特集

ラフ集合と様相論理†

村井 哲也*

1 まえがき

本稿のテーマはラフ集合と様相論理, 正確には様相命題論理との間にしばしば指摘されて来た対応関係に関する理論的考察である. 以下, 本稿では, 様相論理と言え, 様相命題論理を指すものとする.

様相論理(modal logic) [3, 4, 5] はそれぞれ必然性(necessity)と可能性(possibility)を表す二つの1項演算子 $\Box$ と $\Diamond$ を古典命題論理に追加した結果, 文 p に対して

$\Box p$: p である事が必然である

$\Diamond p$: p である事が可能である

という表現能力を新たに備えた論理である. この拡張の結果, 真理様相, すなわち, 正しさに関する必然性や可能性, 偶然性などを形式言語の中で明示的に扱う事ができる. **様相演算子**(modal operator)と呼ばれる, これら二つの演算子は互いに独立ではない. 例えば, 阪神タイガーズが優勝しないのは必然ではない, と言え, 阪神タイガーズが優勝するのは可能だ, と主張するのと同じである. すなわち, 必然性と可能性との間に次の双対性が存在する:

$$\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p, \quad \Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p.$$

ここで, $\leftrightarrow$ は実質同値, $\neg$ は否定を表す.

20世紀後半には, 様相論理は真理様相だけに留まらず, 真理に関する他の様々な修飾表現, 例えば, 規範, 知識・信念, 時間・時相, 証明可能性, プログラムなどに関する諸様相を対象とし, 工学的にも大変興味深い. なお, 深海悟先生(大阪工大)との共著による本誌の解説[8]も併せて参照していただければ幸いである.

ポーランドの Z. Pawlak [9] が **ラフ集合**(rough set) を1980年代の初めに提唱した当初から, その論理的側面は E. Orlowska を中心に様相論理の観点から研究さ

れている. 結論を先に言え, Pawlak が最初に提唱した, いわゆる **Pawlak ラフ集合**(Pawlak rough set) の基礎部分は, 同値関係を持つ Kripke フレームによる **可能世界意味論**(possible worlds semantics) に一致し, 様相論理の体系 S5 に対応する. よって, 後に, Y. Y. Yao ら [12] が拡張した **一般化ラフ集合**(generalized rough set) も一般の可能世界意味論の中に位置付けられる.

また, T. Y. Lin [6] らは最近, 二項関係に基づく **granular 計算**(granular computing) に関する理論を提唱した. 彼によると, granularity はファジィ理論の創始者 L. A. Zadeh が近年, 特に強調する概念であり, ラフ理論ばかりではなく, それ以前から研究されてきたクラスタリングやデータ圧縮, 分割統治法, 情報隠蔽, 区間計算などに共通して暗黙的に存在するという. なお, granularity に関して, Zadeh が明示的に論じたものは, 少なくとも文献 [13] まで遡る.

Lin は granularity を数学的に表現するために, (基本)近傍系を利用した. 近傍系は一般化近似空間を特別な場合として含むので, ラフ集合の枠組の更なる拡張とみなせる. 一方, 様相論理における Kripke フレームの拡張である Scott-Montague フレームは(全)近傍系から位相的性質に関する条件をすべて外したものであり, 実際, これを近傍フレームと呼ぶ研究者もいる (cf. [1, 4]). よって, ラフ集合の更なる拡張としての近傍系は Scott-Montague フレームによる可能世界意味論の中に位置付けられる.

2 Pawlak ラフ集合

議論の対象となる全体集合を U とする. Pawlak [10] によると, U の任意の部分集合 X は U における, なんらかの **概念**(concept) を表すと考える. また, そのような概念の集まりが U の分割を与える時, その集まりは U に関する(抽象的) **知識**(knowledge) を与えるという. より正確には, 概念の集まり, すなわち, U の部分集合族 C が知識を与えるのは, 三条件

1. $\forall X \in C (X \neq \emptyset),$
2. $\cup C (= \cup_{X \in C} X) = U,$
3. $\forall X, Y \in C (X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X = Y)$

† Large Rough Sets and Modal Logics
Tetsuya MURAI

* 北海道大学大学院工学研究科システム情報工学専攻数理情報工学講座
Research Group of Mathematical Information Engineering
Division of Systems and Information Engineering
Graduate School of Engineering

