論文

目的関数の係数ベクトルが凸多面体で 表された線形計画問題における 可能的最適端点の列挙[†]

乾口 雅弘* 東谷 英貴* 谷野 哲三*

本研究では、目的関数の係数ベクトルが凸多面体に制限された線形計画問題が取り扱われる。この問題では、従来の区間係数をもった線形計画問題では取り扱えなかった不明確な係数間の相互関係(従属性)を取り扱うことができる。目的関数の係数が不明確な線形計画問題に対して、可能的最適解と必然的最適解が定義できる。必然的最適解は最も合理的な解である反面、存在しない場合が多い。一方、可能的最適解は最低限の合理性を満たす解であり、通常、無数に存在する。任意の可能的最適解は可能的最適端点の凸結合で表されるので、可能的最適端点をすべて列挙することは、合理的な解の存在範囲を知る上で重要となる。そこで、可能的最適端点を列挙する方法を議論する。可能的最適解集合はある多目的線形計画問題の弱有効解集合と一致することが示される。これにより、ある可能的最適基底解から隣接する基底解をたどることにより、すべての可能的最適端点を列挙することが可能となる。この際、隣接する基底解の可能的最適性テストが必要になる。この可能的最適性テスト問題が線形計画問題となることが示され、可能的最適端点の列挙法が提案される。多くの応用例においては、可能的最適端点集合を含む集合が得られれば十分である。与えられた凸多面体を包含する超立方体を求め、区間係数の場合に提案されている Steuer の列挙法を用いれば、可能的最適端点集合を含む集合を求めることができる。提案列挙法の有用性を確認するため、提案列挙法と凸多面体を包含する超立方体を用いた Steuer の列挙法とを数値実験により比較する。結果として、提案列挙法がより効率的であることが示される。

キーワード：線形計画法、不明確な係数、可能的最適解、列挙、端点、シンプレックス法

1. はじめに

本研究では、目的関数の係数ベクトルが不明確で、その取りうる範囲が凸多面体で表された線形計画問題を取り扱う。従来、係数が不明確でその取りうる範囲が閉区間で与えられた線形計画問題として、区間線形計画問題[1]が考えられているが、この問題では、不明確な係数は互いに独立と仮定されており、係数間の従属性が取り扱うことができない。本研究で取り扱う問題では、係数ベクトルの取りうる範囲を凸多面体と一般化することにより、係数間の従属性を取り扱うことができる。また、これにより、区間線形計画問題では取り扱えなかった非負条件のない変数(自由変数)をも取り扱うことができる。不明確な目的関数の係数ベクトルをもつ線形計画問題に対して、可能的最適解と必然的最適解とが提案されている[2]。必然的最適解は最も合理的な解概念である反面、存在しない場合が多い。

一方、可能的最適解は最も緩い最適解の概念で、通常、無数に存在する。したがって、多くの場合、可能的最適集合の中から、ある基準に従って解を選択することになる[3][4]。問題の制約領域が有界であるとき、可能的最適端点の数は有限になる。任意の可能的最適解は可能的最適端点の凸結合で表現されるので、可能的最適端点をすべて列挙することは、合理的な解の範囲を知る上で重要となる。さらに、可能的最適端点が列挙されていれば、最大リグレット最小解[3]や最悪達成率最適解[4]の計算も容易になる。そこで、制約領域が有界である問題について、すべての可能的最適端点の列挙法を考察する。

各係数の取りうる範囲が閉区間である場合については、よく研究されており、可能的最適解や可能的最適端点列挙について有用な結果が得られている。たとえば、可能的最適解を求めることはある多目的線形計画問題の弱有効解[5]を求めることと等価になることが示されている[3]。これにより、可能的最適解が多目的線形計画問題の弱有効解と同じ性質をもつことがわかる。可能的最適端点の列挙に焦点を絞れば、可能的最適解集合は連結的で、任意の可能的最適解は可能的最適端点の凸結合で表現できることがわかるので、弱有効端点の列挙と同様に隣接基底解をたどってすべての

[†] Enumeration of Possibly Optimal Extreme Points in Linear Programming Problems with Single Objective Function Coefficient Vectors in Convex Polytopes
Masahiro INUIGUCHI, Hidetaka HIGASHITANI and Tetsuzo TANINO

* 大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻
Graduate School of Engineering, Osaka University

可能的最適端点が列挙できることになる。また、可能的最適端点の列挙に多目的線形計画問題の弱有効端点を列挙する方法をそのまま適用することも可能となる。しかし、対応する多目的線形計画問題の目的関数の数が極端に大きいので、弱有効性をテストする問題の規模が大きくなり、ワーキングメモリーや計算時間の面で現実的ではない。Steuer[1]は、ある可能的最適基底解の隣接基底解が可能的最適解であるか否かをテストする問題が小規模な線形計画問題になることを示し、係数の範囲が区間で与えられる場合の可能的最適端点の列挙法を提案している。

