証拠理論に基づく複数の確率・可能性変換法に関する考察

山田 耕一

論文要旨

確率と可能性間の変換は Zadeh が可能性理論を提案して以来多くの研究者により研究されてきた。しかし、既存研究の多くは確率と可能性間の変換時に満たすべき条件を議論し、発見的に考案した変換式がその条件を満たすことを証明するに留まる。したがって提案された変換式が与えられた条件を満たす唯一の式とは限らないものが多い。

本研究では証拠理論に基づく3種類の変換法を新たに検討し、議論する。これらの方法はいずれも確率と可能性間の変換において満たすべき原則を与え、その原則から一意に導かれる変換法を得る。1つの変換法(T1)では可能性を順序尺度と見なして与えられた確率分布から可能性の大小の順序構造を得る。残る2つ(T2, T3)は可能性を不確実性の比例尺度として扱い、確率分布から可能性分布を導く。特にT3に使われる原則は双方向に変換可能な式を導くが、それは Dubois & Prade が発見的に導いた変換式と全く同一になる。

これらの3種類の変換法は、確率から可能性を求める場合には全く同一の可能性の順序構造を得るが、可能性分布についてはT2とT3で異なる。そこで確率分布から可能性分布を求める場合、T2とT3のどちらがより望ましいかを与えた原則の観点から考察する。考察の結果T3が望ましいことが示唆される。

キーワード：可能性、可能性理論、確率、確率・可能性変換

1. はじめに

事象生起に関する不確実性表現としていくつかのファジィ測度が提案されているが、実問題への適用を考えると、全体集合上の分布関数から定義することの可能な確率測度と可能性測度の2つが扱いやすい。中でも確率は不確実性に関する定量的な比例尺度であるため理解しやすく、あらゆる分野で広く使われている。一方、可能性は確率と同様に $[0, 1]$ 間の数値を値とするものの、Max と Min を演算の基本とするため順序尺度的性質を持ち、不確実性の定性的表現に向く[1, 2]。

上述した確率と可能性の性質を考慮すると、両者の使い分けは多量の観測データから信頼度の高い確率が得られる場合には確率を、人間の主観的知識に頼らざるをえない場合は可能性を用いるのがよいと考えられる[3]。しかし現実の問題では、ある変数については多くの観測データから確率を求めることができ、他の変数の不確実性は専門家の主観的知識に頼ることもめずらしくない。その場合には確率と可能性の相互変換が必要となる。

確率と可能性の間の変換は、可能性理論を提案した

Zadeh の可能性・確率調和原理 (possibility/probability consistency principle) [4]に端を発し、1980年代から90代にかけて多くの研究者により研究された。Civanlar らは連続的な全体集合を対象に確率密度関数からファジィ集合のメンバシップ関数を構築する方法を提案し[5]、Smets は意思決定の立場から可能性測度から確率測度への変換を検討した[6]。Klir らは確率と可能性間で可逆な双方向の変換法を提案し[7, 8]、Delgado らは確率と可能性変換時に考慮すべき一貫性について議論した[9]。また、Dubois らは確率と可能性間だけでなく、Pl 測度や Bel 測度も含めて不確実性を表現する測度間の変換について複数の論文を発表している[10-13]。

本稿でははじめに、全体集合が離散的である場合の確率・可能性変換の主な研究を紹介し、その妥当性と一意性を議論する。これらの既存研究の多くは次のシナリオに従う。まず確率と可能性間の変換時に満たすべき条件を議論し、その後発見的に変換式を考案し、その変換式が議論した条件を満たすことを証明する。したがって、提案された変換式が与えられた条件を満たす唯一の式とは限らないものが多い。

本研究では証拠理論に基づく3種類の変換法(T1, T2, T3)を検討する。証拠理論によれば確率と可能性は異なる証拠の構造を持つため、両者の変換は一方の他方による近似となる。そのため本稿で議論する方法でも、まず確率と可能性間の変換において満たすべき条件あるいは原則を与える。しかし既存研究とは異なる

A Study on Probability-Possibility Transformation Methods Based on Evidence Theory
Koichi YAMADA
長岡技術科学大学経営情報系
Department of Management and Information Systems Science, Nagaoka University of Technology

り、本稿ではそれらの原則から導かれる変換式の一意性を重視する。ただし、1つの方法(T1)では可能性を順序尺度と見なして確率から可能性への一方向変換を扱い、与えられた確率分布から可能性の大小を決める順序構造のみを得る。

残る2つ(T2, T3)は可能性を不確実性の比例尺度として扱う。一方(T2)はT1に新たな原則を加えて確率分布から可能性分布を得る一方向の変換式を導く。他方(T3)はDuboisとPradeが文献[11]において発見的に導いた双方向の変換式と同じである。ただし、本稿ではその変換式が持つ性質の一つ[19]を変換の基本原則とすることで、その式が一意に得られることを強調する。

本稿で検討する3種類の変換方法は、確率分布から可能性の大小順序を求める場合に全く同一の結果を得る。しかし、得られる可能性分布についてはT2とT3で異なる。そこで、数値例を示した上でどちらがより望ましいかを与えた原則の観点から考察する。その結果、変換の双方向性という性質に加え、基本原則の点からもT3が望ましいことが示唆される。

2. 既存の変換方法とその議論

準備として証拠理論と可能性測度、必然性測度および確率測度の関係について簡単に述べ[15, 16]、その後既存の変換方法を整理する。

2.1 証拠理論

U を有限離散集合とするとき、証拠理論では以下の性質を満足する関数 $m: 2^U \rightarrow [0, 1]$ を基本確率(basic probability assignment)と呼び、 $m(A) > 0$ を満たす $A \subseteq U$ を焦点要素(focal element)と呼ぶ。

$$m(\emptyset) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{A \subseteq U} m(A) = 1 \quad (2)$$

基本確率 $m(A)$ は、変数 X の値が A 内の要素のいずれかであるとの証拠を信じる確信度を表す。ただし、通常確率と違って A の要素や部分集合に関する確信度の合計ではなく、 A それ自身に対する確信度を表す。また、すべての焦点要素の集合を F で表し、 F と m のペア (F, m) を証拠(body of evidence)と呼ぶ。