を満たす時である。\$U\$ の任意の分割 \$C\$ に対して、\$U\$ 上の二項関係 \$R\$ を

$$xRy \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists X \in C (x, y \in X)$$

で定義すれば、明らかに

反射的：\$\forall x \in U (xRx)\$,

対称的：\$\forall x, y \in U (xRy \Rightarrow yRx)\$,

推移的：\$\forall x, y, z \in U ((xRy \text{ and } yRz) \Rightarrow xRz)\$

を満たすので、\$R\$ は同値関係である。一般に、任意の同値関係 \$R\$ は更に次の性質を持つ：

連鎖的：\$\forall x \in U \exists y \in U (xRy)\$,

Euclid 的：\$\forall x, y, z \in U ((xRy \text{ and } xRz) \Rightarrow yRz)\$.

逆に、\$U\$ 上の任意の同値関係 \$R\$ が与えられた時、\$U\$ の \$R\$ に関する商集合を構成できる：

$$U/R \stackrel{\text{df}}{=} \{[x]_R | x \in U\}.$$

\$[x]_R\$ は \$U\$ の元 \$x\$ を含む \$R\$ に関する同値類である：

$$[x]_R \stackrel{\text{df}}{=} \{y \in U | xRy\}.$$

以下、これを **\$R\$-同値類** と呼ぶ。商集合 \$U/R\$ は分割であるので、分割と同値関係は等価である。以下では、同値関係 \$R\$ が知識を与えるといういい方もある。

\$R\$-同値類は同値関係 \$R\$ が与える知識の下で記述可能な概念を組み立てるためのブロックの役割を果たす。一つの \$R\$-同値類に属する二つの要素 \$x\$ と \$y\$ は \$R\$ が与える知識の下で互いに識別できない。互いに識別不可能な要素がまとまって一つのブロックを構成する。

概念 \$X\$ が、ちょうど、ある \$R\$-同値類であるか、または、いくつかの \$R\$-同値類の和集合であるならば、それは \$R\$ が与える知識によって正確に記述できる概念である。そのような部分集合を **\$R\$-定義可能** である (\$R\$-definable) という。\$R\$-同値類でもなく、それらの和集合でもない \$U\$ の部分集合は **\$R\$-定義不可能** である (\$R\$-undefinable), もしくは、**\$R\$-ラフ** である (\$R\$-rough) という。

\$R\$-ラフという性質を正確に把握するために、上下からの近似が導入される。概念 \$X\$ に対して、その内部に \$X\$ からはみ出さないようにブロック (\$R\$-同値類) を組み立てて、それ以上追加できない所まで達したのが \$X\$ の **\$R\$-下近似** (\$R\$-lower approximation) \$\underline{R}(X)\$ である。多分、全体集合から \$X\$ の一部たりとも欠けないようにブロック (\$R\$-同値類) を外して、それ以上外せない所まで至ったのが \$X\$ の **\$R\$-上近似** (\$R\$-upper approximation) \$\overline{R}(X)\$ である。言い換えれば、\$X\$ と非空の交わりを持つ \$R\$-同値類の和集合である。これらを式で定義すると

次のようになる。

近似の定義 1 (Pawlak ラフ集合)

$$\underline{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \bigcup \{[x]_R | [x]_R \subseteq X\},$$

$$\overline{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \bigcup \{[x]_R | [x]_R \cap X \neq \emptyset\}.$$

これら二種類の近似を用いれば、定義可能性とラフ性は次のように特徴付ける事ができる：

$$X : R\text{-定義可能} \Leftrightarrow \underline{R}(X) = X = \overline{R}(X),$$

$$X : R\text{-ラフ} \Leftrightarrow \underline{R}(X) \subset X \subset \overline{R}(X).$$

近似によって、各部分集合 \$X\$ に関して、次の互いに素な三領域を得る：

$$X \text{ の } R\text{-正領域} : POS_R(X) \stackrel{\text{df}}{=} \underline{R}(X),$$

$$X \text{ の } R\text{-負領域} : NEG_R(X) \stackrel{\text{df}}{=} U \setminus \overline{R}(X),$$

$$X \text{ の } R\text{-境界領域} : BN_R(X) \stackrel{\text{df}}{=} \overline{R}(X) \setminus \underline{R}(X).$$