本研究では、目的関数の係数ベクトルの取りうる範囲が凸多面体で与えられる場合についても可能的最適解がある多目的線形計画問題の弱有効解と一致することを示し、可能的最適基底解から隣接基底解をたどることにより、すべての可能的最適端点が列挙できることを述べる。係数ベクトルの取りうる範囲が凸多面体である場合に対する隣接基底解の可能的最適性テスト問題が線形計画問題になることを示し、Steuerの列挙法を係数ベクトルの取りうる範囲が凸多面体の場合に拡張する。最大リグレット最小解[3]や最悪達成率最適解[4]を求める場合には、可能的最適端点集合を含む集合が得られれば十分である。このことから、凸多面体を覆う超直方体を定め、従来のSteuerの方法を適用し、すべての可能的最適端点を含む端点集合を求めることが考えられる。凸多面体が超直方体の場合、すなわち、係数の取りうる範囲が閉区間の場合には、隣接基底解の可能的最適性テストは、一般の凸多面体の場合より簡単な問題になることが多いので、可能的最適性テストに要する計算コストが削減できる。その反面、より広い範囲の係数ベクトルを考えることになるので、列挙する基底解が増え、その分、計算コストも増加するという欠点がある。そこで、提案法によりすべての可能的最適端点を列挙する場合と凸多面体を含む最小の超直方体を求め、従来のSteuerの方法で列挙する場合とを数値実験により比較し、提案法の有用性を確認する。

2. 目的関数の係数が不明確な線形計画問題

目的関数の係数が不明確である線形計画問題、

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x} \\ &\text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

を考える。ただし、 A は $m \times n$ 行列($m < n$)であり、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 、 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ である。 $\boldsymbol{\gamma}$ は可能性変数ベクトルであり、その実現値 $\mathbf{c}$ の取りうる範囲は次の有界な凸多面体

Γ で与えられる。

$$\Gamma = \{\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \mid D\mathbf{c} \leq \mathbf{g}\} \quad (2)$$

D は $p \times n$ 行列であり、 $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_p)^T$ である。問題(1)の制約領域を X と記し、有界であると仮定する。

問題(1)では、非負条件 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ が加わっているが、制御問題を線形計画法で解く場合などにおいては、非負とは限らない自由変数を含むこともある。そこで、自由変数を含む場合にも、非負条件をもつ問題に変形できることを示そう。すなわち、非負条件を含まない問題、

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x} \\ &\text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3)$$

を考える。 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$ 、 $\mathbf{x}^{+T} \mathbf{x}^- = 0$ なる非負変数 $\mathbf{x}^+ \geq \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{x}^- \geq \mathbf{0}$ を導入すると、式(3)は、

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x}^+ - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x}^- \\ &\text{subject to } A\mathbf{x}^+ - A\mathbf{x}^- = \mathbf{b}, \\ &\quad \mathbf{x}^- \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^+ \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ただし、 $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ である。シンプレックス法を適用する限り、 $\mathbf{x}^{+T} \mathbf{x}^- = 0$ が常に満たされる。 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{\gamma}^T, -\boldsymbol{\gamma}^T)^T$ 、 $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^{+T}, \mathbf{x}^{-T})^T$ 、 $\hat{A} = (A, -A)$ 、

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} D & -D \\ I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

とし、 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ の取りうる範囲を

$$\hat{\Gamma} = \{\hat{\mathbf{c}} = (c_1, c_2, \dots, c_{2n})^T \mid \hat{D}\hat{\mathbf{c}} \leq \hat{\mathbf{g}}\} \quad (5)$$

と定めると、式(4)は次の非負条件を含む問題なる。

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T \hat{\mathbf{x}} \\ &\text{subject to } \hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 I_n は n 次単位行列である。このように、自由変数を含む問題も、問題(1)の形に変形できる。

ここで、 $\hat{\Gamma}$ において、新たに制約条件 $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T = (c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_{2n})^T$ が加わっていることに注意すると、目的関数の係数が閉区間で制限される区間線形計画問題の場合には、問題(1)の形では自由変数が取り扱えないことがわかる。

$\mathbf{c}$ を目的関数の係数ベクトルとすると、線形計画問題の最適解の集合 $Opt(\mathbf{c})$ は、

$$Opt(\mathbf{c}) = \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \max_{\mathbf{y} \in X} \mathbf{c}^T \mathbf{y}\} \quad (7)$$

