論文

重要度と λ による
 λ ファジィ測度の同定について[†]

高萩 栄一郎*

λ ファジィ測度を各評価項目の重要度と相互作用の度合いである λ を用いて同定する方法について述べる。ファジィ測度の評価項目の重要度は、重要度の考え方により異なる。本稿では、3つの重要度の考え方を示し、それらに対応するファジィ測度を定義する。シングルトンファジィ測度比率基準は、シングルトンのファジィ測度の比率と重要度の比率を一致させるものである。入力の数基準は、重要度に比例した数の等重みの入力があると考えられるものであり、最大値、平均値、最小値の拡張になっている。Shapley 値基準は、Choquet 積分の入力値の重みの期待値を重要度にするものである。それぞれの基準について、そのファジィ測度の存在や特徴、同定方法を述べる。次に、 λ の意味を考察し、 λ の同定方法を複数述べる。最後に、 λ に一対一対応し同定等を使う場合により使いやすい相互作用の指標をいくつか提案し、それらの関係を考察する。

キーワード：ファジィ測度、Choquet 積分、 λ ファジィ測度、Shapley 値

1. はじめに

n 個の評価項目の評価値を総合評価するファジィ測度ファジィ積分モデルは、評価項目の重要度の加重和を拡張し、評価項目間の相互作用を表現できるモデルであるといわれてきている。ファジィ測度は、評価項目の重要度や評価項目間の相互作用を考慮して同定されるのだが、評価項目間の相互作用には、2つのタイプがある。

1つは、「相互作用が内部にある」場合で、各評価項目の性質と評価項目間の関係により相互作用が発生する場合である。したがって、相互作用は、評価項目の性質と関係により決まるので、ある評価項目間で補完的であっても、別の評価項目間では代替的であることもある。例えば、新車の評価で、MD の有無とカセットデッキの有無は、片方があればよく、両方あっても少ししか総合評価を高めず、代替的な関係がある。これは、MD とカセットデッキが同じような機能(性質)を持ち、片方存在すればよいという関係を持つことに起因する。価格と燃費は、両方よい評価が必要な場合が多く、この場合、補完的な関係になる。したがって、「相互作用が内部にある」場合は、個々のファジィ測度の値を評価項目間の関係を考慮して同定する必要がある。

もう1つは、「相互作用が外部にある」場合で、相互作用を考える上で、各評価項目の性質は考慮せず同質のものとし、総合評価者が、評価項目間の全体のバラ

ンスを考え、一律に相互作用の度合いを定める場合である。評価項目間の性質を問わず、すべての評価項目間の相互作用の度合いは同じ値とする。例えば、骨董品の評価で、5人の鑑定人の鑑定金額があり、自分の鑑定金額としての総合評価値を求める場合である。この場合、各鑑定人は同種の評価項目であり、各鑑定人の信頼度(重要度)と、安全性を考えて低めの鑑定金額の影響を強める場合や披露のために高めの鑑定金額の影響を強くする場合がある。この場合、この高めとか低めかの度合いを λ などの1つの相互作用の指標とし、重要度と合わせてファジィ測度を同定する。

本論文で述べる λ ファジィ測度は、後述の式(2)で示すように、すべてのファジィ測度の値を λ という1つの相互作用の指標で割り当てるもので、後者の「相互作用が外部にある」場合に利用するものである。

λ ファジィ測度は、菅野[1]により導入されて以来、多くの応用例で利用されているが、その性質などが検討されることは少ない。本論文では、評価項目への重要度と相互作用の度合いである λ を与え、 λ ファジィ測度を同定する。線型加重和とは異なり、ファジィ測度における評価項目の重要度の表現方法がいくつかある。本論文では、重要度の意味に対応して「シングルトンファジィ測度比率基準」、「入力の数基準(ϕ_s 変換)」、「Shapley 値基準」を定義し、その同定方法、特徴などを考察していく。

2. 定義および主な性質

2.1 ファジィ測度・Choquet 積分

ファジィ測度は菅野[1]により提案されたもので、多くの分野で利用されている。本稿では、 n 個の評価項目の集合を $X = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、ファジィ測度 μ を次のように定義する。

[†] On Identification Methods of λ -Fuzzy Measures using Weights and λ
Eiichiro TAKAHAGI

* 専修大学商学部
School of Commerce, Snesu University

- $\mu: 2^X \rightarrow [0, 1]$
- $\mu(X) = 1$ (正規性), $\mu(\emptyset) = 0$
- $\forall A, B \in 2^X$ について, $A \subseteq B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ (単調性制約)

また, 要素の数が1の集合のファジィ測度 $\mu(\{1\}), \dots, \mu(\{n\})$ をシングルトンファジィ測度と呼ぶ. 被積分関数 h は, 個々の評価項目の評価値に相当し,

$$\cdot h: X \rightarrow R$$

で定義される. $h(i)$ は, i 番目の評価項目の評価値を表す. 総合評価値 z は, Choquet 積分(室伏ら[9])

$$z = (C) \int h d\mu \equiv \int_0^{+\infty} \mu(\{x; h(x) \geq \alpha\}) d\alpha + \int_0^{-\infty} [\mu(\{x; h(x) \geq \alpha\}) - \mu(X)] d\alpha \quad (1)$$

で求めるものとする.

2.2 λ ファジィ測度

λ ファジィ測度 μ_λ は, 菅野[1]により提案されたもので, ある $\lambda (> -1)$ を与え, $A \cap B = \emptyset$ となるすべての $A, B \in 2^X$ に対して,

$$\mu_\lambda(A \cup B) = \mu_\lambda(A) + \mu_\lambda(B) + \lambda \mu_\lambda(A) \mu_\lambda(B) \quad (2)$$

が成り立つ正規なファジィ測度 μ_λ である. すなわち, すべての互いに疎な集合の和集合に対して, 式(2)を満たし, $\mu(X) = 1$ で, かつファジィ測度の条件を満たすものをいう.

このとき, λ とシングルトンファジィ測度の値から, λ ファジィ測度の値は,

$$\mu(A) = \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{i \in A} (1 + \lambda \mu(\{i\})) - 1 \right], \quad \forall A \in (2^X \setminus \emptyset) \quad (3)$$

で計算できる[1]. また,

$$S_\lambda: [0, 1]^2 \rightarrow R^+ \quad (4)$$

$$S_\lambda(a, b) = a + b + \lambda ab, \lambda > -1 \quad (5)$$

とすると, $a, b, c, d \in [0, 1], \lambda \in (-1, \infty)$ のとき,

- 対称性 $S_\lambda(a, b) = S_\lambda(b, a)$
- 結合性 $S_\lambda(a, S_\lambda(b, c)) = S_\lambda(S_\lambda(a, b), c)$
- 強意の単調増加性 $a > c, b \geq d$ または $a \geq c, b > d$ ならば, $S_\lambda(a, b) > S_\lambda(c, d)$
- 連続性 $S_\lambda(a, b)$ は, a, b に対して連続

という性質を持つ.