以上から、Pawlak ラフ集合の理論における基本単位は構造

$$\langle U, R \rangle$$

である事が分かる。これを **Pawlak 近似空間** (Pawlak approximation space) と呼ぶ。これは、様相論理の可能世界意味論において Kripke フレームという構造の特別な場合である。Kripke フレームでは関係 \$R\$ は \$U\$ 上の任意の二項関係でよい。逆に、Pawlak 近似空間における同値関係の条件を緩める一般化も Yao ら [12] が研究しており、ラフ集合と様相論理の密接な関係が見え隠れする。そこで、次節では、Kripke フレームによる可能世界意味論に関して、その大筋を見る。

3 Kripke フレーム

様相論理で許容される文の全体を様相言語と呼び、\$L_{ML}(P)\$ と書く。これは、高々可算無限個の原子文から成る集合 \$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n, (\dots)\}\$ から、以下の論理演算子 \$\top\$ (恒真), \$\perp\$ (恒偽), \$\neg\$ (否定), \$\wedge\$ (連言), \$\vee\$ (選言), \$\rightarrow\$ (実質含意), \$\leftrightarrow\$ (実質同値), \$\Box\$ (必然), \$\Diamond\$ (可能) を使って、次の形成規則

$$p_i \in P \Rightarrow p_i \in L_{ML}(P)$$

$$\top, \perp \in L_{ML}(P)$$

$$p \in L_{ML}(P) \Rightarrow \neg p, \Box p, \Diamond p \in L_{ML}(P)$$

$$p, p' \in L_{ML}(P) \Rightarrow p \wedge p', p \vee p', p \rightarrow p', p \leftrightarrow p' \in L_{ML}(P)$$

によって生成される最小の集合である。

$\Box p$ と $\Diamond p$ はその形成過程の最後に様相演算子が適用された文である。これらに対して真理関数的解釈を適用すると、どうなるであろうか。Bull ら[1]によれば、様相演算子は 1 項演算子であるから、1, 0 をそれぞれ真, 偽を表す真理値とする時、1 項演算子に対する真理値の取り得る可能な組合せは次の四つしかない：

p	$\neg p$	$\top$	$\perp$
1	0	1	0
0	1	1	0

これから、 $\Box p$ と $\Diamond p$ は真理関数的解釈の下では、 p , $\neg p$, $\top$, $\perp$ のいずれかと一致せざるを得ず、このままでは、様相演算子の導入は結果的に無意味である。

この問題を解決する方法として、歴史上、(1)ポーランドの著名な論理学者 J. Łukasiewicz の多値論理によるアプローチ、(2)複数の解釈を同時に考慮するアプローチ、の少なくとも二つが存在した。後者は、現実には起きている事態に加えて、起こり得る事態を含めた、いわゆる**可能世界**(possible world)の導入に結びつき、今日の可能世界意味論として発展した。その源流は、かの G. W. Leibniz が、必然的に真であるとは、すべての可能な世界で真である事である、と指摘した時まで遡るという。なお、本稿では触れないが、Łukasiewicz のアプローチから A. Tarski らによって様相論理の代数的意味論が展開され、可能世界意味論を事実上、先取りしていたという事実がある(cf.[1])。

可能世界意味論では、可能世界の非空集合 U を考え、様相演算子を含まない文 p の真理値は各可能世界 $x (\in U)$ 毎に、古典論理と同様に、付値関数 V で与える。以下、可能世界を単に世界と呼ぶ場合がある。様相演算子を含む文の真理値は、世界間の見え方に依存して定める。その見え方を規定するために、**到達可能関係**(accessibility relation)と呼ぶ U 上の二項関係 R が設定される。以上の三つの要素をまとめた構造

$$M = \langle U, R, V \rangle$$

を **Kripke モデル**(model)と呼ぶ。Kripke モデルから付値 V を除いた構造

$$F = \langle U, R \rangle$$

を **Kripke フレーム**(frame)という。逆に、Kripke フレーム $F = \langle U, R \rangle$ に付値関数 $V : P \times U \rightarrow \{0, 1\}$ を加えた構造 $\langle U, R, V \rangle$ を F 上の Kripke モデルという。連鎖的、反射的など関係の性質はそのまま Kripke モデルやフレームの性質として適用される。例えば、反射的な到達可能関係を持つ Kripke フレームは反射的な Kripke フレームという。 R が同値関係なら、Kripke