基本確率を用いると、 A が確かである度合を与える Bel 測度(belief measure)ともしもらしきの度合を与える Pl 測度(plausibility measure)が次のように定義される。

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (3)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (4)$$

$Bel(A)$ と $Pl(A)$ は双対な測度で、 A の補集合を A^c で表すと $Pl(A) = 1 - Bel(A^c)$ 、 $Bel(A) = 1 - Pl(A^c)$ の関係がある。

与えられた証拠 (F, m) において、すべての焦点要素が入れ子状態(consonant; 協和的)であるとき、上述の Pl 測度と Bel 測度は、それぞれ可能性測度(possibility measure) $\Pi(A)$ と必然性測度(necessity measure) $N(A)$ に等しくなる。つまり、焦点要素の集合を $F = \{F_1, \dots, F_K\} \subset 2^U$ とすると、 $F_k \subset F_{k+1}$ ($k=1, \dots, K-1$)であるときに $\Pi(A) = Pl(A)$ 、 $N(A) = Bel(A)$ となる(図1を参照)。

可能性測度、必然性測度については、任意の $A, B \subseteq U$ に対して以下の式が成り立つ。

$$\Pi(A \cup B) = \Pi(A) \vee \Pi(B) \quad (5)$$

図1 可能性測度における証拠の構造

$$N(A \cap B) = N(A) \wedge N(B) \quad (6)$$

$$\Pi(A) = 1 - N(A^c) \quad (7)$$

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c) \quad (8)$$

$\vee$ 、 $\wedge$ はそれぞれ Max と Min を意味する。(5)、(6)式において、 $B = A^c$ であるとき $\Pi(A \cup A^c) = 1$ 、 $N(A \cap A^c) = 0$ である。また、可能性分布 $\pi(u_i)$ と必然性分布 $\eta(u_i)$ がそれぞれ $\pi(u_i) = \Pi(\{u_i\})$ 、 $\eta(u_i) = N(\{u_i\})$ によって定義される。

一方、 $|A|$ を集合 A の濃度とすると、 $|A| \geq 2$ を満たすすべての $A \subseteq U$ に対して $m(A) = 0$ であるとき、 Pl 測度と Bel 測度は確率測度 (probability measure) $P(A)$ と等しく、 $P(A) = Pl(A) = Bel(A)$ となる。このとき U 上の確率分布 $p(u_i)$ は次式で得られる。

$$p(u_i) = P(\{u_i\}) = Pl(\{u_i\}) = m(\{u_i\}) \quad (9)$$

2.2 Zadeh の可能性・確率調和原理

Zadeh は可能性分布と確率分布の関係について次のように述べ、これを可能性・確率調和原理 (possibility/probability consistency principle) と呼んだ[4]。

(1) もしある事象が不可能 (impossible) であれば、それは起こりそうにない (improbable)。

(2) ある事象の可能性を低くするとその確率も低くなる傾向がある。しかしその逆は成り立たない。

つまり U を有限離散集合、 X を U 内の値をとる変数、 $p(u_i)$ 、 $\pi(u_i)$ をそれぞれ X が $u_i \in U$ 、($i = 1, \dots, n$) を値とする確率および可能性とすると次の関係が成立する。

$$\pi(u_i) = 0 \Rightarrow p(u_i) = 0 \quad (10)$$

$$\pi(u_i) > \pi(u_j) \Rightarrow p(u_i) > p(u_j) \quad (11)$$

ここで $\Rightarrow$ は含意を表す。また、与えられた可能性分布と確率分布の調和度 (degree of consistency) として次式を提案した。

$$\gamma = \sum_{u_i \in U} \pi(u_i) p(u_i) \quad (12)$$

ただし、上述の調和度は観察によって得られた発見的な近似式とし、可能性分布を確率分布に変換する場合にのみ適用可能とする。

可能性分布から確率分布を求める際に上述の調和度を最大化するには、 $\pi(u_i) < 1$ に対して $p(u_i) = 0$ とすべきなのは明らかである。しかし、この制約は可能性分布 $\pi(u_i)$ と必然性分布 $\eta(u_i)$ の間に一般的に成り立つ関係、つまり $\pi(u_i) < 1 \Rightarrow \eta(u_i) = 0$ に等しい[14]。一般に、可能性、確率、必然性の三者間に $\pi(u_i) \geq p(u_i)$

$\geq \eta(u_i)$ の関係があることを考えると[10, 11, 13]、確率分布と可能性分布の調和度に可能性と必然性間と同様の制約条件を課すのは厳しすぎる。

また、Dubois らは、上述の調和度は行為の容易さ (degree of ease) あるいは能力の可能性 (physical possibility) の議論から生まれたもので、事象の生起に関する認知的可能性 (epistemic possibility) とは異なることを指摘した[10]。さらに、“what may happen can be done” は真であるがその逆 (what can be done may happen) は必ずしも真でないことから「能力の可能性 $\geq$ 認知的可能性」が成り立つとし、確率は事象生起の不確実性を扱うため、確率分布と可能性分布間の変換には認知的可能性を用いるべきとした。

2.3 Dubois & Prade の発見的必然性に基づく変換

Dubois らは、確率と可能性間の変換において以下の基本原理が満たされるべきとした[10, 11, 13]。

$$\Pi(A) \geq P(A) \quad (13)$$

$$p(u_i) > p(u_j) \Leftrightarrow \pi(u_i) > \pi(u_j) \quad (14)$$

ただし、 $\Leftrightarrow$ は同等を表す。

(13) 式は“what is probable must be possible” という直感を表し[11]、Dubois らはこれを確率・可能性一貫性原理 (principle of probability-possibility consistency) と呼ぶ[13]。 $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ であるため (13) 式を満たせば $\Pi(A) \geq P(A) \geq N(A)$ となる。また、(14) 式は選好保存原理 (preference preservation) と呼ばれる[13]。なお、(11) 式との違いに注意されたい。

さて、(14) 式を満たすもっとも単純な確率・可能性変換の方法として次式が考えられる。

$$\pi(u_i) = \frac{p(u_i)}{\max_{u_i \in U} p(u_i)} \quad (15)$$

上式の変換は (14) 式だけでなく、 $\pi(u_i) \geq p(u_i)$ をも保証する。しかし、集合関数である確率測度 $P(A)$ と可能性測度 $\Pi(A)$ を求めると、必ずしも (13) 式を満たさない[10]。したがって (15) 式による変換は適切でない。