また, $a < c$ となる a, c および λ を固定すれば,

$$S_\lambda(a, b) = c \quad (6)$$

となる b が, 強意の単調増加性と連続性により一意に存在する.

2.3 ϕ_s 変換

ϕ_s 変換は, 塚本[3][12]により提案された加法的な測度から λ ファジィ測度を求める関数である. ϕ_s 変換は,

$$\phi_s: [0, 1] \rightarrow [0, 1], s \in [0, +\infty] \quad (7)$$

$$\phi_s(u) = \begin{cases} <u> & \text{if } s=0 \\ u & \text{if } s=1 \\ 1 - <1-u> & \text{if } s=+\infty \\ (s^u - 1)/(s - 1) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{ただし } <u> = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{if } u=0 \end{cases}$$

で定義される. ただし, $s = \lambda + 1$ である. $u_i \in [0, 1], \forall i \in X, \sum_{i=1}^n u_i = 1 \forall A, B \in 2^X, A \cap B = \emptyset$ に対して,

$$\begin{aligned} \phi_s\left(\sum_{i \in A \cup B} u_i\right) &= \phi_s\left(\sum_{i \in A} u_i\right) + \phi_s\left(\sum_{i \in B} u_i\right) \\ &\quad + (s-1) \phi_s\left(\sum_{i \in A} u_i\right) \phi_s\left(\sum_{i \in B} u_i\right) \end{aligned} \quad (9)$$

となり, u_i から

$$\mu_\lambda(A) = \phi_s\left(\sum_{i \in A} u_i\right), \text{ ただし } \lambda = s-1 \quad (10)$$

で, λ ファジィ測度を求めることができる. また,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_s(u) = 1 - <1-u> \quad (11)$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \phi_s(u) = u \quad (12)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \phi_s(u) = <u> \quad (13)$$

である. また, $s \in (0, \infty)$ のとき, 逆関数は,

$$\phi_s^{-1}(v) = \begin{cases} \log_s(1 + (s-1)v) & \text{if } s \neq 1 \\ v & \text{if } s = 1 \end{cases} \quad (14)$$

で定められる. また, $0 < s < 1$ または $1 < s$ のとき,

$$\frac{\partial \phi_s(u)}{\partial u} = \frac{s^u \log_e(s)}{s-1} > 0 \quad (15)$$

となり, u に関して強意に単調増加であり, また,

$$\frac{\partial^2 \phi_s(u)}{\partial u^2} = \frac{s^u \log_e(s)^2}{s-1} \quad (16)$$

となり, $s > 1$ ならば $\frac{\partial^2 \phi_s(u)}{\partial u^2} > 0$ で, $s < 1$ ならば

$\frac{\partial^2 \phi_s(u)}{\partial u^2} < 0$ である. また, $s=1$ のときは, $\frac{\partial^2 \phi_s(u)}{\partial u^2} = 0$

であり, 明らかに, $\frac{\partial \phi_s(u)}{\partial u} = 1 > 0$ である.

補題1 $s \in (0, \infty)$ で $\phi_s(u)$ は、 u をある $u \in (0, 1)$ に固定したとき、 s に対して強意に単調減少である。

(証明) $s \neq 1$ の場合

$$\frac{\partial \frac{s^u - 1}{s - 1}}{\partial s} = \frac{s^{u+1} \left[\left(\frac{1}{s^u} - 1 \right) + u \left(1 - \frac{1}{s} \right) \right]}{(s-1)^2 s} \quad (17)$$

分母は、 $s > 0$ より明らかに正である。 s^{u+1} は、正であるので、

$$\left(\frac{1}{s^u} - 1 \right) + u \left(1 - \frac{1}{s} \right) \quad (18)$$

が負であればよい。そこで、

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{s^u} - 1 \right) + u \left(1 - \frac{1}{s} \right)}{\partial s} = \frac{1}{s^{u+2}} (s^u - s) u \quad (19)$$

とする。式(19)の符号は、 $\frac{1}{s^{u+2}} > 0$ であり、 $u \in [0, 1]$ であるので、 $s^u - s$ の符号による。 $s^u - s$ は、 $0 < s < 1$ ならば正であり、 $1 < s$ ならば負で、 $s = 1$ ならば0である。 $s = 1$ のとき、式(18)は0であるので、 $s \neq 1$ のとき、式(18)は、負である。したがって、式(17)は、負である。

(証明終)

2.4 $[0, 1]$ 区間の相互作用の度合 ξ

ξ は、塚本[12]により導入されたもので、 $0 < s < +\infty$ を $(0, 1)$ 区間、また、 s が、 $\infty, 0$ の場合を含めて、 $\xi \in [0, 1]$ で表現している。

$$\xi: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$$

$$\xi(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s = 0 \\ 0 & \text{if } s = +\infty \\ \frac{1}{1 + \sqrt{s}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

で定義され、 s および λ と一対一対応となっている。すなわち、 λ, s とは、正負の方向は逆で、 $\xi = 0.5$ で加法的なファジィ測度を表わす相互作用の指標である(図1)。図2は、 ξ を変化させたときの ϕ_s 変換のグラフである。

図1 ξ と λ の関係

図2 ϕ_s 変換の形状

また、 ξ から s を求める逆関数は、

$$s = \xi^{-1}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } x = 0 \\ \frac{(1-x)^2}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

である。

2.5 λ とファジィ測度の関係

Tahani ら[8]によれば、

補題2 シングルトンファジィ測度 $\mu(\{i\}) \in (0, 1)$ 、 $i = 1, \dots, n$ を与えれば、あるユニークな $\lambda \in (-1, +\infty)$ の λ ファジィ測度が存在する。

補題3 $\mu_{\lambda_1}(\{i\}), \mu_{\lambda_2}(\{i\})$ をそれぞれ λ_1, λ_2 での λ ファジィ測度とすると、 $\mu_{\lambda_1}(\{i\}) \geq \mu_{\lambda_2}(\{i\}), \forall i$ かつ $\mu_{\lambda_1}(\{i\}) > \mu_{\lambda_2}(\{i\}), \exists i$ ならば、 $\lambda_1 < \lambda_2$ である。

の2つの補題を示している。

2.6 t コノルムを基にしたファジィ測度

Dubois ら[2], Weber[6]は、 λ ファジィ測度を t コノルムの一種として考えており、 λ ファジィ測度に対応する t コノルムを

$$U_\lambda(a, b) = \min(a + b + \lambda ab, 1), \lambda > -1 \quad (22)$$

で定義し、その性質等を検討している。

ただし、 t コノルムとして扱うために、 $a + b + \lambda ab > 1$ となった場合、一律に $U_\lambda(a, b) = 1$ にしている。このため、 $U_\lambda(a, b) = 1$ として、 a, λ を固定しても、式(6)とは異なり、 b は、一意に定められるとは限らない。

