次元係数の正則化による 線形ファジィクラスタリング†

馬屋原 一孝*¹ 宮本 定明*²

多次元空間上のデータの線形構造をとらえたファジィクラスタリングを考える。これまでのファジィクラスタリングで用いられてきた適応型(Adaptive)手法には、クラスタリング過程において目的関数の値が増加するという問題点があることを示す。そして正則化の概念を次元係数の決定に導入することにより、目的関数が単調減少する手法を提案する。また、目的関数のメンバシップと次元係数の正則化に「べき乗による正則化」と「エントロピー正則化」を組み合わせた4つの定式化を示し、その簡単な数値例を紹介する。

キーワード：ファジィクラスタリング、線形構造、正則化

1. はじめに

本稿では多次元空間上のデータの線形構造をとらえたファジィクラスタリングを考える。ファジィクラスタリングでは、fuzzy *c*-means 法[1]が crisp *k*-means 法をファジィ化した手法として、現在広く用いられている。さらに fuzzy *c*-means 法のさまざまな応用手法も数多く研究されており、fuzzy *c*-varieties 法[1]や fuzzy *c*-elliptotypes 法[1]など、線形構造によるクラスタリング手法も提案されている。またクラスタの形状により適応的にクラスタの形状を決める adaptive fuzzy *c*-elliptotypes(AFC)法[2]による、より柔軟なクラスタリングが紹介されている。最近では、AFC 法を拡張した高次元のデータに対するクラスタの形状を適応的に決定する手法の研究も行われている[3,4]。

これらのファジィクラスタリングでは、ファジィ分割とクラスタのプロトタイプによって値の定まる目的関数を用い、その目的関数を最小化するように2段階の最適化によりクラスタリングを行っている。しかし「適応的」にクラスタの形状を決定する手法では、目的関数は必ずしも最適化されていないという問題点があることを本論文では示す。そして線形多様体の次元係数を目的関数の最適化の条件から求めることにより、クラスタリング過程で目的関数が単調減少するクラスタリング手法を提案する。さらにメンバシップと次元係

数の正則化に「べき乗による正則化」、「エントロピー正則化」を組み合わせた4つの定式化を示し、その簡単な数値例を紹介する。

まず2節では、これまでに提案されているファジィクラスタリング手法の概略を述べる。そして3節では、これまでの適応型クラスタリング手法の問題点について考察し、さらにメンバシップやクラスタのプロトタイプと同様、次元係数も目的関数の最適化によって求める手法を提案する。最後に、メンバシップと次元係数の正則化に「べき乗による正則化」と「エントロピー正則化」を組み合わせた目的関数とその最適解を示し、その簡単なクラスタリング結果を紹介する。

2. 線形ファジィクラスタリング

いま、クラスタリングすべき個体の集合を $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} (\subset R^p)$ 、クラスタの数を c 、クラスタ i の代表点(プロトタイプ)を v_i とし、 u_{ik} を個体 x_k がクラスタ i に属する帰属度とする。このとき、fuzzy *c*-means (FCM)法は、 u_{ik} が以下の制約

$$M_{fcm} = \{ (u_{ik}) \mid \sum_{i=1}^c u_{ik} = 1, u_{ik} \in [0, 1], k = 1, 2, \dots, n \}$$

のもと、 $U = (u_{ik})$ 、 $V^0 = (v_i)$ に関する目的関数

$$J_{fcm}(U, V^0) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q D_{ik}^0 \quad (1)$$

を最小化する問題となる。ただし、 $D_{ik}^0 = \|v_i - x_k\|^2$ であり、 $q (> 1)$ はクラスタリングにあいまいさを与えるパラメータである。この $J_{fcm}(U, V^0)$ を最小化するために fuzzy *c*-means 法では、最初に U を固定し V^0 について、次に V^0 を固定し U について最小化する次のような2段階アルゴリズムを考える[1]。

FCM1. $\bar{U}$ と $\bar{V}^0$ の初期値を適当に与える。

† Linear Fuzzy Clustering by Regularization of Dimensional Coefficients

Kazutaka Umayahara and Sadaaki Miyamoto

*1 北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科

School of Knowledge Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hokuriku

*2 筑波大学 機能工学系

Institute of Engineering Mechanics and Systems, University of Tsukuba

FCM2. $\min_{V^0 \in \mathbf{R}^p} J_{fcm}(\bar{U}, V^0)$ の最適解を $\bar{V}^0$ とする。

FCM3. $\min_{U \in M_{fcm}} J_{fcm}(U, \bar{V}^0)$ の最適解を $\bar{U}$ とする。

FCM4. 最適解 $(\bar{U}, \bar{V}^0)$ が収束していれば終了、そうでなければ **FCM2** に戻る。

このとき、**FCM2** での最適解 $\bar{V}^0$ は

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^n (\bar{u}_{ik})^q x_k}{\sum_{k=1}^n (\bar{u}_{ik})^q} \quad (2)$$

となり、**FCM3** での最適解 $\bar{U}$ は

$$\bar{u}_{ik} = \left[\sum_{j=1}^c \left(\frac{D_{ik}^0}{D_{jk}^0} \right)^{\frac{1}{q-1}} \right]^{-1} \quad (3)$$

となることが示されている[1]。

fuzzy c-varieties(FCV)法[1]では、クラスタの代表点 v_i の代わりに r 次元 ($0 \leq r < p$) の線形多様体(プロトタイプ)

$$V_i^r(v_i; e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ir}) = \{z \in \mathbf{R}^p | z = v_i + \sum_{j=1}^r t_{ij} e_{ij}, \quad t_{ij} \in \mathbf{R}\} \quad (4)$$