Dubois らは以下に示す確率・可能性変換を提案し、これが (13)、(14) 式の基本原理を満たすことを証明した[10, 11]。まず、 U の要素 u_i が $p(u_1) \geq p(u_2) \geq \dots \geq$

$p(u_n)$ のように順序づけされているとする。 $\sum_{i=1, n} p(u_i) = 1$ である。このとき、 u_i は u_{i+1} ($i = 1, \dots, n-1$) に比べてある程度の「必然性」があると考え、その程度を $p(u_i) - p(u_{i+1})$ と見積もる。同様に $A_i = \{u_1, \dots, u_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) とし、 $U - A_i$ の中で最大の確率を持つ u_{i+1} に対する A_i

内のすべての要素の「必然性」の総和 $N(A_i)$ を次式で求める。

$$N(A_i) = \sum_{j=1, i} (p(u_j) - p(u_{i+1})) \leq P(A_i) \quad (16)$$

ただし $i=n$ の場合、便宜的に $p(u_{n+1}) = 0$ とする。

上述のように直感的に定義された $N(A_i)$ は、実は数学的に必然性測度であることが証明される[10, 11]。そこでこの必然性測度を利用して $\pi(u_i)$ を計算すると、次式が得られる。

$$\pi(u_i) = i \cdot p(u_i) + \sum_{j=i+1, n} p(u_j) \quad (17)$$

ただし、 $\sum_{i=n+1}^n p(u_i) = 0$ とする。

また、はじめに可能性分布が与えられ、 U の要素 u_i が $\pi(u_1) \geq \pi(u_2) \geq \dots \geq \pi(u_n)$ のように順序づけされているとき、容易に次の逆変換の式を得る。

$$p(u_i) = \sum_{j=i, n} \frac{1}{j} (\pi(u_j) - \pi(u_{j+1})) \quad (18)$$

ただし、 $\pi(u_{n+1}) = 0$ とする。

なお、可能性から確率への変換を行うとき、可能性分布を与える焦点要素は $A_i (i=1, \dots, n)$ の一部に限られる。また、焦点要素でない A_i については $m(A_i) = 0$ であるから、

$$\pi(u_i) = \Pi(\{u_i\}) = \sum_{j=i, n} m(A_j) \quad (19)$$

が得られ、 $m(A_i) = \pi(u_i) - \pi(u_{i+1})$ となる。これを(18)式に代入すると次式が得られる[21]。

$$p(u_i) = \sum_{j=i, n} \frac{1}{j} m(A_j) = \sum_{A_j: u_i \in A_j} m(A_j) / |A_j| \quad (20)$$

この変換法は確率・可能性一貫性原理と選好保存原理の双方を満たし、確率と可能性間の双方向変換が可能である。また、可能性から確率への変換は、(20)式から分かるように A_j の基本確率を各要素に等分配するという意味を持つ[19]。しかし、(17)式は発見的に求めた変換式であり、次節で明らかになるように最初に与えた二つの原理を満たす唯一の変換ではない。

2.4 不確実性最小に基づく変換

確率は不確実性に関する定量的な比例尺度モデルであるが、可能性は[0, 1]区間内の数値を値とするものの順序尺度の性格を持つ準定性的(quasi-qualitative)モデルである[1, 2, 13,]。したがって、可能性分布に含

まれる情報の量は確率分布に含まれる情報の量より少なく、可能性分布の決定に必要な情報も確率分布より少ないと考えられる[13]。この考察から Dubois らは確率・可能性変換に関する新たな原則として、

(a) 可能性分布を確率分布に変換する場合、不確実性が最大となるように確率分布を決定する(最小限定: least commitment/insufficient reason principle)。

(b) 確率分布を可能性分布に変換する場合、不確実性が最小となるように可能性分布を決定する(最大特定: maximal specificity)

を提案し、(b)を連続な単峰性の確率密度関数から可能性分布への変換に適用した[13]。最小限定はなるべく一様な確率分布を得ることを意味し、最大特定は可能性分布をファジィ集合としてみたときに(包含の意味で)最も小さな可能性分布を得ることを意味する。

さて、文献[9]によると U の要素 u_i が $\pi(u_1) \geq \pi(u_2) \geq \dots \geq \pi(u_n)$ であるとき、与えられた可能性分布と確率分布が(13)式を満たす必要十分条件は次式で与えられる。

$$\pi(u_i) \geq \sum_{j=i, n} p(u_j), \quad \forall u_i \in U \quad (21)$$

したがって $p(u_1) \geq p(u_2) \geq \dots \geq p(u_n)$ となる確率分布が与えられたとき、次式で $\pi(u_i)$ を与えれば、確率・可能性一貫性原理と選好保存原理を満足する最大特定の可能性分布が得られる。

$$\pi(u_i) = \sum_{j=i, n} p(u_j) \quad (22)$$

しかし、上式によって確率分布を可能性分布に変換すると $p(u_i) = p(u_j) \neq 0, i \neq j$ に対し $\pi(u_i) \neq \pi(u_j)$ が得られるため、後に我々が与える原則から見て適切な変換でない。

2.5 Klir らの不確実性保存則に基づく変換

証拠理論において与えられた証拠 (F, m) は以下の2種類の不確実性を含む[8]。

$$V(m) = \sum_{A \in F} m(A) \log_2 |A| \quad (23)$$

$$D(m) = - \sum_{A \in F} m(A) \log_2 \left(\sum_{B \in F} m(B) \frac{|A \cap B|}{|B|} \right) \quad (24)$$

$\log_2 |A|$ は A 内のどの要素が真かを特定できない程度を表し、 $m(A)$ による重み付け和で与えられる $V(m)$ は基本確率の不特定性(nonspecificity)を表す[16]。 $D(m)$ は証拠間の矛盾の程度、あるいは不一致性(dis-

cord) を表す[17]。 $V(m)$ 、 $D(m)$ とも単位はビット (bit) で表され、 $0 \leq V(m)$ 、 $D(m) \leq \log_2 |U|$ である。また、 $V(m)$ と $D(m)$ の和を $T(m)$ で表すと、

$$T(m) = \sum_{A \in F} m(A) \log_2 \left(\frac{|A|}{\sum_{B \in F} m(B) \frac{|A \cap B|}{|B|}} \right) \quad (25)$$