となる。問題(1)では、 $\boldsymbol{\gamma}$ の実現値 $\mathbf{c}$ が凸多面体 Γ 内にあることしかわかっていないので、問題(1)に対して次の二つの最適解集合が定義できる。

$$\Pi S = \bigcup_{\mathbf{c} \in \Gamma} Opt(\mathbf{c}) \quad (8)$$

$$NS = \bigcap_{c \in \Gamma} Opt(c) \quad (9)$$

Γ 内のすべての c に対して最適となる必然的最適解集合 NS は空である場合が多いので、最終的な解の選択のためには、 Γ 内の少なくとも一つの c に対して最適となる可能的最適解集合 NS が有用になる。次の定理は可能的最適解と問題(1)に対応して定まる多目的線形計画問題の弱有効解[5]とが等価になることを示している。

定理 $V(\Gamma) = \{c^1, c^2, \dots, c^q\}$ を凸多面体 Γ の頂点集合とする。問題(1)の可能的最適解集合 NS は次の q 個の目的関数をもつ多目的線形計画問題の弱有効解集合に一致する。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } Cx \\ & \text{subject to } x \in X = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $q \times n$ 行列 C は次式で定められる。

$$C = (c^1, c^2, \dots, c^q)^T \quad (11)$$

また、 $x \in X$ とするとき、 $Cy > Cx$ なる $y \in X$ が存在しないとき、 x は問題(10)の弱有効解と呼ばれる。

(証明) x が問題(10)の弱有効解とすると、 $Cy > Cx$ なる $y \in X$ が存在しない。このとき、任意の $y \in X$ について、 $\lambda^T Cy \leq \lambda^T Cx$ となり、 $\sum_{j=1}^q \lambda_j = 1$ を満たす $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)^T \geq 0$ が存在することが知られている[5]。したがって、 x は目的関数の係数ベクトルを $\lambda^T C$ とする線形計画問題の最適解となる。 C の定義より、 $\lambda^T C \in \Gamma$ となるので、 x が問題(1)の可能的最適解であることがわかる。逆に、 z を可能的最適解とすると、 z を最適解とする目的関数の係数ベクトル $d \in \Gamma$ が存在する。さらに、 C の定義より、 $d = \mu^T C$ 、 $\sum_{j=1}^q \mu_j = 1$ を満たす $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)^T \geq 0$ が存在する。したがって、 z は目的関数の係数ベクトルを $\mu^T C$ とする線形計画問題の最適解となるので、問題(10)の弱有効解となる[5]。(証明終)

定理より、問題(1)の可能的最適解集合は問題(10)の弱有効解集合に一致する。多目的線形計画問題の弱有効解集合は連結的で、任意の弱有効解は弱有効端点の凸結合で表される[5]。したがって、問題(1)の可能的最適解集合も連結的で、任意の可能的最適解は可能的最適端点の凸結合で表される。また、シンプレックス法における基底解は端点を表していることより、弱有効基底解から隣接基底解をたどれば、すべての弱有効端点を列挙できる[5]ので、可能的最適基底解から隣接基底解をたどることにより、すべての可能的最適端点を列挙できる。

可能的最適端点集合を求めることは、問題(1)の合理的な解の存在範囲を知る上で重要ばかりでなく、最大

リグレット最小解[3]や最悪達成率最適解[4]を求める際にも有用となる。そこで、問題(1)のすべての可能的最適端点を求める方法を議論する。先に述べたように、ある一つの可能的最適基底解から隣接基底解をたどることにより、すべての可能的最適端点を列挙できるので、隣接基底解の可能的最適性をテストする方法を考察すればよい。

3. 可能的最適端点列挙法

何らかの方法により可能的最適基底解が求められたとする。現在の解の基底形式を求め、基底行列を B 、非基底変数の添え字集合を N とする。相対費用係数 p_j は、

$$p_j = c_k^T B^{-1} a_j - c_j \quad (12)$$

と表せる。ここで、 $c_k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_m^k)^T$ であり、 c_i^k は i 番目の基底変数に対する目的関数の係数を示している。

また、 a_j は行列 A の第 j 列である。

すべての $j \in N$ に対して、 $p_j \geq 0$ が成立するとき、現在の基底解が目的関数の係数ベクトルを c とする線形計画問題の最適解となること[5]、および、 $p_j \geq 0$ 、 $\forall j \in N$ で、 $p_k = 0$ 、 $k \in N$ となるとき、 k 番目の変数を基底に入れれば、別の最適基底解が得られることに注意すると、 k 番目の変数($k \in N$)を基底に入れることにより可能的最適基底解が得られるか否かの判定は、次の連立一次不等式の解の存否を調べれば良いことになる。

$$\begin{aligned} c_k^T B^{-1} a_j - c_j &\geq 0, \quad j \neq k, \quad j \in N \\ c_k^T B^{-1} a_k - c_k &= 0 \\ Dc &\leq g \end{aligned} \quad (13)$$

すなわち、式(13)を満たす c が存在するとき、 k 番目の変数を基底に入れることにより得られる解は可能的最適解になる。式(13)を満たす c の存否は、たとえば、2段階シンプレックス法の第1段階により判定できる。シンプレックス法を用いて線形計画問題を解く場合、計算効率性は経験的に制約条件数に依存する[6]。このことより、 D の行数 p が大きい、すなわち、 $p > m$ であれば、次の方法が適切であると考えられる。