を考え、個体 x_k と線形多様体 V_i^r との2乗距離

$$D_{ik}^r = \|x_k - v_i\|^2 - \sum_{j=1}^r |\langle x_k - v_i, e_{ij} \rangle|^2 = \sum_{j=r+1}^p |\langle x_k - v_i, e_{ij} \rangle|^2 \quad (5)$$

を個体とクラスタ間の距離とする。ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積を表し、 $\|e_{ij}\|=1$ であるとする。そして、FCV 法では以下のような目的関数

$$J_{fcv}(U, V^r) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q D_{ik}^r \quad (6)$$

を用い、これを最小化するようにファジィ分割 U とクラスタのプロトタイプ集合 $V^r = \{V_1^r, V_2^r, \dots, V_c^r\}$ を **FCM** と同様のアルゴリズムにより求める。このとき最適解 $V_i^r(v_i; e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ir})$ を定めるパラメータの v_i は(2)式によって求まるクラスタ代表点であり、 e_{ij} ($j=1, 2, \dots, r$) はファジィ散布行列

$$S_i = \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q (x_k - v_i)(x_k - v_i)^T \quad (7)$$

の固有値 $\lambda_{i1} \geq \lambda_{i2} \geq \dots \geq \lambda_{ip}$ に対応する固有ベクトルの最初の r 個を長さ1としたものであることが示されている[1]。

fuzzy c-elliptotypes(FCE)法[1]では、 D_{ik}^0 と D_{ik}^r を α を用いて加重平均することにより、距離とクラスタの線形性を同時に考慮した目的関数

$$J_{fce}^r(U, V^r) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q [(1-\alpha) D_{ik}^0 + \alpha D_{ik}^r] \quad (8)$$

を考える。この J_{fce}^r は厳密には (U, V^0, V^r) の関数であるが、(4)式にあるように V^r のパラメータは V^0 を含んでいるため (U, V^r) としている。

adaptive fuzzy c-elliptotypes(AFC)法[2]では、 α をクラスタリング過程においてクラスタごとに適応的に変化するパラメータ

$$\alpha_i = 1 - \frac{\lambda_{i,r+1}}{\lambda_{i1}} \quad (9)$$

を用い、目的関数を

$$J_{afc}^r(U, V^r) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q [(1-\alpha_i) D_{ik}^0 + \alpha_i D_{ik}^r] \quad (10)$$

としている。FCE 法や AFC 法の **FCM2** における V^r の最適解は FCV 法と同様に求まり、**FCM3** における最適解は(3)式の分母、分子に含まれる D_{ik}^0 を $(1-\alpha_i) D_{ik}^0 + \alpha_i D_{ik}^r$ と置き換えることにより得られる。ただし、Dave[2]は2次元平面における直線の同定を扱っており、ここでは拡張して定式化している。

FCE 法では、 α が定数として与えられたのに対し、AFC 法では、これをクラスタの形状に応じてクラスタごとに決定しようという発想である。

AFC 法ではクラスタに応じて適応的に α_i が決められ、柔軟にクラスタの形状に応じたクラスタリング結果を得ることができる。だがそれでもなお、線形多様体の次元 r は事前に設定する必要がある。つまり、クラスタが直線状なのか平面状なのかという仮定が必要であり、それはすべてのクラスタに共通である必要があった。**fuzzy c-varieties of different dimensionalities(FVD)法**[3]ではさらに、すべての次元の線形多様体との2乗距離をデータ分布を考慮して加重平均する規範を導入することにより、異なる次元の線形構造もとらえたクラスタリングを行う。すなわち、以下のような目的関数を考える。(V^{p-1} を単に V と略す。)

$$J_{vd}(U, V) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q \beta_i^h \frac{D_{ik}^h}{p-h} \quad (11)$$

ただし、

$$(a) \quad \beta_i^h = \frac{\gamma_i^h}{\sum_{h=0}^{p-1} \gamma_i^h}$$

$$(b) \quad \gamma_i^h = (\lambda_{ih} - \lambda_{i, h+1})^l, \quad h=1, 2, \dots, p-1$$

$$\gamma_i^0 = (\lambda_{ip})^l$$

これは AFC 法の目的関数(10)式の自然な拡張となっている。AFC 法では D_{ik}^0 と D_{ik}^1 の2項を α_i で加重平均していたが、ここでは $D_{ik}^0, D_{ik}^1, \dots, D_{ik}^{p-1}$ を次元係数 β_i^p で加重平均している。 D_{ik}^h をプロトタイプ V_i^h の直交補空間の次元数 $p-h$ で割っているのは、 V_i^h の直交補空間の次元 $p-h$ が増加することによる D_{ik}^h の自然増を押さえ、平等化を図っているためである。(D_{ik}^h の定義(5)式から、明らかに $D_{ik}^0 > D_{ik}^1 > \dots > D_{ik}^{p-1}$ より。)

なお、(b)における l は線形度パラメータで、0以上の実数である。(a), (b)で定義されている次元係数 β_i^p の詳細についてはここでは述べないが、本手法も AFC 法同様、各クラスタのファジィ散布行列の固有値を用いてクラスタの形状を決定しようとするものである。

また、これとは別の多次元への拡張も Phansalkar [4]らによって提案されている。

3. 正則化による線形ファジィクラスタリング

本節では、(1)適応型クラスタリング手法の問題点について考察する。(2)さらにメンバシップやクラスタのプロトタイプと同様、次元係数も目的関数の最適化によって求める手法を提案する。(3)このときメンバシップと次元係数の正則化に「べき乗による正則化」と「エントロピー正則化」を組み合わせた4種類の目的関数を示し、簡単なクラスタリング結果を紹介する。