となり、やはり $0 \leq T(m) \leq \log_2 |U|$ が満たされる[18]。つまり、 $T(m)$ 、 $V(m)$ 、 $D(m)$ によって基本確率における不確実性の様相を表現することができる。なお、すべての焦点要素 $A \in F$ の濃度が1であるとき $T(m)$ はシャノンのエントロピーに一致する。

さて、確率と可能性では証拠の構造が異なるため不確実性の様相が異なるが、不確実性の総量 $T(m)$ を等しくすることは可能である。Klir らは、確率と可能性間の変換を行う場合に不確実性の総量 $T(m)$ が保存されるべきとした[7]。そして対数間隔尺度変換(log-interval scale transformation) を前提にすると、不確実性の総量を保存しつつ確率から可能性へ、可能性から確率へと双方向変換可能な式が得られることを見いだした[8]。確率から可能性への変換は次式で行う。

$$\pi(u_i) = \left(\frac{p_i}{p_1} \right)^\alpha \quad (26)$$

ただし、 $p_i = p(u_i)$ で、 α は次式で与えられる $g(\alpha) = 0$ を解くことにより得られる。

$$g(\alpha) \equiv \sum_{i=2,n} (p_i/p_1)^\alpha \log_2(i/(i-1)) + \sum_{i=1,n} p_i \log_2 p_i - \sum_{i=1,n-1} \{ (p_i/p_1)^\alpha - (p_{i+1}/p_1)^\alpha \} \cdot \log_2 \{ 1 - i \sum_{j=i+1,n} (p_j/p_1)^\alpha (1/(j-1)) \} \quad (27)$$

なお、 $g(\alpha) = 0$ には、 $0 < \alpha < 1$ を満たす唯一の解が存在する[8]。Klir らは対数間隔尺度変換の他、比例尺度変換、間隔尺度変換、順序尺度変換についても検討したが、不確実性保存則から変換式のパラメータを一意に決定でき、確率・可能性間で双方向変換可能なのは対数間隔尺度変換のみであることを報告している。

Klir らの変換方法にはいくつかの疑問がある。一つは、不確実性保存則の妥当性である。前述のように確率分布と可能性分布が含む情報量に違いがあると考えれば、この制約が妥当な保証はない。エントロピーと不正確さ(imprecision)を不確実性の同一側面と見なす問題点も指摘される[13]。もう一つは、 $p(u_i)$ と $\pi(u_i)$ 間での1対1のスケール変換を前提とする点である。例えば、(17)式や(22)式は1対1のスケール変換では

ない。

3. 証拠理論に基づく確率・可能性変換

本章では、証拠理論に基づく3種類の変換法を検討する。どの方法も確率と可能性間の変換において満たすべき原則を与え、その原則から一意に導かれる変換式を導くが、その前に証拠理論における可能性測度と確率測度の証拠の構造を整理し、変換の意味について議論する。

3.1 証拠構造と変換の意味づけ

3.1.1 可能性測度と確率測度の証拠構造

協和的な焦点要素 $F = \{F_1, \dots, F_K\}$ 、 $F_k \subset F_{k+1}$ ($k = 1, \dots, K-1$) と基本確率 $m(F_k)$ が与えられると(図1参照)、 U 上の可能性分布 $\pi(u_i)$ は次式で計算される。

$$\pi(u_i) = \sum_{B \cap \{u_i\} \neq \emptyset} m(B) = \begin{cases} \sum_{h=k,K} m(F_h), & \text{if } u_i \in F_k - F_{k-1}, (k=1, \dots, K) \\ 0, & \text{if } u_i \in U - F_K \end{cases} \quad (28)$$

ただし $F_0 = \emptyset$ とする。この式から $G_k = F_k - F_{k-1}$ に含まれるすべての要素 u_i は同じ値の可能性を持ち、 $\pi(u_i) = \Pi(G_k)$ 、 $\forall u_i \in G_k$ であることがわかる。また、 $u_i \in F_1$ のときは $\pi(u_i) = \Pi(F_1) = 1$ が得られ、 $u_i \in G_k$ 、 $u_i \in G_h$ 、 $1 \leq k < h \leq K$ のとき $\pi(u_i) > \pi(u_j) > 0$ が成立する。可能性の大小の順序は基本確率とは関係なく、 $F = \{F_1, \dots, F_K\}$ のみで決まることに注意されたい。

また、(28)式から可能性分布(測度)が与えられるときは次式によって基本確率を得ることができる。

$$m(F_k) = \Pi(G_k) - \Pi(G_{k+1}) \quad (29)$$

ただし、 $\Pi(G_{K+1}) = 0$ とする。

次に、 $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ において焦点要素が濃度1の集合 $\{u_i\}$ に限られるとき、 U 上の確率分布が(9)式によって与えられる。ここで $p(u_i) \geq \dots \geq p(u_n)$ であるとし、 U_k を次式で定義する(図2参照)。

$$U_k = \{u_i | p(u_i) = p_{\max}(W_k) \neq 0, u_i \in W_k\}, \quad k=1, \dots, K \quad (30)$$

$$W_k = U - \bigcup_{h=0, k-1} U_h \quad (31)$$

$$p_{\max}(W_k) = \max_{u_i \in W_k} p(u_i) \quad (32)$$

ただし $U_0 = \emptyset$ とし、 $p_{\max}(W_k) \neq 0$ 、 $p_{\max}(W_{k+1}) = 0$ を満たす k を K とする。つまり U_k は同じ確率値を持つ

図2 確率測度における証拠の構造

u_i の集合で、 $u_i \in U_k$ 、 $u_j \in U_h$ 、 $1 \leq k < h \leq K$ のとき $p(u_i) > p(u_j) > 0$ である。明らかに $U_k \cap U_h = \emptyset$ ($k \neq h$) で、 $u_i \in U_k$ のとき $P(U_k) = |U_k|p(u_i)$ である。