フレームは Pawlak 近似空間に他ならない。そこで、ラフ理論の立場では、Kripke フレームを**一般化近似空間**(generalized approximation space) (cf.[12])と呼ぶ。

Kripke モデル M では、Leibniz のアイディアを踏まえ、ある文 p が世界 $x (\in U)$ において必然であるとは、 x から到達できるすべての世界で p が真である事、として定義する。また、必然演算子との双対な関係から、ある文 p が x で可能であるとは、少なくとも一つ、 x から到達できる世界が存在して、そこでは p が真であるとなる。形式的には次の式で表現できる：

$$V(\Box p, x) = 1 \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \forall y \in U (xRy \Rightarrow V(p, y) = 1)$$

$$V(\Diamond p, x) = 1 \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists y \in U (xRy \text{ and } V(p, y) = 1)$$

文 p が Kripke モデル M のすべての世界 $x \in U$ で真である時、 p は M で妥当である(valid)といい、 $M \models p$ と書く。文 p が Kripke フレーム F 上の任意の Kripke モデル M で妥当な時、 p は F で妥当であるといい、 $F \models p$ と書く。文 p が Kripke フレームのあるクラス C_F に属する任意の F で妥当な時、 p はクラス C_F で妥当であるといい、 $C_F \models p$ と書く。以上の定義はスキーマに拡張される。すなわち、あるスキーマがそれぞれの意味で妥当であるのは、その任意のインスタンスがそれぞれの意味で妥当である時とする。

各可能世界 $x \in U$ から到達可能な世界の集合を

$$U_R(x) \stackrel{\text{df}}{=} \{y \in U | xRy\}$$

で定義する。もし、 R が同値関係なら、これは x を含む R -同値類に他ならない。そこで、Pawlak 近似空間における下・上近似の定義における $[x]_R$ を $U_R(x)$ に置き換えたものはそれぞれ、**一般化下近似**(generalized lower approximation)、**一般化上近似**(generalized upper approximation)と呼ばれる[12]。

近似の定義 2 (一般化ラフ集合)

$$\underline{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in U | U_R(x) \subseteq X\},$$

$$\overline{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in U | U_R(x) \cap X \neq \emptyset\}.$$

これは定義 1 の拡張となっている。

Kripke モデル M において、文 p が真である可能世界を集めた集合を p の真理集合(truth set)と呼ぶ：

$$\|p\|^M \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in U | V(p, x) = 1\}.$$

到達可能な世界の集合 $U_R(x)$ と真理集合 $\|p\|^M$ を利用すると、前記の様相演算子を含む文の真理条件を

$$V(\Box p, x) = 1 \Leftrightarrow U_R(x) \subseteq \|p\|^M,$$

$$V(\Diamond p, x) = 1 \Leftrightarrow U_R(x) \cap \|p\|^M \neq \emptyset$$

と書き換えられる。更に、真理集合のレベルで

$$\|\Box p\|^M = \{x \in U \mid U_R(x) \subseteq \|p\|^M\}$$

$$\|\Diamond p\|^M = \{x \in U \mid U_R(x) \cap \|p\|^M \neq \emptyset\}$$

と書き直せば、これら二式の右辺はそれぞれ $\|p\|^M$ の一般化下・上近似そのものであるから

$$\|\Box p\|^M = \underline{R}(\|p\|^M),$$

$$\|\Diamond p\|^M = \overline{R}(\|p\|^M)$$

を得る。すなわち、一般化下近似、上近似はそれぞれ、必然、可能な文の真理集合を与えている。更に、次の対応も存在する：

$$\text{必然性： } \|\Box p\|^M = POS_R(\|p\|^M),$$

$$\text{不可能性： } \|\neg \Diamond p\|^M = NEG_R(\|p\|^M),$$

$$\text{偶然性： } \|\Diamond p \wedge \neg \Box p\|^M = BN_R(\|p\|^M).$$

4 様相論理の正規体系

スキーマ(schema)とは特定の形を持つ文から成る集合である。例えば、文集合 $\{\Box p \rightarrow p \mid p \in L_{ML}(P)\}$ をスキーマ **T** と呼び、しばしば、単に $\Box p \rightarrow p$ と略記する。 p は任意の文を取り得る事が暗黙の前提となるのが略記の根拠である。スキーマ **T** の各要素をそのインスタンスという。 $\Box(p_2 \wedge p_1) \rightarrow (p_2 \wedge p_1)$, $\Box(p_1 \rightarrow \Diamond p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow \Diamond p_3)$ などは、**T** のインスタンスである。スキーマを様相論理の体系を形成するために使用する時、**公理型**(axiom schema)と呼ぶ。