3.1 適応型手法の問題点

ここでもう一度、FCM 法について考察してみよう。ファジィクラスタリングは、次のようになされている。(1) まず目的関数を定める。目的関数は、もっともよい分割に対して最小値をとる関数であるとする。(2) その目的関数を最小化する解を求める。交互最適化によって、目的関数の最適解を得る。

FCM 法の目的関数 J_{fcm} は、クラスタの代表点と各個体との2乗距離に $(u_{ik})^q$ を掛けたものの総和であり、クラスタリングの評価として妥当なものである。そして J_{fcm} は (U, V^0) の関数であり、FCM の2段階アルゴリズムにより目的関数を最小化する解を求めている。このアルゴリズムは経験的に解は収束するが、一般的に解の収束が保証されているわけではない。(crisp k -means 法では保証されている。)しかし2段階アルゴリズムにより目的関数の値は明らかに単調減少し、目的関数を最小化するクラスタリング結果を得ることができる。

しかし AFC 法など適応型の手法では、これは満たされない。 J_{fcm} 以降の目的関数は、 U と V の関数であるだけでなく α の関数でもあるからである。FCE

法では、 α は q 同様に定数である。しかし AFC 法では、 α_i はクラスタリング過程において(9)式のように目的関数の最小化と独立に決定されている。これはパラメータの意味を考えると穏当な決め方ではあるが、このとき α_i の更新によって目的関数の値が増加することがある。(3.2節参照)

実際、図1は AFC 法によるクラスタリングでの J_{afc} の値の変化を表すグラフである。データは図2のように、2次元平面の特定の領域に一樣分布するように人工的に作成した792個の点からなり、クラスタリングはランダムな初期値から始め、クラスタ数は2とした。目的関数の値は7ステップ目のときに最小の値となり、その後 α_i の変化によってその値はクラスタリングを始めたときの値をこえるまで増加している。図2は目的関数の値が最小となった7ステップ目のクラスタリングの状態(左図)とメンバシップが収束した最終結果のクラスタリング結果(右図)を示している。各点はメンバシップ値の大きなクラスタへ色分けして示している。

このようにクラスタリング過程で目的関数の値が増加することのある手法では、目的関数を最小化する解でクラスタリングが停止する保証がない。実際、クラ

図1 AFC 法によるクラスタリング過程で、目的関数 J_{afc} の値が増加する例

図2 AFC 法により目的関数の値が最小となる分割(左図)と最終的に得られる分割結果(右図)

スタリング結果である右図の目的関数の値は、左図の目的関数の値より明らかに大きい。

そこで次に次元係数についても、メンバシップ値やクラスタのプロトタイプ同様に目的関数の最適化によって求める手法を提案する。

3.2 最適化のための目的関数

AFC法の目的関数の値が α_i の変化により増加する理由を考察しよう。 α_i は J_{afc} で、2つの距離 D_{ik}^0 と D_{ik}^r のトレードオフを行うパラメータである。しかし D_{ik}^r の定義(5)式より、明らかに $D_{ik}^0 \geq D_{ik}^r$ が成り立ち、 α_i の値が大きいほど J_{afc} の値は小さくなることがわかる。しかしAFC法では α_i の値が(9)式によって小さくなることもあるため、 J_{afc} の値が大きくなることもあるのである。(図2では明らかに、右図より左図の方がどちらのクラスタの α_i も大きく、左図の目的関数の値が小さくなっている。)

つまり J_{afc} の最小化から α_i ($0 \leq \alpha_i \leq 1$)を決定すれば、

$$\alpha_i = 1, i = 1, 2, \dots, c \quad (12)$$

が最適解となる。しかしこれでは D_{ik}^0 と D_{ik}^r をトレードオフする意味がない。では次に D_{ik}^r を V_i^r の直交補空間の次元数で補正しているFVD法の目的関数 J_{fvd} について次に考えよう。

メンバシップ U やクラスタのプロトタイプ V と同様に次元係数 $B = (\beta_i^h)$ も変数であるとする、FVD法の目的関数は次のようになる。

$$J(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q \beta_i^h \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} \quad (13)$$

この J を U, V を固定して、 B を以下の許容集合

$$M_\beta = \left\{ (\beta_i^h) \left| \sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h = 1, \beta_i^h \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, c \right. \right\} \quad (14)$$

のもとで最適化を行うと、やはり最適解は、

$$\beta_i^{p-1} = 1, \beta_i^h = 0 \quad (0 \leq h \leq p-2) \quad (15)$$

となり(付録II参照)、すべてのクラスタで次元の最も高い線形多様体との係数だけが1となる。そこでここでは、 D_{ik}^h を $(p-h)^2$ で割ることにする。FVD法の目的関数で D_{ik}^h を $(p-h)$ で割っている理由は、 D_{ik}^h が線形多様体 V_i^h の直交補空間における距離であるから、直交補空間の次元数で割ることにより、次元の増加による D_{ik}^h の自然増を押さえ、平等化を図るためである。しかし、 D_{ik}^h は2乗距離であるから、単に $(p-h)$ で割るだけでは不十分で、 $(p-h)^2$ で割る必要がある。

$$J(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q \beta_i^h \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} \quad (16)$$

これによって、低い次元の係数も選択されるようになる。(実際、(16)式の次元係数をファジィ化した(17)式を目的関数とした次節の例題で、低い次元の係数が選択されている。)ただし、目的関数にこれが最良であるということではない。あるいは全く異なる定式化を考えることができるかもしれない。これをどういったものにすべきかは、さらなる検討が必要である。