3. 重要度と λ による λ ファジィ測度の同定

各評価項目の重要度を $w_1, \dots, w_n, w_i \in [0, 1]$ 、 $\sum w_i = 1$ とし、 $\lambda \in (-1, \infty)$ をパラメータとして与え、式(2)を満足する μ_λ を求める方法を考察する。

加重和 $\sum_{i=1}^n (w_i h(i))$ とは異なり、ファジィ測度に関するChoquet積分の場合、重要度が何を意味するのかは明確ではない。そこで、ファジィ測度における重要度を3つ定義し、それぞれを比較していく。

3.1 重要度を加味した場合、保持したい性質

重要度を加味した λ ファジィ測度を同定する場合、保持して欲しい性質を下記のように4つ挙げる. この4つの性質は, §3.2で示すように等重要度の場合, すべて保持されるが, 重要度を加味した場合, 保持されるとは限らない.

第1に, 最大値, 平均値, 最小値の拡張になるという性質である. $\mu_{\max}(A)=1, \forall A \in (2^X \setminus \{\emptyset\})$ というファジィ測度を与え, Choquet 積分をすると最大値での評価になることが知られている.

$$(C) \int h d\mu_{\max} = \max(h(1), \dots, h(n)) \quad (23)$$

また, $\mu_{\min}(A)=0, \forall A \in (2^X \setminus \{X\})$ というファジィ測度を与え, Choquet 積分をすると最小値での評価になることが知られている.

$$(C) \int h d\mu_{\min} = \min(h(1), \dots, h(n)) \quad (24)$$

そこで, 各重要度の基準で,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1} \mu_{\lambda}(A) = 1, \forall A \in (2^X \setminus \{\emptyset\}) \quad (25)$$

となれば, 最大値の拡張,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_{\lambda}(A) = 0, \forall A \in (2^X \setminus \{X\}) \quad (26)$$

となれば, 最小値の拡張, また, $\lambda=0$ のとき, λ ファジィ測度が加法的であれば加重平均の拡張ということにする.

第2に重要度が μ の Shapley 値になるという性質である. 室伏[10]は, ファジィ測度 μ の Shapley 値がその公準から, ファジィ測度の X の要素の平均効果の指標として利用できるとしている. i 番目の評価項目の Shapley 値 $sh_i(\mu)$ は,

$$sh_i(\mu) = \sum_{S \subseteq X} \gamma_n(S) [\mu(S) - \mu(S \setminus \{i\})] \quad (27)$$

$$\gamma_n(S) = \frac{(n-|S|)! (|S|-1)!}{n!} \quad (28)$$

で定義される. ただし, $|S|$ は, 集合 S の要素の数である.

Shapley 値の有用性は, 「関数を n 次元確率変数と見なし, 任意の順列 $(i_1, \dots, i_n)$ に対して, $h(x_{i_1}) < h(x_{i_2}) < \dots < h(x_{i_n})$ が等確率で起こるとき, x_i の Choquet 積分における関数値に対する重みの期待値は, Shapley 値に等しい.」([10]より引用, 一部, 記号・用語等を, 著者が本稿にあわせた.) ことにある.

第3に, シングルトンのファジィ測度の比が重要度の比になっているかという性質である.

第4に, 任意の重要度 (w_i) , λ を与えたとき, その条件を満たす λ ファジィ測度が存在することである.

3.2 等重要度の場合

等重要度の場合,

$$\mu_{\lambda}(A) = \phi_{\lambda}(|A|/n) \quad (29)$$

で λ ファジィ測度を割り当てればよい.

式(11), (12)および(13)より, 最大値・平均値・最小値の拡張になっている. また, Shapley 値の定義式(27)より, $sh_i(\mu) = 1/n$ となり, 重要度と Shapley 値は等しい. また, $\mu_{\lambda}(\{i\}) = \phi_{\lambda}(1/n), \forall i$ なので, シングルトンの λ ファジィ測度の比は, 重要度の比に等しい. また, n と λ に対するファジィ測度 μ_{λ} は, 式(29)より明らかに存在する. 式(29)の $\mu_{\lambda}(A), \forall A \in 2^X$ は, ϕ_{λ} 変換の定義式(8)および式(11), (12)および(13)より, λ に対して連続である.

3.3 シングルトンファジィ測度比率基準

3.3.1 定義等

シングルトンファジィ測度比率基準は, 杉山ら[11]や中島[13]などで使われており, 最もポピュラーな重要度であり, その名の示すとおり, シングルトンの λ ファジィ測度の比率を重要度に一致させる方法である. すなわち, シングルトンファジィ測度比率基準の λ ファジィ測度を,

$$\mu_{\lambda}(\{1\}) : \dots : \mu_{\lambda}(\{n\}) = w_1 : \dots : w_n \quad (30)$$

を満たす λ ファジィ測度と定義する.

3.3.2 存在

定理1 評価項目への重要度 $w_1 : w_2 : \dots : w_n, \lambda \in (-1, \infty)$ と正規性 $\mu_{\lambda}(X) = 1$ を与えれば, $\mu_{\lambda}(\{1\}) : \mu_{\lambda}(\{2\}) : \dots : \mu_{\lambda}(\{n\}) = w_1 : w_2 : \dots : w_n$ となる λ ファジィ測度 μ_{λ} は存在し, ただ1つである.

(証明) 一般性を失うことなく, $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$ と仮定できる. また, $b_i = w_i/w_1, \forall i$ とする. すると, $b_1 = 1, 0 \leq b_i \leq 1$ である.

$$C_m = \{1, 2, \dots, m\}, 0 \leq m \leq n \quad (31)$$

$$\rho = \mu_{\lambda}(\{1\}) \quad (32)$$

とすると $\mu_{\lambda}(\{i\}) = \rho b_i$ となり, 次のような関数 f を定義する.

$$f^i : [0, P_i] \rightarrow [0, +\infty) \quad (33)$$

$$f^1(\rho) = \mu_{\lambda}(\{1\}) (= \rho) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} f^i(\rho) &= \mu(C_i) = S_{\lambda}(\mu_{\lambda}(C_{i-1}), \mu_{\lambda}(\{i\})) \\ &= S_{\lambda}(f^{i-1}(\rho), \rho b_i) \end{aligned} \quad (35)$$

このとき, $P_i = 1$ として, 各 i について, つぎのことを示す.

1. $f^i(\rho)$ が $\rho \in [0, P_i]$ で, 連続で, 強意に単調増加であること,
2. $f^i(P_i) \geq 1$ であること,

3. ある $Q \in (0, 1]$ に対して, $f^i(\rho) = Q$ となる $\rho \in [0, P_i]$ がただ1つ存在すること.
4. $f^i(\rho) = 1$ となる ρ を P_{i+1} とおく

$i=1$ の場合, 明らかに成り立つ.