行列 A, c, D を適当な置換により、 $\hat{A} = (B, A_N)$ 、 $\hat{c} = (c_k, c_N)$ 、 $\hat{D} = (D_k, D_N)$ とし、 $Y = ((B^{-1} A_N)^T, -I_m)^T$ と定義する。式(13)を目的関数の係数ベクトルが零ベクトルの線形計画問題と考えると、その双対問題は、 n 本の制約条件をもった線形計画問題、

$$\begin{aligned} & \text{minimize } g^T v \\ & \text{subject to } Yu - y_k w - \hat{D}^T v = 0 \\ & \quad u \geq 0, w \geq 0, v \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ただし、 $\mathbf{y}_k$ は Y の第 k 列である。この問題の最適値が0であれば、 k 番目の変数を基底に入れることにより可能的最適解が得られる。式(13)の制約条件数は $(n-m+p)$ であるので、 $p > m$ の場合、 $n-m+p > n$ となり、問題(14)の方が制約条件数が少ない。

ところで、各係数 c_j の範囲が閉区間 $[c_j^L, c_j^R]$ で与えられている場合を考えよう。この場合、式(13)で $j \neq k, j \in N$ なる c_j に対して $c_j = c_j^L$ と固定できる。また、式(13)の第2式より、 $c_k = \mathbf{c}_k^T B^{-1} \mathbf{a}_k$ となり、変数 c_k を消去すると、式(13)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k^T B^{-1} \mathbf{a}_j - c_j^L &\geq 0, \quad j \neq k, j \in N \\ c_k^L &\leq \mathbf{c}_k^T B^{-1} \mathbf{a}_k \leq c_k^R \\ c_i^L &\leq c_i \leq c_i^R, \quad i \in K \end{aligned} \quad (15)$$

このように、各係数 c_j の範囲が閉区間で与えられる場合には、一部の変数が固定され、解きやすくなる。式(15)の解の存在をシンプレックス法で判定することを考えると、制約条件数が $(n+m+1)$ であるのに対し、変数の数は $m < n+m+1$ であるので、式(15)を目的関数の係数ベクトルが零ベクトルである線形計画問題とみなし、その双対問題を解き、最適値が0となることを確認する方が効率的になると考えられる。

上述の方法で隣接基底解の可能的最適性テストが実行でき、基底解は端点を表すことより、次のアルゴリズムに従い、可能的最適端点をすべて列挙することができる。

アルゴリズム

- Step 1.** 未探索基底集合 $\mathcal{B}$ 、探索済基底集合 $\mathcal{F}$ 、基底解集合 S を空集合として初期化する。
- Step2.** $\mathbf{c} \in \Gamma$ を求め、線形計画問題 $\max_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ を解き、最適基底形式を求める。
- Step 3.** 現在の基底を探索済基底集合にいれ、その基底解(端点)を S に加える。
- Step 4.** 現在の基底のすべての隣接基底について、 $\mathcal{F}$ の要素でないことを確かめる。 $\mathcal{F}$ の要素でなければ、逐次、可能的最適性テストを行い、可能的最適と判定されれば、それを $\mathcal{B}$ に加える。可能的最適と判定されなければ、 $\mathcal{F}$ に加える。
- Step 5.** $\mathcal{B}$ から要素を任意に選び、基底形式を求めてStep3に戻る。この際、選んだ要素を $\mathcal{B}$ から除去する。

5. 数値実験

可能的最適端点集合が必要となる問題では、それを包含する端点集合が得られれば十分である場合が多い。そこで、凸多面体 Γ を含む最小の超立方体 $\hat{\Gamma}$ を求め、従来のSteuerの方法[1]により、可能的最適端点集合

を含む集合の要素を列挙する場合と提案法で可能的最適端点を列挙する場合との計算効率性をパーソナルコンピュータ(pentium II 400MHz, 128MB)を用いた数値実験により比較し、提案法の有用性を確認する。超立方体 $\hat{\Gamma}$ を用いた列挙では、隣接基底解の可能的最適性テストが容易になる反面、不必要な基底解の探索を行う。一方、凸多面体 Γ を用いた列挙では、不必要な端点の探索は行わない反面、隣接基底解の可能的最適性テストの規模が多少大きくなる。なお、本実験では、いずれもシンプレックス法を用いることにより隣接基底解の可能的最適性を調べている。凸多面体 Γ を用いて列挙する提案法では、 D の行数 p と制約条件数 m (A の行数)の大小にかかわらず、常に問題(14)を解くことによって可能的最適性を調べている。一方、超立方体 $\hat{\Gamma}$ を用いる列挙では、閉区間の上下限が等しい $c_i^L = c_i^R$ の場合に、 $c_i = c_i^L$ と固定した式(15)の双対問題を用いることにより、可能的最適性の判定の計算効率性を高めている(本実験で生成した問題では、等式制約に変更するために導入するスラック変数に対する目的関数の係数は0であり、 $c_i^L = c_i^R = 0, i = n_1, \dots, n$ が成立する)。各解法のプログラムは、Free BSD ver.2.2.8上のC言語(GNU project C and C++ Compiler ver. 2.7)を用いて作成した。また、 Γ を含む最小の超立方体 $\hat{\Gamma}$ は次のように定められる。

$$\hat{\Gamma} = \{\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \mid c_i^L \leq c_i \leq c_i^R\} \quad (16)$$