次に次元係数のファジィ化を考えよう。この新しい目的関数(16)式の B に関する最適解はcrisp k -means法のメンバシップ同様(付録I参照)、クリスプ解となってしまう。この問題は、crisp k -means法での個体のクラスタへの割り当て(付録I参照)と同じように考えることができる。クラスタへのクリスプな個体の分割を目的関数を正則化することによりファジィ化したように、目的関数を正則化してクラスタの次元係数をファジィ化する。

具体的には、crisp k -means法からfuzzy c -means法への目的関数の変形と同様に、次元係数 β_i^h に新たなパラメータ l (> 1)を導入し β_i^h を $(\beta_i^h)^l$ とする。

$$J_{efcl}(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q (\beta_i^h)^l \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} \quad (17)$$

これにより、 β_i^h の値を目的関数を最小化するように柔軟に決定できる。このとき、正則化パラメータ l は、クラスタリング結果での β_i^h のあいまいさの度合いを表す。 l が1に近いときは、 β_i^h はクリスプに定まり、 l が大きくなるに従い β_i^h はあいまいな結果となる。各変数は他の変数を固定して、目的関数を最適化することにより求めることができる。fuzzy c -means法は2段階法によって目的関数を単調減少させているが、これを3段階にすることにより、本手法も目的関数を単調減少させることができる。本目的関数は、このように目的関数の単調減少の枠組みのもとで、AFC法を一般化したクラスタリングを行うことができる妥当なものであると考えられる。

3.3 アルゴリズム

FCM法の2段階アルゴリズムを、 $B = (\beta_i^h)$ についても同様に適用した、目的関数を最小化する以下のような3段階アルゴリズムを考える。

- Step 1. $\bar{U}, \bar{V}, \bar{B}$ の初期値を適当に与える。
- Step 2. $\min_{V \in R^{pc}} J_{efc}(\bar{U}, V, \bar{B})$ の最適解を $\bar{V}$ とする。
- Step 3. $\min_{U \in M_{cm}} J_{efc}(U, \bar{V}, \bar{B})$ の最適解を $\bar{U}$ とする。

Step 4. $\min_{B \in M_p} J_{efc}(\bar{U}, \bar{V}, B)$ の最適解を $\bar{B}$ とする。

Step 5. 最適解 $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{B})$ が収束していれば終了, そうでなければ **Step2** に戻る。

このとき, **Step 2** の最適解 $\bar{V}$ は FCV 法と同様, (2) 式で求まる v_i と, (7) 式の S_i の固有値 $\lambda_{i1} \geq \lambda_{i2} \geq \dots \geq \lambda_{ip}$ に対応する固有ベクトルを長さを1とした e_{ij} とをパラメータとする (4) 式によって定められるプロトタイプ V_i となる。**Step 3** の最適解 $\bar{U}$ は, ラグランジュ乗数法により

$$\bar{u}_{ik} = \left[\sum_{j=1}^c \left[\frac{\sum_{h=0}^{p-1} (\beta_j^h)^{\frac{1}{q-1}} \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2}}{\sum_{h=0}^{p-1} (\beta_j^h)^{\frac{1}{q-1}} \frac{D_{jk}^h}{(p-h)^2}} \right]^{\frac{1}{q-1}} \right]^{-1} \quad (18)$$

が, **Step 4** の最適解 $\bar{B}$ も同様に,

$$\bar{\beta}_i^h = \left[\frac{\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2}}{\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q \frac{D_{ik}^{\tilde{h}}}{(p-\tilde{h})^2}} \right]^{\frac{1}{l-1}} \quad (19)$$

が得られる。(付録IV参照)

3.4 実行例

図3は, 正規乱数により作成した人工的なデータのクラスタリング結果である。データは, 図4にあるように A と B の2つの円盤状の分布と C の直線状の分布からなる。それぞれの分布は100個の点が各軸ごとに正規乱数により生成されており, 合計300個の点からなっている。各 A, B, C それぞれの X, Y, Z 軸方向の平均と標準偏差の値を表1に示す。データは分散の小さい軸についても完全に直線上・平面上にあるのではなく, ある程度のばらつきがある。図3に示されているクラスタリング結果は, 各個体の u_{ik} が0.5以上となるクラスタに分類して示されている。それぞれの3つの分布にしたがったクラスタが得られ, その構造による分割となっている。クラスタリングが終わったとき, 図4の A, B, C に対応するクラスタごとの β_i^h の値を表2に示す。A, B は2次元, C は1次元と, それぞれのクラスタの形状に従った次元が選択されていることがわかる。なお, クラスタリングのパラメータは,

$$c=3, q=1.8, l=1.2, \varepsilon=10^{-4}$$

を用いている。何回かクラスタリングを行うことによって, これらのパラメータを採用した。パラメータの値をどうするかについては一概には言えないが, クラ

図3 データとそのクラスタリング結果

図4 データのアウトライン

表1 各生成データの平均と標準偏差

		平均	標準偏差
A	X	-0.00697888	0.98945174
	Y	-0.03424198	0.93547963
	Z	-1.00695328	0.20124906
B	X	-0.01978212	0.95833101
	Y	0.09433130	1.02580356
	Z	1.00910097	0.17785815
C	X	0.00346519	0.10474140
	Y	0.00900189	0.09590892
	Z	-0.04048494	1.08562796

表2 β_i^h のクラスタリング結果

クラスタ	β_i^0	β_i^1	β_i^2
A	0.0000	0.0000	1.0000
B	0.0000	0.0000	1.0000
C	0.0000	0.9583	0.0417