$i-1$ で成り立っていると仮定する.

1. については, f^{i-1} が連続かつ強意に単調増加であり, $\rho \in [0, P_i]$ なので, $f^{i-1}(\rho) \in [0, 1]$ である. したがって, ρ が増大すれば, $f^{i-1}(\rho)$ と ρb_i は, 連続かつ強意に単調増加し, S_λ の連続性と強意の単調増加性より, $\rho \in [0, P_i]$ で, $f^i(\rho)$ は, 連続かつ強意に単調増加である.
 2. については, $f^{i-1}(P_i) = 1$ より, $f^i(P_i) = S_\lambda(f^{i-1}(P_i), \rho b_i) \geq 1$ である.
 3. については, $f^i(\rho)$ の連続性と強意の単調増加性より成り立つ.
- したがって, $f^n(\rho) = 1$ となる ρ が一意に定まる.

(証明終)

補題4 $\mu_\lambda(A)$, $A \in 2^X$ は, 各 w_i および λ に対して連続である.

(証明) 定理1の ρ は, n 次代数方程式

$$\mu_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{i=1}^n (1 + \lambda b_i \rho) - 1 \right] = 1 \quad (36)$$

の解の1つであり, その解は, パラメータに対して連続である. したがって, S_λ の連続性により, $\mu_\lambda(A)$, $A \in 2^X$ は連続である.

(証明終)

定理1により, 任意の重要度と λ によるシングルトンファジィ測度比率基準による λ ファジィ測度 μ_λ の存在は証明された.

補題5 同じ w_i で, $\lambda_1 > \lambda_2$ であれば, λ_1 から同定された ρ_1 , λ_2 から同定された ρ_2 では, $\rho_1 < \rho_2$ である.

(証明) 定理1の証明過程と $S_\lambda(a, b)$ の a, b に関する強意の単調増加性より明らかである.

(証明終)

3.3.3 同定方法

$\mu_\lambda(\{i\}) = \rho w_i$, $\forall i$, $\rho > 0$ とし, $\mu_\lambda(A) \in [0, 1]$, $\forall A$ となる式 (36) の解 ρ を求めればよい. しかし, 式 (36) は, n 次方程式で, 次数が高くなれば解くのが困難である. また, ρ が求まっても, その ρ によって同定された $\mu_\lambda(A)$ の値が, 単調性などのファジィ測度の条件を満たしているとは限らない. そこで, 定理1を利用し, ρ を2分法で発見するアルゴリズムを提案する. ただし, $w_1 \geq \dots \geq w_n$, $b_i = w_i/w_1$, $\forall i$ とする.

1. $\rho_H := 1, \rho_L := 0$ とする.
2. $\rho := (\rho_H + \rho_L)/2$ とする.
3. $i=1, q := \rho$ とする.

4. $i := i+1, q := q + b_i \rho + \lambda b_i \rho q$ とする.
5. $i < n$ かつ $q > 1$ ならば, $\rho_H := \rho$ として, 2.へ.
6. $i < n$ ならば, 4.へ
7. q と1の差が一定値以下になったら, アルゴリズムは終了
8. $q > 1$ ならば, $\rho_H := \rho$ として, 2.へ戻る.
9. $\rho_L := \rho$ として, 2.へ戻る.

また, ϕ_s 変換の u に関する強意の単調増加性(式 (15))を利用して,

$$\sum_{i=1}^n \phi_s^{-1}(\rho b_i) = 1 \quad (37)$$

となる ρ を2分法などで探すこともできる.

3.3.4 特徴

図3は, $n=3, w_1=1/6, w_2=2/6, w_3=3/6$ で, λ を $+\infty$ から -1 に変化させたときに, それぞれの λ ファジィ測度 $\mu_\lambda(A)$, $A \in 2^X$ がどのように変化するのかわを示したグラフである. このグラフから, $\lambda \rightarrow -1$ としたとき, $\mu_\lambda(\{1\}) = 1$ とはなっていないことが読み取れる.

$\lambda \rightarrow -1$ としたとき, $\mu_\lambda(\{1\}) = 1$ とはならない反例をあげると, $n=2$ で, $\mu_\lambda(\{1\}) : \mu_\lambda(\{2\}) = 1 : 2$ のとき, $\lambda \rightarrow -1$ で, $\mu_\lambda(\{1\}) = 0.5$ である. したがって, 最大値・最小値の拡張にはなっていない. ただし, $\lambda=0$ のとき, 加重和になっている.

また, 一般に $sh_i(\mu_\lambda) = w_i$ とはならない.

3.4 入力の数基準(ϕ_s 変換)

3.4.1 定義および同定法等

「入力の数基準」とは, 重要度を正の整数で与え, 各評価項目は, 重要度の数だけ入力があるものとして計算する.

すなわち, $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, $\Omega_i \in \{1, 2, \dots\}$ を重要度としたとき, $n' = \sum_{i=1}^n \Omega_i$ とし, n' 個入力があるとし, 等重要度で λ ファジィ測度 μ_λ を割り当てる.

図3 シングルトンファジィ測度比率基準

$$\mu'(A) = \phi_s(|A|/n') \quad (38)$$

$$h'(j) = h(i), \text{ if } \sum_{k=1}^{k=i-1} \Omega_k < j \leq \sum_{k=1}^{k=i} \Omega_k \quad (39)$$

とし、(C) $\int h' d\mu'$ で総合評価する。 $\sum_{k=1}^{k=i-1} \Omega_k + 1$ 番目から $\sum_{k=1}^{k=i} \Omega_k$ 番目までの $h'(j)$ は等しいので、

$$\mu_\lambda(A) = \phi_s\left(\frac{\sum_{i \in A} \Omega_i}{n'}\right) \quad (40)$$

として、

$$(C) \int h' d\mu' = (C) \int h d\mu \quad (41)$$

となる。したがって、

$$\mu_\lambda(A) = \phi_s\left(\sum_{i \in A} w_i\right), \text{ ただし } w_i = \Omega_i/n' \quad (42)$$

として、Choquet 積分したものが入力の数基準での総合評価値である。以上では、重要度 w_i は、有理数でなくてはならないが、 $\phi_s(u)$ の u は、実数なので、重要度も実数でよい。

3.4.2 存在

等重要度の場合と同様に、 λ ファジィ測度は ϕ_s 変換により与えられるので、任意の w_i, λ に対応する λ ファジィ測度は存在する。

3.4.3 特徴

図4は、 $n=3, w_1=1/6, w_2=2/6, w_3=3/6$ で、 λ を $+\infty$ から -1 に変化させたときに、それぞれの λ ファジィ測度 $\mu_\lambda(A), A \in 2^X$ がどのように変化するかを示したグラフである。