文 p に対して、 p^* を以下のように再帰的に定義する：

$$\begin{aligned} p_i^* &= \neg p_i \quad (i=1, 2, 3, \dots) & (p \vee q)^* &= (p^*) \wedge (q^*) \\ \top^* &= \perp & (p \rightarrow q)^* &= \neg(p^*) \wedge (q^*) \\ \perp^* &= \top & (p \leftrightarrow q)^* &= (p^*) \leftrightarrow \neg(q^*) \\ (\neg p)^* &= \neg(p^*) & (\Box p)^* &= \Diamond(p^*) \\ (p \wedge q)^* &= (p^*) \vee (q^*) & (\Diamond p)^* &= \Box(p^*) \end{aligned}$$

この時、スキーマ **S** に対して、 $S^* \stackrel{\text{df}}{=} \{\neg(p^*) \mid p \in S\}$ をその双対スキーマという。例えば、スキーマ **T** に対して、 $\neg(\Box p \rightarrow p)^* = \neg(\neg((\Box p)^*) \wedge (p^*)) = (\Diamond(p^*)) \vee \neg(p^*) = p^* \rightarrow \Diamond(p^*)$ だから、その双対スキーマ **T*** は $p \rightarrow \Diamond p$ であり、**T** $\Diamond$ と呼ぶ。表 1 に公理型として利用される主なスキーマとその双対スキーマを挙げる。

論理体系を定義する際、例えば、Hughes and Cres-

swell([4], p.111)にあるように、(1)公理型と推論規則で特徴付ける方法、(2)その体系で証明される定理の総体として定義する方法、が考えられる。本稿の目的からは後者の立場を取ると見通しが良い。よって、古典論理の健全性・完全性を前提とすれば、古典命題論理の体系は恒真文、いわゆるトートロジ全体から成る集合である。様相論理の体系は古典命題論理の拡張であるから、当然、トートロジ全体 PL を含むべきである。

様相論理の文の集合 Σ が

$$PL \subseteq \Sigma (\subseteq L_{ML}(P))$$

を満たし、かつ、モダス・ポネンス (Modus Ponens) に関して閉じている時、すなわち

$$\text{MP. } p, p \rightarrow q \in \Sigma \Rightarrow q \in \Sigma$$

を満足する時、 Σ を様相論理の一つの**体系**(system)であるという。ただし、様相論理では言語が拡張されているので、 PL として、通常のトートロジの他に、例えば、文 $(\Box p_1 \vee \neg \Box p_1)$ のような文も含める必要がある。この文は様相演算子を含むので、通常の意味でのトートロジではないが、しかし、 $\Box p_1$ 自体は真または偽のいずれか一方であるから、命題論理のトートロジと同じように恒真とみなせるのである。

$L_{ML}(P)$ と PL 自身はモダス・ポネンスに関して閉じているから、定義より、それぞれ、最大、最小の様相論理の体系である。更に次の結果を容易に示せる：

● $\Sigma_i (i \in I)$ がそれぞれ体系ならば、その共通部分 $\cap \{\Sigma_i \mid i \in I\}$ も体系である。

● 与えられた文集合 Γ を含む体系の共通部分 $\cap \{\Sigma \mid \Gamma \subseteq \Sigma\}$ は Γ を含む最小の体系である。

様相論理の体系 Σ の任意の要素を Σ の**定理**(theorem)と呼び、 $\vdash_{\Sigma} p$ と書く：

$$\vdash_{\Sigma} p \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} p \in \Sigma$$

この記法はスキーマに対して拡張される。スキーマ **S** の任意のインスタンスが Σ の定理である時、スキーマ **S** を体系 Σ の定理型と呼び、 $\vdash_{\Sigma} S$ と書く：

$$\vdash_{\Sigma} S \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} S \subseteq \Sigma.$$