ただし、 c_i^L, c_i^R は次のように定められる。

$$c_i^L = \min_{\mathbf{c} \in \Gamma} c_i, \quad c_i^R = \max_{\mathbf{c} \in \Gamma} c_i \quad (17)$$

問題(1)の制約条件の生成は次のように行った。超楕円を用いし、乱数により発生させた正象限で接する m 本の超平面と非負象限により制約条件 $\bar{A} \mathbf{y} \leq \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ を定め、スラック変数 $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ を加えて、問題(1)の制約条件とした。したがって、 $n = n_1 + m, \mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{s}^T)^T, A = (\bar{A}, I_m)$ となる。このように超楕円を用いて制約条件を生成することにより、実行可能解が存在し、冗長な制約条件が存在しないようにしている。同様に、目的関数の係数ベクトルの凸多面体 Γ の生成も超楕円を用いて次のように行った。まず、座標軸を軸とする n_1 次元の超楕円を用意し、独立な n_1 本の接超平面を乱数を用いて生成し、これらの接超平面の法線ベクトルの和の (-1) 倍が法線ベクトルとなる接超平面を生成する。これらの (n_1+1) 本の超平面により囲まれる領域は有界となる。さらに、 $(p-n_1-1)$ 本の接超平面を乱数を用いて生成し、 p 本の接超平面に囲まれる領域を $\bar{\Theta}$ とする。次に、 $\bar{\Theta}$ に回転と伸縮を施すため、正則な行列 Q を乱数により生成し、 $\bar{\Theta}$ を Q で変換した Θ

を作る. Θ を $\delta > n$ として次式で定義される凸錐 Δ に内接するように平行移動し, $\bar{\Gamma}$ を生成する.

$$\Delta = \{ \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{n_1})^T \mid \mathbf{e}_{n_1}^T \mathbf{d} - \delta d_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, n_1 \} \quad (18)$$

ただし, $\mathbf{e}_{n_1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ は, n_1 次元ベクトルである. 最後に, $\bar{\Gamma} \subseteq \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{y}$ に対する目的関数の係数ベクトルの範囲を示している. スラック変数 $\mathbf{s}$ の係数ベクトルを $\mathbf{0}$ とすることにより, $\Gamma = \{ (\mathbf{d}^T, \mathbf{0})^T \mid \mathbf{d} \in \bar{\Gamma} \}$ と Γ を生成した. なお, 各超楕円の軸の長さは, $[1, 3]$ の一様乱数, Q の各成分は $[-1, 1]$ の一様乱数, $\delta = 2n_1 + 1$ とした.

表1, 2に各パラメータの組 (n_1, m, p) に対して, 生成した10個の問題の端点列挙を行った場合の計算時間(秒)および探索した基底解の数の平均, 標準偏差, 中央値, 最大値, 最小値を示す. また, 表1, 2の各 (n_1, m, p) の最下段に Γ を用いた場合に対する $\hat{\Gamma}$ を用いた場合の計算時間の比および基底解の数の比を示している.

表1, 2の比の欄に示すように, スラック変数以外の変

数の数 $n_1 = n - m$ および X の制約条件数 m が大きくなるに従い, $\hat{\Gamma}$ を用いた Steuer の列挙法に対する提案列挙法の効率性が高まることわかる. X の頂点数は $n_1 + m C_m = (n_1 + m)! / (n_1! m!)$ に依存して増加すると考えられるので, n_1 と m のいずれが増加しても X の頂点数は指数的に増加しうる. したがって, n_1 および m が大きくなることにより, $\hat{\Gamma}$ を用いた場合には, 無駄な頂点の探索が極端に増加するため, 上述のような結果が得られたと説明できる. 一方, 表1, 2より, Γ の制約条件数 (D の行数) p が増加する場合には, $\hat{\Gamma}$ を用いた Steuer の列挙法に対する提案列挙法の効率性が高くなるとはいえない. これは, 次の二つの理由によると考えられる. 第1の理由は, $\hat{\Gamma}$ を用いる列挙では, p の増減に関係なく, 隣接基底解の可能的最適性テスト問題の規模は変わらない反面, Γ を用いる列挙では, p が増加すると, 隣接基底の可能的最適性テスト問題(14)における変数ベクトル $\mathbf{v}$ の次元が大きくなり, 問題(14)の複雑性が増加し, 計算効率性が低下することになる. 第2の理由は, 本研究の問題の生成法に