このグラフから、 $\lambda \rightarrow -1$ としたとき、 $\mu_\lambda(A) = 1, \forall A \in (2^X \setminus \emptyset)$ となり、最大値の拡張となっている。このことは、式(11)より、任意の $n, w_i (w_i > 0, \forall i)$ の場合に成り立つ。また、 $w_i = 0$ となる評価項目がある場合、 $\lambda \rightarrow -1$ としたとき総合評価値は、 $w_i = 0$ となる評価項目を除いた評価項目の入力値の最大値となる。

同様に、 $\lambda \rightarrow \infty$ としたとき、式(13)より、任意の n ,

図4 入力の数基準

$w_i (w_i > 0, \forall i)$ について、 $\mu_\lambda(A) = 0, \forall A \in (2^X \setminus \{X\})$ が成りっており、最小値の拡張になっている。また、 $w_i = 0$ となる評価項目がある場合、 $\lambda \rightarrow \infty$ としたとき総合評価値は、 $w_i = 0$ となる評価項目を除いた評価項目の入力値の最小値となる。

また、明らかに、式(12)より、平均値の拡張になっている。

また、一般に $sh_i(\mu) = w_i$ と も、 $\mu_\lambda(\{1\}) : \dots : \mu_\lambda(\{n\}) = w_1 : \dots : w_n$ と も成り立っていない。

3.5 Shapley 値基準

3.5.1 定義等

Shapley 値基準とは、重要度を Shapley 値とし、重要度と Shapley 値が一致する λ ファジィ測度を求めることである。

3.5.2 存在

定理2 評価項目への重要度 $w_1 : w_2 : \dots : w_n, \lambda \in (-1, \infty)$ と正規性 $\mu_\lambda(X) = 1$ を与えれば、 $sh_i(\mu_\lambda) = w_i, \forall i$ を満たす λ ファジィ測度 μ_λ は、存在する。

(証明) 定理1により、重要度と λ により、一意にファジィ測度 μ_λ を同定できるので、重要度と λ により、 μ_λ を求める2値関数を

$$g_{\lambda, n} : \sigma^n \rightarrow \{\mu_\lambda | \mu_\lambda \text{ は } \lambda \text{ ファジィ測度}\} \quad (43)$$

とする。ただし、 $\sigma^n = \{(q_1, \dots, q_n) | q_i \in [0, 1], \sum q_i = 1\}$ とする。補題4より、連続関数である。

また、ファジィ測度から Shapley 値を求める n 値関数を

$$sh : \{\mu_\lambda | \mu_\lambda \text{ は } \lambda \text{ ファジィ測度}\} \rightarrow \sigma^n \quad (44)$$

とする。 sh は、明らかに連続関数である。また、 n 値調整関数を

$$Ad : \sigma^n \times \sigma^n \rightarrow \sigma^n \quad (45)$$

$$(q'_1, \dots, q'_n) = Ad(sh_1, \dots, sh_n, q_1, \dots, q_n) \quad (46)$$

$$r_i =$$

$$\begin{cases} \min(1, q_i + (w_i - sh_i)) & \text{if } w_i > sh_i \\ q_i & \text{if } w_i \leq sh_i \end{cases} \quad (47)$$

$$q'_i = r_i / \sum(r_j) \quad (48)$$

とする。この Ad も明らかに連続関数である。

したがって、関数 $ad(sh(g_{\lambda, n}(q)), q)$ は、 σ^n から σ^n への連続関数である。 σ^n は、 n 次元単体であるので、ブラウワーの不動点定理により、不動点をもつ。不動点では、式(47)より、 $w_i \leq sh_i$ であり、 $\sum w_i = \sum sh_i = 1$ より、 $w_i = sh_i, \forall i$ である。(証明終)

3.5.3 同定方法

任意の $\lambda \in (-1, +\infty)$ と w_i を与えて、Shapley 値基準を満たす λ ファジィ測度を得られる保証がある同

定アルゴリズムはまだないが、以下のアルゴリズムで、同定できなかった例はない。

1. $q_i := 1/n, \forall i, m=1$ とする。
2. q_i を重要度とし、シングルトンファジィ測度比率基準を使って、 λ ファジィ測度 μ_λ を同定し、その Shapley 値 $sh_i(\mu_\lambda)$ を計算する。
3. すべての i について、 w_i と sh_i の差が一定範囲であれば、アルゴリズムは終了。
4. $\max_i(w_i - sh_i)$ となる i について、 $b_i := b_i + \alpha_m$, $m := m+1$ とする。ただし、 $\alpha_m > 0$ で、 α_m は、 m に対して単調減少で、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ とする。
5. $b_i := (b_i / \sum b_i)$ として、2.へ戻る。

3.6 特徴

図5は、 $n=3, w_1=1/6, w_2=2/6, w_3=3/6$ で、 λ を $+\infty$ から -1 に変化させたときに、それぞれの λ ファジィ測度 $\mu_\lambda(A)$, $A \in 2^X$ がどのように変化するかを示したグラフである。

このグラフから、 $\lambda \rightarrow -1$ としたとき、 $\mu_\lambda(A)=1, \forall A \in (2^X \setminus \emptyset)$ とならず、また、 $\lambda \rightarrow -1$ としたとき、 $\mu_\lambda(A)=0, \forall A \in (2^X \setminus X)$ ともなっていないので、最大値・最小値の拡張になっていないことがわかる。

反例を示せば、 $n=2, w_1=1/3, w_2=2/3$ で、 $\lim_{\lambda \rightarrow -1} \mu_\lambda(\{1\})=2/3, \mu_\lambda(\{2\})=1$ となり、 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_\lambda(\{1\})=0, \mu_\lambda(\{2\})=1/3$ となる。

また、一般に、 $\mu_\lambda(\{1\}) : \dots : \mu_\lambda(\{n\}) = w_1 : \dots : w_n$ は成り立っていない。

3.7 比較

3つの手法の性質をまとめると、表1のようになる。縦にファジィ測度を割り当てる基準、横に保持したい性質を記し、○は満たしており、×は必ずしも満たすとは限らないことを示している。それぞれの基準を満たす λ ファジィ測度が存在すること、および $\lambda=0$ のとき重要度による加重平均になるという性質はすべての基準で満たされている。最大値・最小値の拡張、Shapley 値、シングルトンファジィ測度の比率についての性質は、それぞれ対応する基準で割り当てたときのみ満たされる。

図6は、 $n=3, w_1=1/6, w_2=2/6, w_3=3/6$ で、 λ を $+\infty$ から -1 に変化させ、3つの基準で λ ファジィ測