スタリング結果を参照しながら、ある程度うまく分離されるように定める。

3.5 エントロピー正則化の組み合わせ

fuzzy c -means 法は crisp k -means 法をファジィ化することにより、クラスタリング結果にあいまいさの表現を導入した。(付録 I 参照)しかしクリスプなクラスタリング結果をファジィ化するときのあいまいさの導入にはさまざまな扱い方が考えられる。あいまいさを取り除いたときには crisp k -means 法のクリスプ解の近似となるが、クラスタリング結果にあいまいさを積極的に活用するファジィクラスタリングでは、あいまいさにも意味をもつ。fuzzy c -means 法とは異なるあいまいさの取り扱い方として、最近新たにエントロピー正則化法[5]と2次正則化法[6]という2つの正則化による手法が提案されている。

前節で示した新しい目的関数(17)式では、メンバシップ u_{ik} と次元係数 β_i^h の2種類の変数は、fuzzy c -means 法の「べき乗による正則化」を用いて正則化されている。この2種類の変数の正則化にそれぞれ「べき乗による正則化」と「エントロピー正則化」の組み合わせを用いた以下のような目的関数も同様に考えることができる。

$$J_{efc2}(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q \beta_i^h \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} + \mu^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h \log \beta_i^h \quad (20)$$

$$J_{efc3}(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} u_{ik} (\beta_i^h)^l \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{h=0}^{p-1} u_{ik} \log u_{ik} \quad (21)$$

$$J_{efc4}(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} u_{ik} \beta_i^h \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{h=0}^{p-1} u_{ik} \log u_{ik} + \mu^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h \log \beta_i^h \quad (22)$$

ここで、(17)、(20)式の正則化パラメータ $q(>1)$ と、(21)、(22)式の $\lambda^{-1}(>0)$ は、 u_{ik} のあいまいさの度合いを表す。 q, λ^{-1} とも値が大きくなるに従い、 u_{ik} の値はあいまいになる。さらに、(17)、(21)式の正則化パラメータ $l(>1)$ と、(20)、(22)式の $\mu^{-1}(>0)$ は、 β_i^h のあいまいさの度合いを表す。 l, μ^{-1} とも値が大きくなるに従い、 β_i^h の値はあいまいになる。

これらの目的関数の v_i, u_{ik}, β_i^h についての最適解は J_{efc1} 同様、目的関数の最適化の条件より表3のように得られる。

表3 正則化された目的関数とその最適解(表中で $G_{ik}^h = D_{ik}^h / (p-h)^2$ とする。)

目的関数	v_i	u_{ik}	β_i^h
$J_{efc1}(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q (\beta_i^h)^l G_{ik}^h$	$\frac{\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q x_k}{\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q}$	$\left[\frac{\sum_{h=0}^{p-1} (\beta_i^h)^l G_{ik}^h}{\sum_{h=0}^{p-1} (\beta_j^h)^l G_{jk}^h} \right]^{\frac{1}{q-1}}^{-1}$	$\left[\frac{\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q G_{ik}^h}{\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q G_{ik}^h} \right]^{\frac{1}{l-1}}^{-1}$
$J_{efc2}(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q \beta_i^h G_{ik}^h + \mu^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h \log \beta_i^h$	$\frac{\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q x_k}{\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q}$	$\left[\frac{\sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h \cdot G_{ik}^h}{\sum_{h=0}^{p-1} \beta_j^h \cdot G_{jk}^h} \right]^{\frac{1}{q-1}}^{-1}$	$\frac{\exp \left(-\mu \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q G_{ik}^h \right)}{\sum_{h=0}^{p-1} \exp \left(-\mu \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q G_{ik}^h \right)}$
$J_{efc3}(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} u_{ik} (\beta_i^h)^l G_{ik}^h + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{h=0}^{p-1} u_{ik} \log u_{ik}$	$\frac{\sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n u_{ik}}$	$\frac{\exp \left(-\lambda \sum_{h=0}^{p-1} (\beta_i^h)^l G_{ik}^h \right)}{\sum_{j=1}^c \exp \left(-\lambda \sum_{h=0}^{p-1} (\beta_j^h)^l G_{jk}^h \right)}$	$\left[\frac{\sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot G_{ik}^h}{\sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot G_{ik}^h} \right]^{\frac{1}{l-1}}^{-1}$
$J_{efc4}(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} u_{ik} \cdot \beta_i^h \cdot G_{ik}^h + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{h=0}^{p-1} u_{ik} \log u_{ik} + \mu^{-1} \sum_{i=1}^c \sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h \log \beta_i^h$	$\frac{\sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n u_{ik}}$	$\frac{\exp \left(-\lambda \sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h \cdot G_{ik}^h \right)}{\sum_{j=1}^c \exp \left(-\lambda \sum_{h=0}^{p-1} \beta_j^h \cdot G_{jk}^h \right)}$	$\frac{\exp \left(-\mu \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot G_{ik}^h \right)}{\sum_{h=0}^{p-1} \exp \left(-\mu \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot G_{ik}^h \right)}$

またこれらの目的関数を用いたクラスタリング結果についても、図3と同様の結果を得ることができた。乱数で与えた同じ初期値からそれぞれクラスタリングを行い、パラメータは表4にある値を用いた。別の乱数による初期値を用いると若干異なる結果となることもあるが、ほぼ5割以上の割合で同様の結果が得られた。クラスタリング過程において目的関数の値が変化する様子を図5に示す。クラスタリングのパラメータが違うため、初期値、およびクラスタリング結果での目的関数の値は若干異なっているが、どの目的関数もクラスタリングが進むにしたがい単調減少していることがわかる。このように、係数の正則化の手法に関わらず同様のクラスタリングの結果が得られた。また、それぞれクラスタリング過程において目的関数の値が減少していることが確認された。

さらに図2のデータを本手法でクラスタリングを行うと、すべての目的関数においてパラメータの値を変更することにより、同じ初期値から、左図・右図のどちらのクラスタリング結果も得ることができた。これは図2のデータを、見方によっては左図のようにも右図のようにも見ることを意味している。そしてその見方を、クラスタリングのパラメータで調整