3.1.2 変換の意味づけと本研究の特徴

確率測度においては U の各要素 u_i を $p(u_i) = m(\{u_i\})$ の程度で信じる証拠があるが、 $|A| \geq 2$ を満たす $A \subseteq U$ については $m(A) = 0$ である。また、可能性測度では協和的な焦点要素 F_k ($k=1, \dots, K$) 内の要素と信じる証拠はあるが、その他の U の部分集合については全く信じる証拠がない。つまり、証拠理論の立場から見ると、確率と可能性間の変換は U に関する確信の構造を変えることを含む。

本研究の特徴は、確率と可能性間の変換を証拠理論における証拠の変換と捉える点にある。確率測度と可能性測度の証拠構造の違いに基づいてどのように変更すべきか検討し、確率と可能性間の変換を行う。

以下の議論では確率測度 $P(\cdot)$ あるいは確率分布 $p(\cdot)$ の基礎となる証拠を $E_p = (F^p, m_p)$ 、可能性測度 $\Pi(\cdot)$ および可能性分布 $\pi(\cdot)$ を与える証拠を $E_\pi = (F^\pi, m_\pi)$ と記述する。これによって $p(\cdot)$ から $\pi(\cdot)$ あるいは $P(\cdot)$ から $\Pi(\cdot)$ の変換は E_p を E_π に変換することに置き換えられ、逆の場合も同様である。ただし、 $m_p(\{u_i\}) = p(u_i)$ 、 $F^p = \{\{u_i\} \mid u_i \in U_1 \cup \dots \cup U_{Kp}\}$ 、 $F^\pi = \{F_1^\pi, \dots, F_{K\pi}^\pi\}$ とする。

3.2 T1：可能性を順序尺度として見る場合

不確実性を表す尺度として確率は比例尺度で、可能性は順序尺度的性格を持つ。そこで、可能性分布に本質的な情報は順序情報のみで数値は順序を表現する便宜的なものと考えよう。この場合、可能性の順序情報から確率分布を生成するには新たな情報を加えない限り不可能であるから、ここでは確率分布から可能性の順序情報を生成することのみを考える。

また、確率と可能性間の変換は証拠理論的には等価でない表現間の近似的変換である。よって近似のための基本原則を定める必要がある。ここでは、確率分布から可能性の順序情報を生成する基本原則として、確率における大小順序を可能性の順序に継承させる確率選好保存原則を考える。

$$p(u_i) = p(u_j) \rightarrow \pi(u_i) = \pi(u_j) \quad (33)$$

$$p(u_i) > p(u_j) \rightarrow \pi(u_i) > \pi(u_j) \quad (34)$$

ただし、上式において $A \rightarrow B$ は含意 ($\Rightarrow$) ではなく、条件 A が満たされるとき B を成立させるというプロダクションルールを表す。つまり、確率分布と可能性分布間に成立する静的な事実ではなく、確率分布から可能性の大小を決定する規則を与える。

さて、この場合ルールは上述の2つのみであるため、ルールに従って決定された可能性が $\pi(u_i) = \pi(u_j)$ であれば $p(u_i) = p(u_j)$ 以外にはありえず、 $\pi(u_i) > \pi(u_j)$ ならば $p(u_i) > p(u_j)$ である (例えば、確率の大きな u_i から順に (33)、(34) 式を適用するとよい)。結果として、与えられた確率分布と得られる可能性の順序関係の間には次の2つの関係が成立する。

$$p(u_i) = p(u_j) \Leftrightarrow \pi(u_i) = \pi(u_j) \quad (35)$$

$$p(u_i) > p(u_j) \Leftrightarrow \pi(u_i) > \pi(u_j) \quad (36)$$

本稿ではこれ以降、(35)、(36) 式を確率選好保存原則と呼ぶ。なお、この原則は Zadeh の可能性・確率調和原理とも、Dubois らの選好保存原理とも異なることに注意されたい。

さて、ここで以下の補題と命題が成立する。

【補題1】

E_p から E_π への変換が確率選好保存原則に従う必要十分条件は次式で与えられる。

$$u_i \in U_k \Leftrightarrow u_i \in G_k = F_k^\pi - F_{k-1}^\pi, k=1, \dots, K \quad (37)$$

ただし、 $K = K_p = K_\pi$ 。

証明：3.1節における U_k 、 F_k^π の定義より、

$$\begin{aligned} u_i, u_j \in U_k &\Leftrightarrow p(u_i) = p(u_j), \\ u_i \in U_h, u_j \in U_k, h < k &\Leftrightarrow p(u_i) > p(u_j), \\ u_i, u_j \in G_k &\Leftrightarrow \pi(u_i) = \pi(u_j), \\ u_i \in G_h, u_j \in G_k, h < k &\Leftrightarrow \pi(u_i) > \pi(u_j) \end{aligned}$$

が成立する。よって明らか。(証明終)

【命題1】

E_p から E_π への変換が確率選好保存原則に従う必要十分条件は次式で与えられる。

$$F_k^\pi = \bigcup_{h=1, k} U_h, k=1, \dots, K \quad (38)$$

証明：補題1より $U_k = F_k^\pi - F_{k-1}^\pi, 1 \leq k \leq K$ は確率選好保存原則に従う変換の必要十分条件である。この式の両辺について1から k までの和集合をとると(38)式が成立する。逆に、(38)式が成立すれば $U_k = F_k^\pi - F_{k-1}^\pi, 1 \leq k \leq K$ 。よって明らか。(証明終)

以上より確率選好保存原則は、 $E_\pi = (F^\pi, m_\pi)$ における $F^\pi = \{F_1^\pi, \dots, F_K^\pi\}$ を与えることがわかる。可能性分布における順序情報は F^π のみによって決まるから、可能性を順序尺度として見るなら確率から可能性への変換は確率選好保存原則のみで一意に決まる。また、可能性の順序を表現する目的で便宜的に数値を用いる場合には、(2)式が成立するように各焦点要素に0でない任意の基本確率を付与すればよい。

3.3 T2：可能性を比例尺度として見る場合(その1)

可能性分布の数値に意味があると考えよう。可能性にゼロ点があると考えれば、つまり可能性0.2は可能性0.1の2倍の可能性であると考えれば、確率と同様に可能性も不確実性に関する比例尺度である。ただし、Klirらの研究からも分かるように、これは必ずしも確率と可能性間の変換が比例尺度変換であることを意味しない[7]。ある事象の確率が a 、可能性が b であるからといって、確率が $2a$ である事象の可能性が $2b$ である必然性はないからである。