表1. 計算時間の比較

(n_1, m, p)	範囲	平均	標準偏差	中央値	最大値	最小値
(5, 10, 10)	$\hat{\Gamma}$	0.086	0.034	0.086	0.125	0.031
	Γ	0.032	0.017	0.027	0.070	0.015
	比	2.804	1.271	2.533	5.435	1.522
(5, 10, 15)	$\hat{\Gamma}$	0.087	0.024	0.085	0.125	0.054
	Γ	0.053	0.020	0.047	0.085	0.031
	比	1.768	0.541	1.658	2.795	1.000
(5, 10, 20)	$\hat{\Gamma}$	0.082	0.029	0.074	0.148	0.054
	Γ	0.046	0.024	0.039	0.101	0.015
	比	2.070	0.836	1.897	3.600	1.158
(5, 15, 10)	$\hat{\Gamma}$	0.177	0.072	0.187	0.281	0.023
	Γ	0.061	0.031	0.054	0.125	0.023
	比	3.197	1.683	2.954	6.774	1.000
(5, 15, 15)	$\hat{\Gamma}$	0.153	0.065	0.136	0.281	0.054
	Γ	0.064	0.047	0.046	0.164	0.023
	比	2.860	1.198	2.452	4.739	1.591
(5, 15, 20)	$\hat{\Gamma}$	0.172	0.048	0.171	0.234	0.093
	Γ	0.078	0.035	0.070	0.148	0.039
	比	2.436	0.708	2.442	3.717	1.284
(5, 20, 10)	$\hat{\Gamma}$	0.401	0.138	0.398	0.625	0.117
	Γ	0.083	0.037	0.074	0.140	0.031
	比	5.451	2.868	5.194	12.839	2.543
(5, 20, 15)	$\hat{\Gamma}$	0.451	0.130	0.429	0.625	0.304
	Γ	0.125	0.048	0.129	0.218	0.062
	比	3.935	1.402	3.507	6.720	2.432
(5, 20, 20)	$\hat{\Gamma}$	0.402	0.152	0.402	0.617	0.156
	Γ	0.157	0.062	0.171	0.234	0.062
	比	2.678	0.776	2.424	4.274	1.835
(10, 20, 20)	$\hat{\Gamma}$	704.285	57.416	715.437	749.750	552.171
	Γ	31.352	32.087	23.484	107.539	4.195
	比	57.582	53.575	31.148	157.420	6.943
(10, 20, 30)	$\hat{\Gamma}$	670.464	97.168	687.512	814.960	518.640
	Γ	48.924	31.386	41.007	105.367	17.921
	比	19.519	11.661	17.741	42.273	4.922
(10, 20, 40)	$\hat{\Gamma}$	677.210	100.530	697.375	787.890	450.148
	Γ	111.820	68.550	103.930	245.609	34.718
	比	8.616	5.590	7.373	20.996	2.534
(10, 30, 20)	$\hat{\Gamma}$	4861.136	571.026	4977.410	5753.328	3652.953
	Γ	72.478	60.225	64.644	174.531	7.179
	比	165.948	188.736	80.483	595.370	30.481

表2. 探索した基底解の数の比較

(n_1, m, p)	範囲	平均	標準偏差	中央値	最大値	最小値
(5, 10, 10)	$\hat{\Gamma}$	49.4	22.401	53	74	13
	Γ	14	8.576	14	32	5
	比	4.100	2.078	3.957	8.143	1.826
(5, 10, 15)	$\hat{\Gamma}$	48.7	13.622	48	68	28
	Γ	20.2	9.016	19.5	35	10
	比	2.707	1.090	2.306	4.833	1.727
(5, 10, 20)	$\hat{\Gamma}$	41	16.371	38	76	21
	Γ	14.3	9.569	11.5	34	2
	比	3.954	2.625	3.300	10.500	1.667
(5, 15, 10)	$\hat{\Gamma}$	79	33.649	83	121	8
	Γ	22	12.970	19.5	50	5
	比	3.996	2.135	3.381	8.182	1.600
(5, 15, 15)	$\hat{\Gamma}$	66.6	29.594	58.5	123	20
	Γ	21.6	17.024	17	58	7
	比	3.835	1.616	3.290	7.000	2.067
(5, 15, 20)	$\hat{\Gamma}$	74.6	21.727	72.5	104	43
	Γ	22.4	11.825	20.5	46	9
	比	3.888	1.403	3.606	6.250	1.727
(5, 20, 10)	$\hat{\Gamma}$	133.7	46.509	135	209	39
	Γ	25.5	11.607	23	43	11
	比	5.727	2.362	5.684	11.545	3.488
(5, 20, 15)	$\hat{\Gamma}$	147.1	40.192	139	206	98
	Γ	33.9	14.271	35	59	15
	比	4.889	2.057	3.892	8.565	3.063
(5, 20, 20)	$\hat{\Gamma}$	129.4	50.836	131.5	205	47
	Γ	38.4	15.364	42.5	55	13
	比	3.592	1.268	3.105	6.385	2.238
(10, 20, 20)	$\hat{\Gamma}$	16700.2	780.287	16940	17396	14709
	Γ	1294.8	1235.819	993.5	4102	191
	比	30.815	28.095	17.146	77.028	4.180
(10, 20, 30)	$\hat{\Gamma}$	16418.1	1388.262	16698.5	18430	14250
	Γ	1620.2	988.367	1400	3368	616
	比	13.929	7.780	12.383	28.602	4.231
(10, 20, 40)	$\hat{\Gamma}$	16498.4	1478.555	16810	18217	13037
	Γ	2891.9	1601.546	2785	5857	967
	比	7.714	4.636	6.404	17.789	2.684
(10, 30, 20)	$\hat{\Gamma}$	49457.8	2905.893	50200.5	54032	43348
	Γ	2546.8	1971.826	2385.5	5820	278
	比	46.105	52.516	21.485	167.651	9.165