様相論理の体系 Σ が更に、スキーマ **Df** $\Diamond$ と **K** を包含し、必然化規則 **RN** に関して閉じている時、すなわち、

$$\text{Df} \Diamond \cup \text{K} \subseteq \Sigma$$

$$\text{RN. } p \in \Sigma \Rightarrow \Box p \in \Sigma$$

を満たす時、**正規体系**(normal system)であるという。任意の正規体系 Σ に対して、定義から明らかに

表 1 様相論理の主なスキーマ

$\mathbf{Df} \Diamond = \Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$	$(\mathbf{Df} \Diamond)^* = \mathbf{Df} \Box = \Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$
$\mathbf{M} = \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} \Diamond = (\Diamond p \vee \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \vee q)$
$\mathbf{C} = (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \Diamond = \Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$
$\mathbf{N} = \Box \top$	$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \Diamond = \neg \Diamond \perp$
$\mathbf{P} \Box = \neg \Box \perp$	$(\mathbf{P} \Box)^* = \mathbf{P} \Diamond = \Diamond \top$
$\mathbf{K} = \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} \Diamond = (\neg \Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(\neg p \wedge q)$
$\mathbf{D} = \Box p \rightarrow \Diamond p$	$\mathbf{D}^* = \mathbf{D}$ (自己双対)
$\mathbf{T} = \Box p \rightarrow p$	$\mathbf{T}^* = \mathbf{T} \Diamond = p \rightarrow \Diamond p$
$\mathbf{B} = p \rightarrow \Box \Diamond p$	$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} \Diamond = \Diamond \Box p \rightarrow p$
$\mathbf{4} = \Box p \rightarrow \Box \Box p$	$\mathbf{4}^* = \mathbf{4} \Diamond = \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$
$\mathbf{5} = \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$	$\mathbf{5}^* = \mathbf{5} \Diamond = \Diamond \Box p \rightarrow \Box p$

$$\vdash_{\Sigma} \mathbf{Df} \Diamond \quad (= \Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p),$$

$$\vdash_{\Sigma} \mathbf{K} \quad (= \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q))$$

が成り立つ。また、スキーマ $\mathbf{S}$ とその双対に対して、 $\vdash_{\Sigma} \mathbf{S} \leftrightarrow \mathbf{S}^*$ が成り立つので、正規体系では、あるスキーマが定理型ならば、その双対スキーマも定理型となる。さて、すべての正規体系の共通部分を K とする：

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{ \Sigma \mid \Sigma : \text{正規} \}.$$

この K は最小の正規体系である。 K において表 1 に挙げたその他のスキーマについて、次が成り立つ：

$$\mathbf{M} \subseteq K, \text{ i.e., } \vdash_K \mathbf{M} \quad (= (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)),$$

$$\mathbf{C} \subseteq K, \text{ i.e., } \vdash_K \mathbf{C} \quad (= \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)),$$

$$\mathbf{N} \subseteq K, \text{ i.e., } \vdash_K \mathbf{N} \quad (= \Box \top),$$

$$\mathbf{D} \not\subseteq K, \text{ i.e., } \not\vdash_K \mathbf{D} \quad (= \Box p \rightarrow \Diamond p),$$

$$\mathbf{P} \not\subseteq K, \text{ i.e., } \not\vdash_K \mathbf{P} \quad (= \Diamond \top),$$

$$\mathbf{T} \not\subseteq K, \text{ i.e., } \not\vdash_K \mathbf{T} \quad (= \Box p \rightarrow p),$$

$$\mathbf{B} \not\subseteq K, \text{ i.e., } \not\vdash_K \mathbf{B} \quad (= p \rightarrow \Box \Diamond p),$$

$$\mathbf{4} \not\subseteq K, \text{ i.e., } \not\vdash_K \mathbf{4} \quad (= \Box p \rightarrow \Box \Box p),$$

$$\mathbf{5} \not\subseteq K, \text{ i.e., } \not\vdash_K \mathbf{5} \quad (= \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p).$$

更に、スキーマ $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n$ が与えられた時、

$$KS_1 \dots S_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{ \Sigma : \text{正規} \mid \mathbf{S}_1 \cup \dots \cup \mathbf{S}_n \subseteq \Sigma \}$$