表4 クラスタリングパラメータ

目的関数	メンバシップの 正則化パラメータ	次元係数の 正則化パラメータ
J_{efc1}	$q = 1.8$	$l = 1.2$
J_{efc2}	$q = 1.8$	$\mu^{-1} = 1.2$
J_{efc3}	$\lambda^{-1} = 0.1$	$l = 1.2$
J_{efc4}	$\lambda^{-1} = 0.1$	$\mu^{-1} = 1.2$

図5 クラスタリング過程における目的関数の値の変化

していると考えられる。ただここで注意が必要なのは、次元係数の正則化パラメータ l や μ^{-1} は β^q のあいまいさを与えるパラメータであり、線形性の重視度を与えるものではないということである。このあいまいさが正則化手法によってどのように異なっているかについては、メンバシップに関する比較の研究[5,6]を参考にされたい。これらの正則化の違いによるクラスタリングの詳しい比較については、今後の研究としたい。

4. おわりに

これまで行われてきた適応型クラスタリング手法における、目的関数の最小化に関する問題点を示し、次元係数の正則化による新たなクラスタリング手法を提案した。線形多様体の次元係数を、2段階アルゴリズムと同様に扱い、目的関数を最小化するよう最適化により計算するため、本手法はクラスタリング過程を通し、目的関数が単調減少する。本研究は、これまで適応型ファジィクラスタリングの手法を用いてきた分野への今後の応用が考えられる。例えば、多次元の部分的な線形構造をとらえたクラスタリングを用いた楕円型ファジィモデル[3]やファジィモデル同定のための前件部変数選択を考慮したファジィクラスタリング[7]などの研究がある。

さらにメンバシップ値の正則化には、2次正則化法[6]が提案されている。本手法のメンバシップ、次元係数の正則化にこの2次正則化を用いることも考えることができる。

謝 辞

本論文の査読にあたり、貴重なご指摘と有益なご意見を頂きました査読者の方々に感謝いたします。なお、本研究の一部は筑波大学 先端学際領域研究センターにおける共同研究プロジェクトの一環として行われた。

付録

1. 正則化について

ファジィクラスタリングがどのような意味で正則化といえるのかについては、宮本[8]に述べられている。ここでは、crisp k -means法がどのようにfuzzy c -means法へ正則化されているかについてだけを簡単に述べる。

crisp k -means法では、個体 x_k がクラス i に所属するか否かを変数 u_{ik} によって、

$$u_{ik} = \begin{cases} 1, & (\mathbf{x}_k \text{がクラス} i \text{に所属する}) \\ 0, & (\mathbf{x}_k \text{がクラス} i \text{に所属しない}) \end{cases} \quad (23)$$

と決める。すべての個体は、ただ1つのクラスに所属するので、 $\sum_{i=1}^c u_{ik} = 1$ が成り立つ。これを $U = (u_{ik})$ の許容集合

$$M_{ckm} = \left\{ (u_{ik}) \left| \sum_{i=1}^c u_{ik} = 1, u_{ik} \in \{0, 1\}, \right. \right. \\ \left. \left. k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

を用いれば、crisp k -means 法は、行列 $U = (u_{ik})$ とクラスタの代表点 $V^0 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_c)$ に関する

$$J_{ckm}(U, V^0) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n u_{ik} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_k\|^2 \quad (24)$$

の最小化問題として定式化される。

次に fuzzy c -means 法では、crisp k -means 法をファジィ化するために2値マトリックス U をファジィに一般化する。 u_{ik} は0から1の任意の値をとれるので、許容集合は、

$$M_{fcm} = \left\{ (u_{ik}) \left| \sum_{i=1}^c u_{ik} = 1, u_{ik} \in [0, 1], \right. \right. \\ \left. \left. k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

となる。しかし、一般化はまだ十分ではない。目的関数 J_{ckm} は u_{ik} に対して線形であり、最適な u_{ik} を求める問題は線形計画問題となる。そして線形計画問題の最適解は端点、すなわち u_{ik} が0か1となり、メンバシップはクリスプ解となる。

そのため、Bezdek[1]とDunnはパラメータ $q(>1)$ を導入し、次のような評価規範を用いている。

$$J_{fcm}(U, V^0) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_k\|^2 \quad (25)$$

この J_{fcm} を用いることにより、 u_{ik} の最適解は(3)式のようにファジィ化され、 $\mathbf{x}_k$ が $\mathbf{v}_i$ に一致しなければ、 $0 < u_{ik} < 1$ となる。

crisp k -means 法の正則化として、他にもエントロピー正則化法[5]や2次正則化法[6]が提案されており、正則化の方法によりクラスタリング結果が異なった性質を持つことが分類関数を用いて示されている。

II. 目的関数(16)式のBに関する最適解

補題ファジィ散布行列の固有値と固有ベクトルの関係

ファジィクラス i のファジィ散布行列 S_i の第 j 固有値を λ_{ij} 、対応する固有ベクトルを $\mathbf{e}_{ij}$ とする。(ただし $\|\mathbf{e}_{ij}\| = 1$) このとき、次式が成り立つ。

$$\lambda_{ij} = \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q [(\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i)^\top \mathbf{e}_{ij}]^2 \quad (26)$$

証明

$$S^2 = \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q [(\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i)^\top \mathbf{e}_{ij}]^2$$