においては、 Γ の制約条件数 p が増加するに従い、制約が強くなり、目的関数の係数ベクトルの取りうる領域を示す Γ が小さくなる傾向にあり、可能的最適端点となる基底解の数が減少する。このとき、 $\hat{\Gamma}$ も同様に小さくなるので、不必要な基底の探索も削減されうる。表2より、 $(n_1, m) = (5, 20)$, $(n_1, m) = (10, 20)$ の場合には、 p が増加するとともに、比の行の値が小さくなり、 $\hat{\Gamma}$ を用いた列挙において不必要な基底解の探索が軽減していることがわかる。また、表2で $\hat{\Gamma}$ を用いた列挙における p の増加に伴った不必要な基底解の探索の軽減が認められない $(n_1, m) = (5, 15)$ の場合にも、表1の比の行の値が小さくなっており、 Γ を用いた列挙における可能的最適性テストの計算効率性が p の増加に伴い、悪くなることが確認できる。

表1, 2に示すように、比の行の最小値が1以下となる場合が存在しない。このことは、本研究で生成したすべての問題において、提案列挙法の方が効率であったことを示している。これらの表に示すように、 $\hat{\Gamma}$ を用いた列挙に要する時間は、少なくとも提案列挙法による場合と同等の時間 $((5, 10, 15), (5, 15, 10)$ の場合)、多ければ595倍もの時間も要したことになる $((10, 30, 20)$ の場合)。このように、本研究で提案した可能的最適端点列挙法の有用性が確認できる。

6. おわりに

本研究では、目的関数の係数ベクトルが明確にわからず、その取りうる範囲が凸多面体として与えられた線形計画問題を取り上げ、凸多面体内の少なくとも一つの係数ベクトルに対して最適となる端点、すなわち、可能的最適端点をすべて列挙する方法について考察した。すべての可能的最適端点を求めることは、合理的な解の存在範囲を知る上で重要となるばかりではなく、最大リグレット最小解[3]や最悪達成率最適解[4]を求める上で有用となる。一方、係数ベクトルの範囲を凸多面体で表現することにより、不明確な係数間の従属性を取り扱うことができるとともに、区間線形計画問題の場合には取り扱えなかった自由変数を取り扱うこともできる。

可能的最適解集合がある多目的線形計画問題の弱有効解集合に一致することが示され、可能的最適解は弱有効解と同様な性質をもつことが明らかになった。したがって、可能的最適基底解から隣接する基底解をたどることにより、すべての可能的最適端点を列挙することがわかる。隣接する基底解が可能的最適解であるか否かを判定する問題が線形計画問題に帰着される

ことが示され、すべての可能的最適端点を列挙するアルゴリズムが与えられた。また、数値実験により、本提案法の有用性が確認された。

不明確な係数間に相互関係がないと仮定する従来の区間線形計画問題やファジィ線形計画問題では、現実的な解が得られない場合もあり[7]、今後、現実をより反映した数理計画モデルを扱うため、本研究で扱ったように不明確な係数間の従属性を取り扱うことも必要になると考えられる。

参 考 文 献

- [1] R. E. Steuer : Algorithms for linear programming problems with interval objective function coefficients, *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.3, pp.333-348(1981).
- [2] M. Inuiguchi and M. Sakawa : Possible and necessary optimality tests in possibilistic linear programming problems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.67, pp. 29-46(1994).
- [3] M. Inuiguchi and Y. Kume : Minimax regret in linear programming problems with an interval objective function, in : G. H. Tzeng, H. F. Wang, U. P. Wen and P. L. Yu(eds.), *Multiple Criteria Decision Making*, Springer-Verlag, New York, pp.65-74(1994).
- [4] M. Inuiguchi and M. Sakawa : An achievement rate approach to linear programming problems with an interval objective function, *Journal of Operational Research Society*, Vol.48, pp.25-33(1997).
- [5] R. E. Steuer : *Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation, and Application*, John Wiley & Sons, New York(1986).
- [6] 福島雅夫 : 数理計画入門, 朝倉書店(1996).
- [7] M. Inuiguchi and T. Tanino : Portfolio selection under independent possibilistic information, *Fuzzy Sets and Systems*(to appear).