で定義される文集合 $KS_1 \dots S_n$ はスキーマ $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n$ を包含する最小の正規体系である。左辺の記法を **Lemmon コード** と呼ぶ。体系 $KS_1 \dots S_n$ は

$$\begin{aligned} \vdash_{KS_1 \dots S_n} p &\Leftrightarrow \exists p_1, \dots, p_m (= p) \in L_{ML}(P) \\ &\text{s.t. } \forall i (< m) \\ &\quad (1) \ p_i \in PL \\ &\quad \text{or } (2) \ p_i \in \mathbf{Df} \Diamond \cup \mathbf{K} \\ &\quad \text{or } (3) \ p_i \in \mathbf{S}_1 \cup \dots \cup \mathbf{S}_n \\ &\quad \text{or } (4) \ \exists j, k (< i) (p_k = (p_j \rightarrow p_i)) \\ &\quad \text{or } (5) \ \exists j (< i) (p_i = \Box p_j). \end{aligned}$$

という性質 (cf.[5]) を持つので、最小の正規体系 K に

スキーマ $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n$ を公理型として追加して得られる事が分かる。文の列 $p_1, \dots, p_m (= p)$ は体系 $KS_1 \dots S_n$ における p の形式的証明である。例えば、体系 $S5 (= KT5)$ は

$$KT5 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{ \Sigma : \text{正規} \mid \mathbf{T} \cup \mathbf{5} \subseteq \Sigma \}$$

によって定義され、最小の正規体系 K にスキーマ $\mathbf{T}$ と $\mathbf{5}$ を公理型として追加して得られる事が分る。

体系 K に五つのスキーマ $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{4}, \mathbf{5}$ から任意個を選んで追加すると、表 2 にある十五の異なる体系を得る。ここで、異なる組合せのスキーマを追加しても体系、すなわち、定理の集合として一致する場合があるので、五つのスキーマから選び得る数 ($2^5 = 32$) だけの体系はない。例えば、スキーマ $\mathbf{4}$ は $KT5$ の定理型なので、 $KT5 = KT45$ である。

5 ラフ集合と正規体系

可能世界と必然性に関する Leibniz のアイディアを素直に形式化したのが、論理実証主義を標榜するウィーン学団の中心人物の一人 R. Carnap[2] である。彼自身、可能世界という概念自体は Leibniz や L. Wittgenstein に負う、と述べている。Carnap のモデルは構造 $\langle U, V \rangle$ であり、到達可能関係が導入されておらず、必然性を定義するのに、 U に属するすべての可能世界を利用した。これは結果的に同値関係の特殊な場合である全体関係 (universal relation) を導入したと見る事もできる。Carnap は任意のこの種のモデルで妥当な文全体が様相論理の体系 $S5 (= KT5)$ で導かれる定理の全体と一致する事 (すなわち、健全性と完全性) を証明した。これが史上初めて、可能世界と様相論理の体系を関連付けた研究と考えられている。なお、Carnap は論理的厳密性を求めるが故、可能世界の代わりに状態記述という概念を導入したが、本稿では立ち入らない。

その後、A. N. Prior[11] による時間に関する順序関係を導入した時間様相論理のモデルなどを経て、S. Kanger や J. Hintikka, S. Kripke によって互いに独立に、今日、Kripke モデルと呼んでいる構造に辿り着

表2 正規体系とスキーマ, Kripke フレームの関係

	伝統的名称	スキーマ(●:公理型として追加する, ○:公理型と推論規則から導かれる.)							Lemmon コード
		Df ◇	K	D	T	B	4	5	
1	K	●	●						K
2	D	●	●	●					KD
3	T	●	●	○	●				KT
4		●	●			●			KB
5		●	●				●		$K4$
6		●	●					●	$K5$
7		●	●	●		●			KDB
8		●	●	●			●		$KD4$
9		●	●	●				●	$KD5$
10		●	●				●	●	$K45$
11		●	●	●			●	●	$KD45$
12		●	●			●	●	○	$KB4$
		●	●			●	○	●	$KB5(=KB4)$
13	B	●	●	○	●	●			KTB
14	S4	●	●	○	●		●		$KT4$
15	S5	●	●	○	●	○	○	●	$KT5$
		●	●	○	●	●	●	○	$KTB4(=KT5)$
		●	●	●	○	●	●	○	$KDB4(=KT5)$
		●	●	●	○	●	○	●	$KDB5(=KT5)$
	伝統的名称	(条件なし)	(条件なし)	連鎖的	反射的	対称的	推移的	Euclid 的	Lemmon コード
	Kripke フレームの性質(○の性質は●の性質から導かれる)								