とおくと、

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q [\mathbf{e}_{ij}^\top (\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i) (\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i)^\top \mathbf{e}_{ij}] \\ &= \mathbf{e}_{ij}^\top \left[\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q (\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i) (\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i)^\top \right] \mathbf{e}_{ij} \\ &= \mathbf{e}_{ij}^\top S_i \mathbf{e}_{ij} = \lambda_{ij} \mathbf{e}_{ij}^\top \mathbf{e}_{ij} = \lambda_{ij} \end{aligned}$$

となり、(26)式が示される。■

命題

目的関数

$$J(U, V, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q \beta_i^h \frac{D_{ik}^h}{p-h}$$

の B についての最適解は

$$\beta_i^{p-1} = 1, \beta_i^h = 0 \quad (h = 0, 1, \dots, p-2) \quad (27)$$

となる。

証明

この目的関数は、各クラスごとに独立であるから、

$$J^{(i)} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q \beta_i^h \frac{D_{ik}^h}{p-h} \quad (28)$$

とおくと、

$$J = \sum_{i=1}^c J^{(i)} \quad (29)$$

と表せる。各 $J^{(i)}$ の B に関する最適化は

$$\begin{aligned} \min_B J^{(i)} &= \min_B \sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h \left(\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q \frac{D_{ik}^h}{p-h} \right) \\ &= \min_{h(\leq p-1)} \left(\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q \frac{D_{ik}^h}{p-h} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

となり、これは各項の中で最小となる h の項を選択する問題となる。

ここでクラス i のファジィ散布行列の第 j 固有値、固有ベクトルを $\lambda_{ij}, \mathbf{e}_{ij}$ (ただし $\|\mathbf{e}_{ij}\| = 1$) とすると、プロトタイプ V_i の最適性の条件、及び補題より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q \frac{D_{ik}^h}{p-h} \\ = \frac{1}{p-h} \sum_{k=1}^n \sum_{j=h-1}^p (u_{ik})^q |\langle \mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_{ij} \rangle|^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p-h} \sum_{j=h+1}^p \lambda_{ij} \quad (31)$$

また、 $\lambda_{i,1} \geq \lambda_{i,2} \geq \dots \geq \lambda_{i,p}$ より、 $h \geq h'$ のとき、

$$\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q \frac{D_{ik}^h}{p-h} \leq \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q \frac{D_{ik}^{h'}}{p-h'} \quad (32)$$

となり、目的関数は $h=p-1$ のとき最小値となる。よって最適解は(27)式のようになり、

$$J^{(i)} = \lambda_{ip} \quad (33)$$

となる。■

IV. 最適化による係数の決定

クラスタのプロトタイプ V_i 、メンバシップ u_{ik} 、および次元係数 β_i^h を、それぞれ他を定数として目的関数

$$J_{efc} = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q (\beta_i^h)^{\frac{1}{q-1}} \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} \quad (34)$$

を最適化することにより求める。

IV.(a) クラスタのプロトタイプ V_i に関する最適解

メンバシップ u_{ik} および、クラスタの次元係数 β_i^h が与えられたとき、目的関数を最小化するクラスタのプロトタイプ V_i を求める。

このとき J_{efc} は、クラスタごとに独立だから、

$$J_i = \sum_{h=0}^{p-1} \left[\frac{(\beta_i^h)^{\frac{1}{q-1}}}{(p-h)^2} \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q D_{ik}^h \right] \quad (35)$$

を最小化する V_i を求めればよい。 V_i は(4)式にあるように、 v_i と e_{ij} によって定められている。そこで、まず v_i 、次に e_{ij} についての最適解を求めよう。

まず v_i について導出する。 $A_{ih} = I - \sum_{j=1}^h e_{ij} e_{ij}^T$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{ik}^h}{\partial v_i} &= -2 \left[(x_k - v_i) - \sum_{j=1}^h e_{ij}^T (x_k - v_i) e_{ij} \right] \\ &= -2 A_{ih} (x_k - v_i) \end{aligned} \quad (36)$$

したがって、

$$\frac{\partial J_i}{\partial v_i} = -2 \left[\sum_{h=0}^{p-1} \frac{(\beta_i^h)^{\frac{1}{q-1}}}{(p-h)^2} A_{ih} \right] \sum_{k=1}^n (u_{ik})^q (x_k - v_i)$$

$\frac{\partial J_i}{\partial v_i} = 0$ の十分条件から、最終的に、(2)式を得る。

次に e_{ij} についての導出を行う。 J_i を最小化するためには、 J_i と D_{ik}^h の定義(5)式より、まず

$$\sum_{k=1}^n (u_{ik})^q |x_k - v_i, e_{ip}|^2 \quad (37)$$

を最小化するように e_{ip} を定める。次に $e_{i,p-1}$ を e_{ip} と

は線形独立に J_i を最小化するようにと、順々に定めてゆけばよい。

ところで(37)式は付録IIの補題より、ファジィ散布行列 S_i の固有値 $\lambda_{i,p}$ と等しい。よって、 $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ip}$ はファジィ散布行列 S_i の固有値 $\lambda_{i,1} \geq \lambda_{i,2} \geq \dots \geq \lambda_{i,p}$ に対応する固有ベクトルととればよい。

IV.(b) メンバシップ u_{ik} に関する最適解

クラスタの代表点 v_i および、クラスタの次元係数 β_i^h が与えられたとき、目的関数を最小化する u_{ik} を求める。制約条件を考慮すれば、ラグランジュ関数は、

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q (\beta_i^h)^{\frac{1}{q-1}} \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\sum_{i=1}^c u_{ik} - 1 \right) \end{aligned} \quad (38)$$

となる。ただし、 λ_k はラグランジュ乗数である。

$$\frac{\partial L_1}{\partial u_{ik}} = q \cdot (u_{ik})^{q-1} \sum_{h=0}^{p-1} (\beta_i^h)^{\frac{1}{q-1}} \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} + \lambda_k = 0$$