(1999年 7月12日 受 付)

(1999年10月 7日 再受付)

[問い合わせ先]

〒565-0871 吹田市山田丘2-1
大阪大学大学院工学研究科
電子情報エネルギー工学専攻
乾川 雅弘

TEL : 06-6879-7787

FAX : 06-6879-7939

E-mail : inuiguti@eie.eng.osaka-u.ac.jp

著者紹介

乾口 雅弘 (いぬいぐち まさひろ)

大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻

1987 年大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程(経営工学専攻)修了。同年同大学経営工学学科助手。'92 年広島大学工学部第二類(電気系)計数管理工学講座助教授。'97 年大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻助教授。現在に至る。主として、可能性理論、Dempster-Shafer 理論、ファジィ数値計画法および近似的推論法に関する研究に従事。'91 年システム制御情報学会榎木記念賞奨励賞。'93 年日本ファジィ学会奨励賞。'97 年日本ファジィ学会論文賞、受賞。博士(工学)。計測自動制御学会、国際ファジィシステム学会、システム制御情報学会、電子情報通信学会、日本オペレーションズ・リサーチ学会、日本経営工学会、日本ファジィ学会などの会員。

谷野 哲三 (たにの てつぞう)

大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻

1973年3月 京都大学工学部数理工学科卒業。1978年3月 同大学大学院工学研究科数理工学専攻博士課程修了。東北大学工学部助教授、岡山大学工学部教授を経て、現在大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻教授。最適化理論、意思決定論、ゲーム理論などの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会、システム制御情報学会、日本OR学会、日本応用数理学会、電子情報通信学会などの会員。

東谷 英貴 (ひがしたに ひでたか)

大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻

1997 年大阪大学工学部電気工学科卒業。同年同大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻博士前期課程入学。1999 年同修了。同年大阪ガス(株)入社。現在に至る。大学院在学中は、不明確な係数をもつ線形計画問題の可能的最適端点の列挙法および最大リグレット最小解の計算法に関する研究を行った。

Enumeration of Possibly Optimal Extreme Points in Linear Programming Problems with Single Objective Function Coefficient Vectors in Convex Polytopes

by

Masahiro INUIGUCHI, Hidetaka HIGASHITANI and Tetsuzo TANINO

Abstract :

In this paper, we deal with a linear programming problem whose objective function coefficient vector is not known exactly but contained in a convex polytope. While the independence among uncertain coefficients has been implicitly assumed in interval linear programming problems, a certain kind of interaction(dependency) among uncertain coefficients can be treated in our problem. To such a problem, two kinds of optimal solutions are defined : possibly and necessarily optimal solutions. A necessarily optimal solution is the most reasonable solution. However, it does not exist in many problems. On the other hand, a possibly optimal solution is the least reasonable solution and always exists. Any possibly optimal solution can be represented as a convex combination of possibly optimal extreme points. Therefore, enumeration of possibly optimal extreme points is discussed in this paper. It is shown that the possibly optimal solution set coincides with the weakly efficient solution set to a certain multiobjective linear programming problem. This result implies that all possibly optimal extreme points can be enumerated by tracing adjacent basic solutions from a possibly optimal basic solution. In order to apply this approach, a possible optimality test of an adjacent basic solution is necessary. We show that the possible optimality test problem is reduced to a linear programming problem. Based on this possible optimality test, an enumeration algorithm of possibly optimal extreme points is proposed. On the other hand, in many applications, it is sufficient to obtain a superset of the possibly optimal extreme point set. From this point of view, an alternative method is conceivable, i.e., using an outer box-set approximation of the given convex polytope, such a superset can be obtained by Steuer's enumeration method previously proposed for the interval coefficient case. By numerical experiments, the proposed enumeration method is compared with the above alternative method. The results show that the proposed method is more efficient.

Keywords : Linear Programming, Uncertain Coefficients, Possibly Optimal Solution, Enumeration, Extreme Point, Simplex Method

Contact Address : **Masahiro INUIGUCHI**

Graduate School of Engineering, Osaka University

2-1, Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871, Japan

TEL : 06-6879-7787 FAX : 06-6879-7939

E-mail : inuiguti@eie.eng.osaka-u.ac.jp