- [4] I. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [5] H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [6] A. Kopelowitz, Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of cooperative games as locuses in the strong ϵ -core, *Research Memo.* 31, *Dept. of Math.*, Hebrew University, 1967.
- [7] J. Krarup and P.W. Pruzan, "The simple plant location problem: survey and synthesis," *European Journal of Operational Research*, vol.12, pp.36-81, 1983.
- [8] C.Y. Lee, "A cross decomposition algorithm for a multiproduct-multitype facility location problem," *Computers and Operations Research*, vol.20, pp.527-510, 1993.
- [9] M. Maschler, "The bargaining set, kernel and nucleolus," in: R.J. Aumann and S. Hart Eds., *Handbook of Game Theory*, vol.1, ch.18, pp.591-667, Elsevier Science Publishers, 1992.
- [10] G. Owen, "On the core of linear production games," *Mathematical Programming*, vol.9, pp.358-370, 1975.
- [11] H. Pirkul and V. Jayaraman, "Production, transportation, and distribution planning in a multi-commodity tri-echelon system," *Transportation Science*, vol.30, pp.291-302, 1996.
- [12] M. Sakawa, *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York, 1993.
- [13] H. M. Salkin and K. Mathur, *Foundation of Integer Programming*, North-Holland, New York, 1989.
- [14] D. Schmeidler, "The nucleolus of a characteristic function game," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol.17, pp.1163-1170, 1969.
- [15] 鈴木光男, 新ゲーム理論, 勁草書房, 1994.
- [16] R. Sridharan, "A lagrangian heuristic for the capacitated plant location problem with single source constraints," *European Journal of Operational Research*, vol.65, pp.389-399, 1993.

表9 利益の分配結果

拠点	配分率	生産コスト	調整コスト	総コスト	売上げ	配分利益
1: 広島	0.165239	1235000	460768	1695768	2078240	382472
2: 大阪	0.327849	3699000	-852899	2846101	3604960	758859
3: 名古屋	0.077235	1996000	31067	2027067	2205840	178773
4: 東京	0.379218	4690000	-744561	3945439	4823200	877761
5: 仙台	0.050459	1350000	1431045	2781045	2897840	116795
合計	1.000	12970000	325420	13295420	15610080	2314660

- [17] H.-J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems*, vol.1, pp.45-55, 1978.

(1998年10月 8日 受 付)

(1999年 1月14日 再受付)

[問い合わせ先]

〒739-8527

東広島市鏡山1-4-1

広島大学工学部第二類(電気系)

計数管理工学講座

坂和 正敏

TEL : 0824(24)7694/(22)7159

FAX : 0824(24)7694/(22)7195

E-mail : sakawa@msl.sys.hiroshima-u.ac.jp

著 者 紹 介

坂和 正敏 (さかわ まさとし)

広島大学工学部第二類(電気系)

昭45 京大・工・数理卒, 昭50 同大学院博士課程了, 昭50 神大・工・システム助手, 昭56 同助教授, 昭62 岩手大・工・教授を経て, 平2 広島大・工・第二類(電気系)計数管理工学講座教授となり現在に至る。大規模システム, 多目的システム, ファジィシステムにおける意思決定手法とその応用に関する研究に従事。工博。著書線形システムの最適化, 非線形システムの最適化, ファジィ理論の基礎と応用, 経営数理システムの基礎(森北出版), ソフト最適化, 遺伝的アルゴリズム(朝倉書店), *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization* (Plenum Press)等。

西崎 一郎 (にしざき いちろう)

広島大学工学部第二類(電気系)

昭57 神大・工・システム卒, 昭59 同大学大学院修士課程了, 同年 新日本製鐵(株)入社。平2 京大・経研・助手。平5 摂南大・経営情報・助教授。平9 広島大・工・第二類(電気系)計数管理工学講座助教授となり現在に至る。博士(工学)。ファジィおよび多目的環境におけるゲーム理論, 意思決定に関する研究に従事。

植村 芳雄 (うへむら よしお)

(株)住建産業

昭51 山口大・文理・理学卒, 同年(株)住建産業入社。平6 広島修道大・大学院・商学研究科入学。平8 同大学院商学研究科修了。平9 同社製造管理部次長兼物流部企画管理課課長となり現在に至る。ファジィおよび多目的システムにおける意思決定手法とその応用に関する研究に従事。

Fuzzy Programming and Profit and Cost Allocation for a Production and Transportaion Problem in a Housing Material Manufacturer —A Case Study—

by

Masatoshi SAKAWA, Ichiro Nishizaki and Yoshio UEMURA

Abstract :

In this paper, we deal with a real problem on production and transportation in a housing material manufacturer, and consider a production and transportation planning under the assumption that the manufacturer makes multiple products at factories in multiple regions and the products are in demand in each of the regions. First, we formulate mixed zero-one programming problems so as to minimize the cost of production and transportation satisfying production capacities and demands. Second, to realize satble production and satisfactory supply of the products, fuzzy programming for the production and transportation problem is incorporated. Finally, under the optimal planning of production and transportation, we show a profit and cost allocation by applying a solution concept from game theory. Practical applications for all the models are given.

Keywords : Production and Transportation Problem, Fuzzy Programming, Profit and Cost Allocation

Contact Address : **Masatoshi SAKAWA**

Faculty of Engineering, Hiroshima University

1-4-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 739-8527 Japan

TEL : 0824-24-7694/22-7159

FAX : 0824-24-7694/22-7195

E-mail : sakawa@msl.sys.hiroshima-u.ac.jp