これを u_{ik} について解いて、

$$u_{ik} = \left[\frac{-\lambda_k}{q \cdot \sum_{h=0}^{p-1} (\beta_i^h)^{\frac{1}{q-1}} \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2}} \right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (39)$$

制約条件 $\sum_{i=1}^c u_{ik} = 1$ より、

$$\lambda_k = - \left[\sum_{i=1}^c \left(q \cdot \sum_{h=0}^{p-1} (\beta_i^h)^{\frac{1}{q-1}} \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} \right)^{-\frac{1}{q-1}} \right]^{-(q-1)} \quad (40)$$

となり最終的に、(18)式を得る。

IV.(c) 次元係数 β_i^h に関する最適解

メンバシップ u_{ik} および、クラスタの代表点 v_i が与えられたとき、目的関数を最小化するクラスタの次元係数 β_i^h を求める。ここでも、メンバシップのときと同様に制約条件を考慮すれば、ラグランジュ関数は、

$$\begin{aligned} L_2 &= \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^{p-1} (u_{ik})^q (\beta_i^h)^{\frac{1}{q-1}} \frac{D_{ik}^h}{(p-h)^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^c \lambda_i \left(\sum_{h=0}^{p-1} \beta_i^h - 1 \right) \end{aligned} \quad (41)$$

となる。ただし、 λ_i はラグランジュ乗数である。 u_{ik} の場合と同様に、これを解いて最終的に(19)式を得る。

参考文献

- [1] J. C. Bezdek: *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum, New York, 1981.
- [2] R. N. Dave: An adaptive fuzzy c -elliptotype clustering algorithm. *Proc. of NAFIPS 90: Quarter Century of Fuzziness*, Vol.I, pp.9-12, 1990.

- [3]馬屋原 一孝,中森 義輝:線形多様体クラスタリングと楕円型ファジィモデル. 日本ファジィ学会誌, Vol.10, No.1, pp.142-149, 1998.
- [4]G. Phansalkar and R. N. Dave:On Generating Solid Models of Mechanical Parts through Fuzzy Clustering. *Proc. of FUZZ-IEEE'97*, pp. 225-230, 1997.
- [5]宮本 定明,馬屋原 一孝,向殿 政男:ファジィ c-平均法とエントロピー正則化法におけるファジィ分類関数. 日本ファジィ学会誌, Vol.10, No.3, pp.548-557, 1998.
- [6]馬屋原 一孝,宮本 定明:2次正則化によるファジィクラスタリング. 日本ファジィ学会誌, Vol.10, No.5, pp.907-914, 1998.
- [7]領家美奈,飯沼剛志,中森義輝,田村坦之:ファジィモデル同定のための前件部変数選択を考慮したファジィク

ラスタリング, 日本ファジィ学会誌, Vol.12, No.1, pp.105-113, 2000.

- [8]宮本定明:ファジィクラスタリングあれこれ. 日本ファジィ学会誌, Vol.8, No.3, pp.423-430, 1996.

(1999年11月11日 受 付)

(2000年 5月23日 再受付)

[問い合わせ先]

〒923-1292 石川県能美郡辰口町旭台1-1

北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科

馬屋原 一孝

TEL : 0761-51-1758

FAX : 0761-51-1149

E-mail : uma@jaist.ac.jp

著 者 紹 介

うまや はら かずたか
馬屋原 一孝 [正会員]

北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科

1991年3月 大阪府立大学大学院総合科学研究科情報科学専攻修士課程修了。1991年4月 青年海外協力隊に参加しマラウイ共和国農業省勤務。1997年4月 甲南大学大学院自然科学研究科情報・システム科学専攻博士後期課程退学。1997年5月より筑波大学 電子・情報工学系助手, 機能工学系助手を経て, 2000年4月より北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科 助手。博士(工学)。日本ファジィ学会会員。

みやもと さだあき
宮本 定明 [正会員]

筑波大学機能工学系

昭和53年3月 京都大学大学院工学研究科博士課程(数理工学専攻)修了。同年筑波大学技官, 昭和56年 筑波大学講師(電子・情報工学系), 昭和62年 同助教授, 平成2年 徳島大学教授(工学部), 平成6年, 筑波大学教授(電子・情報工学系), 平成11年, 筑波大学教授(機能工学系)となり, 現在に至る。ファジィ理論とその情報検索への応用, クラスタ分析, メタ戦略による最適化などの研究に従事, 工学博士。1994年度および1998年度日本ファジィ学会論文賞受賞。計測自動制御学会, システム制御情報学会, 日本ファジィ学会, 情報処理学会, 日本応用数理学会, IEEE等の会員。

Linear Fuzzy Clustering by Regularization of Dimensional Coefficients

by

Kazutaka Umayahara and Sadaaki Miyamoto

Abstract :

This paper considers the problem of detecting local linear substructures of a system in a high-dimensional data space by applying a fuzzy clustering technique. A problem in the adaptive method is pointed out. Namely, the value of the objective function does not have the monotonically decreasing property in the adaptive method. A new clustering method using an objective function with regularization of dimensional coefficients is proposed, whereby the monotonically decreasing property is guaranteed. In this paper, additive regularization using entropy, as well as the standard regularization by Bezdek, is studied in order to regularize membership values and dimensional coefficients. Illustrative examples are shown.

Keywords : Fuzzy Clustering, Linear Structure, Regularization

Contact Address : **Kazutaka Umayahara**

School of Knowledge Science,

Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hokuriku

1-1 Asahidai, Tatsunokuchi, Ishikawa 923-1292, Japan

TEL : 0761-51-1758

FAX : 0761-51-1149

E-mail : uma@jaist.ac.jp