図5 Shapley 値基準

度を同定したとき、3番目の評価項目の Shapley 値 $sh_3(\mu)$ がどのように変化するかをグラフ化したものである。Shapley 値基準の場合、常に0.5であり、シングルトンファジィ測度比率基準の場合、1/3付近からはじまり、 $\lambda=0$ で、0.5になり、さらに増加している。入力の数基準の場合、1/3付近から始まり、 $\lambda=0$ で、0.5になり、 $\lambda \rightarrow -1$ で、1/3に戻っている。したがって、入力の数基準の場合の λ が $+\infty$ と -1 付近、シングルトンファジィ測度比率基準の場合の λ が $+\infty$ 付近の場合、Shapley 値でみるとほぼ等重要度になっていることがわかる。また、シングルトンファジィ測度比率基準の場合の λ が -1 付近の場合、Shapley 値でみると重要度は、誇張されているがわかる。

したがって、重要度、特に各評価値の総合評価値への影響力を重視する場合、Shapley 値基準を用いるとよい。逆に、評価項目間の相互作用を重視する場合、

図6 比較

表1 3つの基準の比較

	最大値 最小値 の拡張	平均値 の拡張	Shapley 値	シングルトン ファジィ測度 の比率	存在
シングルトンファジィ測度比率基準	×	○	×	×	○
入力の数基準	○	○	×	○	○
Shapley 値基準	×	○	○	×	○

最大値,最小値の拡張になっている入力の数基準を用いるとよい. 2つの基準の差異は, λ が-1または $+\infty$ 付近のとき, Shapley 値基準の場合, 重要度は保持するが最大値,最小値の拡張と大きく離れ, 入力の数基準の場合, 最大値または最小値に近づくが, Shapley 値は等重要度に近づき重要度は無視される. シングルトンファジィ測度比率基準は, 各入力値の単独の効果を重視するときに用いるとよく, さらに最小値の拡張という性質を持っている.

シングルトンファジィ測度比率基準の場合, 補題5により, 入力の数基準の場合, 補題1により, $\lambda_1 > \lambda_2$ ならば, $\mu_{\lambda_1}(A) < \mu_{\lambda_2}(A)$, $\forall A \in (2^n \setminus \{\emptyset, X\})$ であり, したがって,

$$(C) \int h \mu_{\lambda_1} < (C) \int h \mu_{\lambda_2} \quad (49)$$

である.

3.8 その他の λ ファジィ測度によるファジィ測度の同定

3.8.1 主観的なファジィ測度より λ を同定

λ ファジィ測度を用いてのファジィ測度の同定法は, 重要度を用いる方法以外に, [5]で定義されている主観的なファジィ測度を与え, それに最も近い λ ファジィ測度を同定する方法がある. すなわち, X を評価項目の集合, $w(E), E \subset X$ を主観的に与えたファジィ測度, $g(E), E \subset X$ を λ ファジィ測度とし, $\sum_{E \subset X} (w(E) - g(E))^2$ を最小にする問題としている.

この場合, 主観的なファジィ測度をそのまま利用した方がよいように思われる.

3.8.2 シングルトンファジィ測度より λ を同定

別の方法としては, シングルトンファジィ測度を与え, λ を同定する方法もある[8]. まず, シングルトンファジィ測度 $\mu(\{i\}), i=1, \dots, n$ を与え,

$$1 = \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{i \in X} (1 + \lambda \mu(\{i\})) - 1 \right] \quad (50)$$

となる λ を求めるのもので, 補題2より, ユニークな λ を求めることができる.

この手法では, $\sum \mu(\{i\}) > 1$ は, $\lambda < 0$ をあらわし, $\sum \mu(\{i\}) < 1$ は, $\lambda > 0$ をあらわす. すなわち, 各シングルトンのファジィ測度の絶対的な大小により相互作用の度合いである λ を表現している. このような形での相互作用の表現は, 人間にとって難しいと思われる.

4. λ の意味, 同定, 感度分析

4.1 λ の意味

λ, ξ , そして §4.4 で述べる η や κ にどのような意味

表2 相互作用の呼び方

λ ξ, η, κ	$\lambda > 0$ 0.5 より小	$-1 < \lambda < 0$ 0.5 より大
ファジィ測度	優加法的	劣加法的
一般的な呼び方	補完的 相乗効果	代替的 相殺効果
その他の呼び方 (相互作用が外部にある場合)	バランス重視 消極的な 慎重な 悲観的な 保守的な 確実性重視	個性重視 積極的な 大胆な 楽観的な 冒険的な 可能性重視
極端な場合 (入力の数基準の場合のみ)	$\xi, \eta, \kappa = 0$ AND MIN(最小値)	$\xi, \eta, \kappa = 1$ OR MAX(最大値)

があるのか, どのような言語表現に対応するのかを表2に示す. なお, η, κ は, §4.4 で説明する.

4.2 λ の決定

各評価項目への重要度は, AHP[7]などで使われている一対比較法などで同定できるが, λ, ξ などの相互作用の度合いを同定するのは難しい. 本節では, 相互作用の度合いを決定する方法をいくつか提案する.

4.2.1 等重要度で $n=2$ の場合

仮想的な等重要度の2項目のモデルを考え, $h(1)$ と $h(2)$ ($h(1) \neq h(2)$) を与え, その時の総合評価値から λ, ξ を求める方法である. 例えば, $h(1)=50, h(2)=60$ としたときは, 「(等重要度で)50,60という2入力の場合, 総合評価値は, いくつになるか」という問いをし, その回答を α として, その α から, λ, ξ を求める方法である. すなわち,

$$\alpha = (C) \int h d\mu_{\lambda} \quad (51)$$

となる λ を求める問題となる. $\mu_{\lambda}(\{1\}) = \mu_{\lambda}(\{2\})$ より,

$$\xi = \frac{\alpha - \min(h(1), h(2))}{\max(h(1), h(2)) - \min(h(1), h(2))} \quad (52)$$

で求めることができる. 上記の例では, $\alpha=53$ ならば, $\xi=0.3$ ($\lambda=40/9$) である.

4.2.2 最大値へのウェイト/最小値へのウェイト

AHP の一対比較値の意味を使って, λ を定める. 等重要度の場合の最大値の評価項目と最小値の評価項目をどちらをどれくらい重要視するかを図7の数直線上に示してもらい, その回答を q とする(図7の一対比較値の意味, および数値は刀根[7]による).