可能性を比例尺度と考えて確率から可能性への変換を行う場合には、確率選好保存原則に加えて何らかの情報あるいは制約を加え、基本確率 $m_\pi(F_k^\pi)$ を決める必要がある。ここでは、Duboisらの確率・可能性一貫性原理と最大特定を利用する。すなわち、確率選好保存原則と確率・可能性一貫性原理を満たす最大特定の可能性分布を求める。

はじめに、与えられる確率分布が、 $p(u_1) > p(u_2) > \dots > p(u_n)$ であると仮定する。この場合、確率・可能性一貫性原理を満たす最大特定の可能性分布は(22)式で与えられるが、これが確率選好保存原則をも満たすのは明らかである。またこのとき、 $U_k = \{u_k\} (k=1, \dots, n)$ であるから、(38)式、(29)式より $m_\pi(F_k^\pi)$ を次のように得ることができる。

$$m(F_k^\pi) = \pi(u_k) - \pi(u_{k+1}) = p(u_k) \quad (39)$$

ただし、 $\pi(u_{n+1}) = 0$ とする。

次に、 $p(u_1) \geq p(u_2) \geq \dots \geq p(u_n)$ で、少なくとも一つの $i (1 \leq i \leq n-1)$ において $p(u_i) = p(u_{i+1})$ である場合について考える。この場合、以下の命題が成立する。

【命題2】

$1 \leq q_1 < r_1 < \dots < q_m < r_m \leq n$ を満たす $q_j, r_j (1 \leq j \leq m)$ に対し、 $i \in \{q_j, \dots, r_j - 1\}$ において $p(u_i) = p(u_{i+1})$ 、その他の i については $p(u_i) > p(u_{i+1})$ とする。このとき、次式は、確率選好保存原則と確率・可能性一貫性原理に従う最大特定の可能性分布である。

$$\pi(u_i) = \begin{cases} \sum_{j=q_j, n} p(u_j), & q_j \leq i \leq r_j (j=1, \dots, m) \\ \sum_{j=i, n} p(u_j), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (40)$$

証明：(40)式が確率選好保存原則、確率・可能性一貫性原理を満たすのは明らか。また、(40)式は $p(u_i)$ の和で与えられているが、どれか一つの項の値を小さくすると確率選好保存原則か確率・可能性一貫性原理のどちらかを満たさなくなる。よって、二つの原則を満たす最大特定の可能性分布である。(証明終)

このとき基本確率 $m_\pi(F_k^\pi)$ は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} m(F_k^\pi) &= \Pi(G_k^\pi) - \Pi(G_{k+1}^\pi) \\ &= \pi(u_i^k) - \pi(u_i^{k+1}) = |G_k| p(u_i^k) \end{aligned} \quad (41)$$

ただし、 $G_k^\pi = F_k^\pi - F_{k-1}^\pi, u_i^k \in G_k^\pi$ とし、 $\Pi(G_{k+1}^\pi) = 0, \pi(u_i^{k+1}) = 0$ である。なお、この変換を確率分布から可能性分布への写像と考えると、全射ではないため可能性から確率への逆変換は一般に可能でない。

3.4 T3：可能性を比例尺度として見る場合(その2)

Duboisらは Pl 測度 (または Bel 測度) を確率測度によって近似する際に、ある焦点要素 A に割り当てられた基本確率 $m_{pl}(A)$ を A の各要素に $m_{pl}(A)/|A|$ ずつ振り分けること (equidistribution) を提案した[10]。 $m_{pl}(A)$ は A 内のいずれかが真である確信度を表し、確率測度の基本確率 $m_p(\cdot)$ において焦点要素はすべて濃度が1であるからこれはごく自然な考え方である。与

えられた Pl 測度の焦点要素の集合を $F = \{F_1, \dots, F_K\}$ とすれば、任意の $u_i \in U$ の近似確率は次式で得られる。

$$p(u_i) = m_p(\{u_i\}) = \sum_{F_j: u_i \in F_j} m_{pl}(F_j) / |F_j| \quad (42)$$

上式で求めた $p(u_i)$ から確率測度 $P(A)$ を計算すると $Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A)$ が満たされる [10]。

本稿では上述の変換を基本確率等分散原則と呼び、この原則に従う確率・可能性変換を $T3$ とする。Dubois らは直接にこの原則を確率・可能性変換に適用せず、2.3節に述べた発見的な方法を提案したが、(20)式を見るとこの変換が結果として基本確率等分散原則に従うことが分かる。

以下では $T3$ が確率選好保存原則を満たすことを示しつつ、基本確率等分散原則から (17) 式が一意に導かれることを示そう。本章の表記法に従って基本確率等分散原則を表すと次のようになる。

$$p(u_i) = m_p(\{u_i\}) = \sum_{h=k,K} m_\pi(F_h^\pi) / |F_h^\pi|, \quad \forall u_i \in G_k^\pi = F_k^\pi - F_{k-1}^\pi \quad (43)$$

明らかに $G_k^\pi = F_k^\pi - F_{k-1}^\pi$ 内の要素の確率はすべて等しく、 $U_k = G_k^\pi = F_k^\pi - F_{k-1}^\pi$ である。 $U_k = G_k^\pi$ に含まれる u_i を u_i^k で表現し、逆に確率分布から $m_\pi(F_k^\pi)$ を求めると次のようになる。

$$m_\pi(F_k^\pi) = |F_k^\pi| (p(u_i^k) - p(u_i^{k+1})) \quad (44)$$

ただし、 $F_k^\pi = \bigcup_{h=1,k} U_h$ で $p(u_i^{k+1}) = 0$ である。

以上から、次のように可能性分布を得る。

$$\pi(u_i) = \begin{cases} \Pi(U_k), & \text{if } u_i \in U_k = F_k^\pi - F_{k-1}^\pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \Pi(U_k) &= \sum_{A \cap U_k \neq \emptyset} m_\pi(A) = \sum_{F_j \cap (F_k^\pi - F_{k-1}^\pi) \neq \emptyset} m_\pi(F_j^\pi) \\ &= \sum_{j=k,K} m_\pi(F_j^\pi) = \sum_{j=k,K} |F_j^\pi| (p(u_i^j) - p(u_i^{j+1})) \end{aligned} \quad (46)$$