AHP の一対比較値は, 重要度の比を表すので,

$$q = \frac{\text{最小値の評価項目のウエイト}}{\text{最大値の評価項目のウエイト}} \quad (53)$$

となることを意味する。等重要度の場合の最大値へのウエイトは、 $\phi_s(1/n)$ であり、最小値へのウエイトは、 $\phi_s(n/n) - \phi_s((n-1)/n) = 1 - \phi_s((n-1)/n)$ である(ただし、 $n > 1$)。したがって、

$$q = \frac{1 - \phi_s((n-1)/n)}{\phi_s(1/n)} \quad (54)$$

となる。このとき、 q から s を求めると、

$$s = q^{n/(n-1)} \quad (55)$$

となる。また、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $s = q$ となるので、 n がある程度大きく、 n が不明、もしくは特定できない場合などは、

$$s = q \quad (56)$$

とすることもできる。

この場合、

$$\lambda = q - 1 \quad (57)$$

となり、 λ は、 n が大きいときの、

$\frac{\text{最小値の評価項目のウエイト}}{\text{最大値の評価項目のウエイト}} - 1$ を表しているといえる。

4.3 感度分析

λ を特定できない時は、 λ を変化させて、総合評価値をグラフ化して比較する感度分析がよく行われている([13]など)。

図8は、表3の入力値および重要度を利用し、入力の数基準でファジィ測度を割当て、Choquet 積分したものである。感度分析では、 λ を用いると、 $\lambda = 0$ を中心に左右対称ならないので、 ξ を用いたほうがよい。

図8の例では、 λ や ξ により順位が激しく入れ替わる。 h^1 は、 ξ が比較的大きいときに1位となり、 h^2 は、 ξ が比較的小さいときに1位となる。 h^3 は、 ξ が1または0付近の狭い範囲で1位になっている。現実性を重視した評価をしたいとき、最小値では h^3 が1位だが、感度分析より、 $0 < \xi < 1$ の大部分の領域で h^2 の方が高い総合評価値をとっており、 h^2 を選択したほうがよいと思われる。

4.4 相互作用の指標

図8で、 h^2 の $\xi = 0$ 付近、 h^3 の $\xi = 1$ 付近では、総合評価値のグラフは急激に変化する。そこで、 ξ の意味を考え、 ξ 以外の相互作用の尺度を提案する。

4.4.1 $\phi_s(u)$ の中央値(ξ)

相互作用の指標 ξ は、式(20)で定義されているが、その値は、

図7 AHP の一対比較値の意味

図8 感度分析

表3 感度分析に用いた入力値、重要度

	$h^1(1)$	$h^1(3)$	$h^1(3)$	$h^1(4)$
h^1	0.50	0.15	0.23	0.23
h^2	0.30	0.40	0.16	0.40
h^3	0.20	0.45	0.61	0.37
重要度	0.54	0.31	0.10	0.05

$$\xi(s) = \phi_s(0.5) \quad (58)$$

になっている。等重要度で、 n がじゅうぶんに大きく、Choquet 積分の場合の ξ の意味を考える。 a_i を i 番目に大きい入力値(ただし、 $a_i \geq 0, a_{n+1} = 0$)とし、その差を $b_i = a_i - a_{n+1}$ とする。 $b_i, (i = 1, \dots, n-1)$ は、入力値間の差を表し、 $\sum_{i=1}^n b_i = a_1, b_n = a_n$ である。Choquet 積分値 z は、

$$z = \sum_{i=1}^n [\phi_s(i/n) b_i] \quad (59)$$

である。したがって、 $\phi_s(1/n), \dots, \phi_s((n-1)/n)$ は、各入力値間の差への重要度であり、すべて1であれば、Choquet 積分値は最大値(a_1)、0であれば最小値(a_n)となる。したがって、この $\phi_s(1/n), \dots, \phi_s(n/n)$ の代表値(広義の平均値)が相互作用の度合いになっている。

$\phi_s(1/n) < \dots < \phi_s((n-1)/n)$ であるので $\xi = \phi_s(1/2)$ は、 $\phi_s(1/n), \dots, \phi_s((n-1)/n)$ の中央値である。ただし、 $n-1$ が偶数であるとき、中央値を $[\phi_s((n-1)/(2n)) + \phi_s((n+1)/(2n))]/2$ ではなく、 $\phi_s([(n-1)/(2n) + (n+1)/(2n)]/2) = \phi_s(0.5)$ とす

る。

4.4.2 $\phi_s(u)$ の平均値 (η)

ξ は, b_i にかかる重要度の中央値であった。そこで, n がじゅうぶん大きいと考えられるとき, b_i にかかる重要度の平均値, すなわち, u の $(0,1)$ の積分値は,

$$\int_0^1 \phi_s(u) du = \frac{1}{\log_e(s)} - \frac{1}{s-1} \quad (60)$$

となるので, 相互作用の度合い η を,

$$\eta: [0, \infty] \rightarrow [0, 1] \\ \eta(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s=0 \\ 0 & \text{if } s=+\infty \\ 0.5 & \text{if } s=1 \\ \frac{1}{\log_e(s)} - \frac{1}{s-1} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (61)$$

で定義する。 $\eta(s)$ は, $s \in (0, \infty)$ に関して強意に単調減少であるので, η から s を2分法などで求めることができる。

4.4.3 n を考慮した平均値 (κ)

n が大きければ, η でよいが, n が比較的小さい場合, b_i にかかる重要度の平均値を求めると, ($s \in (0, \infty), s \neq 1$)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \phi_s(i/n)}{n-1} = \frac{n+s-n s^{1/n}-1}{(n-1)(s-1)(s^{1/n}-1)} \quad (62)$$

となるので,

$$\kappa: \{2, 3, \dots\} \times [0, \infty] \rightarrow [0, 1] \\ \kappa(n, s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s=0 \\ 0 & \text{if } s=+\infty \\ 0.5 & \text{if } s=1 \\ \frac{n+s-n s^{1/n}-1}{(n-1)(s-1)(s^{1/n}-1)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (63)$$

を定義する。 n を固定したとき, 式(62)の左辺より, 明らかに $\kappa(n, s)$ は, s に関して強意に単調減少なので, κ から s を2分法などで求めることができる。また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(n, s) = \eta(s) \quad (64)$$

$$\kappa(2, s) = \xi(s) \quad (65)$$

である。

また, 等重要度で, 各入力値の差が β で最小値が α のとき, すなわち, $h(i) = \alpha + \beta(i-1)$ のとき, $b_i = \beta(i=1, \dots, n-1), b_n = \alpha$, 式(59)および, (62)より, Choquet 積分値 z は,

$$z = (n-1)\beta\kappa(n, s) + \alpha \quad (66)$$

($s \in (0, \infty), s \neq 1$ であるが, $s=1$ の場合も明らかに成

立)となる。これは, κ を横軸に感度分析(例えば, 図9)を行えば, $(n-1)\beta$ を増加率, α を切片とする直線になることを意味している。

4.4.4 比較

図9は, $h(1)=10, h(2)=20, h(3)=30$ を等重要度で, λ ファジィ測度を割当て, Choquet 積分した結果を ξ, η, κ を横軸に, 感度分析した結果である。 κ は, $n=3, \alpha=10, \beta=10$ であるので, $z=20\kappa+10$ という直線になっている。

図10は, 表3で示される重要度が異なるデータを使って, ξ, η, κ を比較したものである。 $h^2(\xi)$ は, 表3の h^2 の評価値を ξ を横軸に, $h^2(\kappa)$ は, κ を横軸にグラフ化したものである。 ξ は, 0および1付近で, 大きく値を変化させているのに対し, η は, 滑らかに変化している。 κ は, ξ に近い動きをしている。

3つの指標を比較すると, 等重要度の場合, 式(66)で示したように, 等間隔のデータに対して直線になるので, κ を利用するとよい。重要度が異なる場合, 図10に示したように, η が滑らかであり, 順位の比較がやりやすい。 ξ は, κ の $n=2$ の場合であるが, 逆関数(式(21))などの計算を行いやすく, n が小さいとき, 総合評価値は κ に近い動きをする。

図9 $h(1)=10, h(2)=20, h(3)=30$ で等重要度のときの変化

図10 0,1付近の比較

5. おわりに

本論文では、 λ ファジィ測度の性質を考察し、どのように λ ファジィ測度を利用して、総合評価を行えばよいのかを提案した。すなわち、重要度と λ を使って λ ファジィ測度の同定方法を3つ提案し、それぞれの特徴を考察し、総合評価に際して重要度と相互作用どちらを優先させるかで同定方法が異なることを示した。また、 λ などの相互作用の指標を考察し、その決定方法を提案した。

本論文で提案した手法で、総合評価する場合の手順をまとめると次のようになる。

1. 評価項目の決定
2. 各評価項目の重要度を一対比較などを用いて決定する。
3. λ を決定する。決定できない場合は、後に感度分析を行う。決定方法では、次の2つを提案した。
 - ・ 仮想的な等重要度の2項目の総合評価値から求める方法 (§4.2.1)
 - ・ 最大値へのウェイト/最小値へのウェイトから求める方法 (§4.2.2)
4. 等重要度の場合を除いて、 λ ファジィ測度の同定方法を定める。

入力の数基準 相互作用(最大値, 平均値, 最小値の中間の評価になること)を重視するときに利用 (§3.4)

Shapley 値基準 各評価項目の総合評価値への影響力を重視するときに利用 (§3.5)

シングルトンファジィ測度比率基準 各評価項目の単独の効果を重視するときに利用 (§3.3)
5. Choquet 積分を行い、総合評価値を求める。
6. λ を決定できない場合、感度分析を行う。
 - (a) グラフの横軸の値の指標を決める。等重要度の場合 x または ξ を用いる。重要度が異なる場合、 η を用いる。
 - (b) 横軸の値(ξ, x, η)を変化させ、総合評価値をグラフ化する。
 - (c) そのグラフにより、各評価対象の特徴の考察や総合順位決定に利用することができる。

1つの相互作用の度合いと重要度でファジィ測度を同定する場合、 λ ファジィ測度の定義式(2)以外の関係式で定義可能ではあるが、 λ ファジィ測度は、

- ・ λ (§4.2.2)や ξ (§4.2.1)の意味が明確であること
 - ・ 3つの基準を考えたとき、それぞれの基準を満たす λ ファジィ測度が存在すること
- など、便利でよい性質を持っているので、ファジィ測度の応用する上で、便利な道具である。

参 考 文 献

- [1] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [2] D. Dubois and H. Prade, A Class of Fuzzy Measures Based on Triangular Norms, *International Journal of General Systems*, Vol.8, 43-61, 1982.
- [3] Y. Tukamoto, A Measure Theoretic Approach to Evaluation of Fuzzy Set Defined on Probability Space, *Journal of Fuzzy Math(模糊数学)*, Vol.2, No.3 89-98, 1982.
- [4] R. Kruse, A Note on λ -additive Fuzzy Measures, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 8, 219-222, 1982.
- [5] S.T. Wierzbchoń, An Algorithm for Identification of Fuzzy Measure, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 9, 69-78, 1983.
- [6] S. Weber, $\perp$ -Decomposable Measures and Integrals for Archimedean t-cobirms $\perp$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 101, 114-138, 1984.
- [7] 刀根薫, **ゲーム感覚意思決定法 -AHP 入門-**, 日科技連出版社, 1986.
- [8] H. Tahani and J.M.Keller, Information Fusion in Computer Vision Using the Fuzzy Integral, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol.20, No.3. 733-741, 1990.
- [9] T. Murofushi and M. Sugeno, A theory of fuzzy measures. Representation, the Choquet integral and null sets, *J. Math. Anal.*, Vol.159, No.2, 532-549, 1991.
- [10] 室伏俊明, ファジィ測度を読む技術(I) ファジィ測度の Shapley 値, **第2回ファジィワークショップ講演論文集**, 39-48, 長岡, 1992.
- [11] 杉山孝夫, 椎塚久雄, 階層的ファジィ積分による意思決定法, **日本ファジィ学会誌**, Vol.5, No.4, 772-782, 1993.
- [12] 塚本弥八郎, 不確実性を伴う意思決定問題のファジィ測度論による分析, **講座ファジィ14 ファジィ理論と人文社会科学**, 日本ファジィ学会編, 日刊工業新聞社, 148-170, 1994.
- [13] 中島信之, **ファジィ数学のお話**, 培風館, 1997.

(1999年12月22日 受付)

(2000年 7月11日 再受付)

[問い合わせ先]

〒214-8580 神奈川県川崎市多摩区東三田2-1-1
専修大学商学部

高萩栄一郎

TEL: 044-900-7988

FAX: 044-900-7849

Email: takahagi@isc.senshu-u.ac.jp

著者紹介

たかはぎ えいいちろう
高萩 栄一郎 [正会員]

専修大学商学部

1985年3月中央大学経済学部卒業, 1989年3月同大学大学院経済学研究科後期課程退学, 福井工業大学経営工学科助手を経て, 現在専修大学商学部助教授. ファジィ測度, ファジィ積分とその応用に関する研究に従事. IFSA, 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 日本感性工学会などの会員

On Identification Methods of λ -Fuzzy Measures using Weights and λ

by

Eiichiro TAKAHAGI

Abstract :

In this paper, we show identification methods of λ -fuzzy measure using weights of evaluation items and λ . As the definitions of fuzzy measures' weights of evaluation items are difference by weights' means, we define three standards; singleton fuzzy measure ratio standard, inputs numbers standard and Shapley value standard. For the three standards, we consider the existence of the fuzzy measure and the properties and propose the identification methods. We consider the means of λ and propose some identification methods of a λ . Lastly, we show some new useful interaction indices which are one-to-one correspondences with λ .

Keywords : Fuzzy Measure, Choquet Integral, λ -Fuzzy Measure, Shapley Value

Contact Address : Eiichiro TAKAHAGI

School of Commerce, Senshu University

Higashi-mita 2-1-1, Takamu, Kawasaki, 214-8580, JAPAN

TEL : +81-44-900-7988

FAX : +81-44-900-7849

E-mail : takahagi@isc.senshu-u.ac.jp