$$= |F_k^\pi| p(u_i^k) + \sum_{j=k+1,K} |U_j| p(u_i^j)$$

ここで、 U の要素 u_i が $p(u_1) \geq p(u_2) \geq \dots \geq p(u_n)$ となるように順序づけされ、 $U_k = \{u_a, \dots, u_b\}$, $1 \leq a \leq i \leq b \leq n$ とする。すると、 $p(u_a) = \dots = p(u_i) = \dots = p(u_b)$ であるから可能性分布は、

$$\begin{aligned} \pi(u_i) &= \Pi(U_k) = b p(u_i) + \sum_{j=b+1,n} p(u_j) \\ &= i p(u_i) + (b-i) p(u_i) + \sum_{j=b+1,n} p(u_j) \quad (47) \\ &= i p(u_i) + \sum_{j=i+1,n} p(u_j) \end{aligned}$$

となり、(17)式に一致する。Dubois らは確率の差が必然性の程度を表すとの考えから上式を導いた訳であるが、基本確率等分散の性質を基本原則とすればこの変換式は一意に得られる。なお、補題1および命題1が明らかに成立するから、確率選好保存原則は満たされる。また、確率・可能性一貫性原理が満たされるのも明らかである。

4. 例題と考察

3種類の確率・可能性変換方法について検討した。 $T1$ は確率選好保存原理に基づく確率分布から可能性の順序情報への変換、 $T2$ は確率選好保存原理と確率・可能性一貫性原理を満たす最大特定の可能性分布を求める変換、 $T3$ は基本確率等分散原則に基づく変換で、いずれもそれぞれの原理・原則から一意に導かれる。た

図3 $T1$ 、 $T2$ 、 $T3$ による変換で得られる焦点要素

だし、 $T3$ は確率選好保存原理と確率可能性一貫性原理も満たす。

簡単な例題をもとに $T1$ 、 $T2$ 、 $T3$ の変換例を示す。 $U=\{u_1, \dots, u_7\}$ として、与えられた U 上の確率分布、および $T1$ 、 $T2$ 、 $T3$ による変換結果を表1に示す。また、変換された可能性測度における焦点要素の構造を図3に示す。ただし、表中で o_i 、($i=1, \dots, 5$)は可能性の順序を表し、 $o_1 > \dots > o_5$ である。明らかに任意の A 、 $B \subseteq U$ に対し以下の式が成立し、可能性を順序尺度と考える場合には $T1$ 、 $T2$ 、 $T3$ のどの変換も全く同等である。

$$\begin{aligned} \Pi_{T1}(A) < \Pi_{T1}(B) &\Leftrightarrow \Pi_{T2}(A) < \Pi_{T2}(B) \\ &\Leftrightarrow \Pi_{T3}(A) < \Pi_{T3}(B) \\ \Pi_{T1}(A) = \Pi_{T1}(B) &\Leftrightarrow \Pi_{T2}(A) = \Pi_{T2}(B) \\ &\Leftrightarrow \Pi_{T3}(A) = \Pi_{T3}(B) \end{aligned}$$

一方、可能性を比例尺度として見る場合は $T2$ と $T3$ のどちらがより適切であるかが問題となる。しかし、 $T2$ 、 $T3$ の変換時に用いた基本原則以外に、我々は客観的な評価基準を持ち合わせていない。Zadehの可能性・確率調和原理や Klir らの不確実性保存原理の問題点、および(8)式のような比例尺度変換が不適切であることは既に指摘した。そこで、ここでは $T2$ と $T3$ に適用した基本原則、つまり最大特定と基本確率等分散原則の妥当性について再考する。

Dubois らが指摘するように可能性分布が順序尺度であれば、可能性分布に含まれる情報が確率分布に含まれる情報より少ないのは事実である。しかし、可能性の順序は焦点要素の集合 F^π のみによって決まるため、可能性分布の数値(基本確率の値)の妥当性を論じる時にはすでに順序尺度として見ていない。したがって、最大特定によって可能性分布を決める考え方には疑問が残る。一方、基本確率等分散原則については確率と可能性間の近似としての意味が明確である。よって、変換の基礎となる原則の意味論から見て $T3$ の妥当性が高いと言える。また $T2$ が確率から可能性への一方向変

換であるのに対し、 $T3$ は双方向変換が可能であり、この点からも望ましい。

5. おわりに

確率分布と可能性分布間の変換に関する過去の研究を整理し、証拠理論の立場から与えた原則から一意に導かれる3種類の方法($T1$ 、 $T2$ 、 $T3$)を検討し、その妥当性を議論した。

まず、可能性を不確実性に関する順序尺度として見る場合には $T1$ によって確率分布から可能性の順序構造のみを求めればよいことを示した。可能性の順序を表現するために便宜的に数値を用いる場合には、得られた各焦点要素に0でない任意の基本確率を与えればよい。

また、可能性分布の数値に意味を持たせ、比例尺度として扱う場合は2通りの方法($T2$ 、 $T3$)を検討し、基本確率等分散原則に基づく $T3$ の方が与えた原則および変換の双方向性の観点から適切であることを示唆した。この変換は文献[11]が発見的な方法から導いたものであるが、本論文ではこの変換が持つ基本確率等分散の性質を基本原則とすれば、一意に導かれることを強調する。

可能性は順序尺度と比例尺度の2面性を持つ。事前知識として全体集合の各要素間に可能性の大小の順序が与えられれば、任意の事象の可能性の大小を計算することができる。しかし、複数の変数があって一部の变数には確率分布、残りの変数には可能性分布が与えられ、それらを用いた判断が必要なとき、可能性を比例尺度と見なして変換を行う必要がある。本稿では証拠理論の立場から変換方法を議論したが、確率がデータから得られ、可能性が専門家の主観によって与えられるケースを考えると、理論的な考察に加えて確率と可能性に対する人間の認知的特性を考慮すべきと考えられる。しかし、これについては今後の課題としたい。

参考文献

- [1] D. Dubois, H. Prade : Epistemic Entrenchment and Possibilistic Logic, *Artificial Intelligence* **50**, pp.223-239 (1991)
- [2] D. Dubois, H. Prade : A Survey of Belief Revision and Updating Rules in Various Uncertainty Models, *Int. J. Intelligent Systems* **9**, pp.61-100 (1994)
- [3] 山田耕一：不確実な証拠による因果逆推論についての一考察、日本ファジィ学会誌、Vol.11, No.1, pp.159-168 (1999)
- [4] L. A. Zadeh: Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* **1**, 3-28 (1978)
- [5] M. R. Civanlar, H. J. Trussell: Constructing mem-

表1 確率分布から可能性分布への変換

	$p(u_i)$	$T1: \pi(u_i)$	$T2: \pi(u_i)$	$T3: \pi(u_i)$
u_1	0.25	o_1	1.00	1.00
u_2	0.20	o_2	0.75	0.95
u_3	0.20	o_2	0.75	0.95
u_4	0.15	o_3	0.35	0.80
u_5	0.15	o_3	0.35	0.80
u_6	0.05	o_4	0.05	0.30
u_7	0.00	o_5	0.00	0.00

- bership functions using statistical data, *Fuzzy Sets and Systems* **18**, pp.1-13 (1986)
- [6] P. Smets: Constructing the pignistic probability functions in a context of uncertainty, in *Uncertainty in Artificial Intelligence 5* (eds. M. Henrion, R. D. Shachter, L. N. Kanal, J. F. Lemmer), North-Holland Pub., pp.29-39 (1990)
- [7] G. J. Klir: A principle of uncertainty and information invariance, *Int. J. General Systems* **17**, pp.249-275 (1990)
- [8] J. F. Geer, G. J. Klir: A mathematical analysis of information-preserving transformations between probabilistic and possibilistic formulations of uncertainty, *Int. J. General Systems* **20**, pp.143-176 (1992)
- [9] M. Delgado, S. Moral: On the concept of possibility-probability consistency, *Fuzzy Sets and Systems* **21**, pp.311-318 (1987)
- [10] D. Dubois, H. Prade: On several representations of uncertain body of evidence, in *Fuzzy Information and Decision Processes* (eds. M. M. Gupta, E. Sanchez), North-Holland Pub., pp.167-181 (1982)
- [11] D. Dubois, H. Prade: Unfair coins and necessity measures: Towards a possibilistic interpretation of histograms, *Fuzzy Sets and Systems* **10**, pp.15-20 (1983)
- [12] D. Dubois, H. Prade: Consonant approximations of belief functions, *Int. J. of Approximate Reasoning*, Vol.4, pp.419-449 (1990)
- [13] D. Dubois, H. Prade, S. Sandri : On possibility/probability transformations, in *Fuzzy Logic : State of the Art* (eds. R. Lowen, M. Lowen), Kluwer Academic Pub., pp.103-112 (1993)
- [14] D. Dubois, H. Prade: *Possibility Theory*, Plenum Press (1988)
- [15] G. Shafer: *A mathematical theory of evidence*, Princeton University Press (1976)
- [16] G. J. Klir, T. A. Folger: *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice Hall (1988)
- [17] G. J. Klir, A. Ramer: Uncertainty in the Dempster-Shafer theory: a critical re-examination, *Int. J. of General Systems* **18**, pp.155-166 (1990)
- [18] A. Rammer: Inequalities in evidence theory based on concordance and conflict, *Proc. 4th IFSA Congress* (1991)
- [19] 菅野、室伏：ファジィ測度、日刊工業新聞社 (1993)
(2000年10月3日 受付)
(2001年2月13日 再受付)
(2001年3月27日再々受付)
- [問い合わせ先]
〒940-2188 長岡市上富岡町1603-1
長岡技術科学大学経営情報系
山田耕一
Tel & Fax: 0258-47-9359
E-mail: yamada@kjs.nagaokaut.ac.jp

著者紹介

山田 耕一 (やまだ こういち)

長岡技術科学大学経営情報系
 1978年東京工業大学工学部制御工学科卒業。1980年同大学院総合理工学研究科システム科学専攻修士課程修了。三菱総合研究所、日本DEC、山武ハネウエルを経て1996年長岡技術科学大学計画・経営系助教授。1991-1993年国際ファジィ工学研究所。2000年長岡技術科学大学経営情報系助教授。博士(工学)。日本ファジィ学会、情報処理学会、人工知能学会、計測自動制御学会、IEEE-CS 各会員。

A Study on Probability-Possibility Transformation Methods Based on Evidence Theory

by

Koichi YAMADA

Abstract

Transformation between probability and possibility has been studied by many researchers, since Zadeh proposed Possibility theory. In most of those studies, conditions that must be satisfied for the transformation are examined, and the transforming equation devised heuristically is proved to satisfy the conditions. Therefore, it is not guaranteed that the proposed transforming equation is the only one satisfying the conditions.

The paper devises and examines three new transformation methods between probability and possibility. Every method first gives principles that must be satisfied in the transformation, and conducts the transformation in the only way derived from the principles. One of the three methods ($T1$) considers that possibility is an ordinal scale of uncertainty, and obtains an ordinal structure of possibility from a given probability distribution. The remaining two ($T2$, $T3$) regards possibility as a ratio scale, and transforms a probability distribution into a possibility one. Especially, the principles used for $T3$ lead to an equation transformable in both directions, which is the same as an equation devised heuristically by Dubois and Prade.

These three methods create the identical ordinal structure of possibility when the transformation is in the direction from probability to possibility. However, possibility distributions derived by $T2$ and $T3$ are different. Thus, the paper examines which of $T2$ or $T3$ is more desirable from the point of the given principles, when a possibility distribution is obtained from a probability one. The examination suggests that $T3$ is more desirable.

Key words : Possibility, possibility distribution, probability, probability-possibility transformation.

Contact Address : **Koichi YAMADA**

*Department of Management and Information Systems Science, Nagaoka University of Technology
 1603-1 Kami-tomioka, Nagaoka, Niigata, 940-2188, JAPAN*

TEL : 0258-47-9359

FAX : 0258-47-9359

E-mail : yamada@kjs.nagaokaut.ac.jp