く(cf.[1]). Kripke らの偉大な発見は到達できる可能世界を二項関係を使って制限し, 世界間の見え方を決定する関係の性質に対して, 表3および表4に示す様相論理の公理型との対応を示した点である. 本表では更に対応する一般化上・下近似の性質も併せて示した. 表3から, 例えば, 任意の Euclid 的な Kripke フレームでスキーマ5が妥当である. すなわち, Euclid 的な Kripke フレーム全体から成るクラスを C_{FEuc} に対し

$$C_{FEuc} \models 5 (= \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p)$$

が成り立つ. これらの対応に基づいて, Kripke フレームによる正規体系の特徴付け, すなわち, 健全性と完全性が表2から読み取れる.

様相論理の体系 Σ が Kripke フレームのあるクラス C_F に関して健全である(sound)とは, Σ の定理がすべて C_F で妥当な時である:

$$\forall p \in L_{ML}(P), \vdash_{\Sigma} p \Rightarrow C_F \models p.$$

換言すれば, $\Sigma_{C_F} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in L_{ML}(P) \mid C_F \models p\}$ で文集合 Σ_{C_F} を定義する時, $\Sigma \subseteq \Sigma_{C_F}$ が成り立つ事である. 文集合 Σ_{C_F} が正規である事は容易に示せるので, K の最小性から $K \subseteq \Sigma_{C_F}$ が成立し, K は Kripke フレームの任意のクラスに関して健全である.

更に, スキーマ $S_1, \dots, S_n$ がそれぞれ Kripke フレームのクラス $C_{F_1}, \dots, C_{F_n}$ において妥当であるならば

$$\vdash_{KS \dots S_n} p \Rightarrow C_{F_1} \cap \dots \cap C_{F_n} \models p$$

が成り立つ. この結果と表3および表4に示す対応を利用すれば, 表2から健全性に関する諸結果を読み取る事ができる. 例えば, 体系 $S5(=KT5)$ は反射的かつ Euclid 的な Kripke フレームに関して健全である. 反射的かつ Euclid 的な二項関係が同値関係である事は容易に示せるので, 体系 $S5(=KT5)$ は同値関係を持つ Kripke フレームのクラス, すなわち, Pawlak 近似空間のクラスに関して健全である.

一方, 様相論理の体系 Σ が Kripke フレームのあるクラス C_F に関して完全である(complete)とは, C_F で妥当な文がすべて Σ の定理となる時である:

$$\forall p \in L_{ML}(P), C_F \models p \Rightarrow \vdash_{\Sigma} p.$$

換言すれば, $\Sigma_{C_F} \subseteq \Sigma$ が成り立つ事である.

完全性の証明は一般に容易ではないが, L. Henkin のアイディアによる, 文の極大無矛盾集合族から構成する正準モデル(canonical model)に基づく方法が比較的簡明である. 詳細は様相論理の教科書[3, 4, 5]を参照していただくしかないが, 文献[8]でその要点を紹介させていただいた. 結局, 説明は省かせていただいたが, 表2は完全性に関する結果でもある.

したがって, 表2から, ある性質を持つ Kripke フレームのクラスが, 健全性と完全性が成り立つという意

表3 様相論理の公理型と到達可能関係, 一般化上・下近似の性質(1)

Df $\Diamond = \Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$	(条件なし)	$\overline{R}(X) = \underline{R}(X^c)^c$
M $= \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	(条件なし)	$\underline{R}(X \cap Y) \subseteq \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$
C $= (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	(条件なし)	$\underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y) \subseteq \underline{R}(X \cap Y)$
N $= \Box \top$	(条件なし)	$\underline{R}(U) = U$
K $= \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	(条件なし)	$\underline{R}(X^c \cup Y) \subseteq (\underline{R}(X)^c \cup \underline{R}(Y))$
D $= \Box p \rightarrow \Diamond p$	連鎖的	$\underline{R}(X) \subseteq \overline{R}(X)$
P $= \neg \Box \perp$	連鎖的	$\underline{R}(\emptyset) = \emptyset$
T $= \Box p \rightarrow p$	反射的	$\underline{R}(X) \subseteq X$
B $= p \rightarrow \Box \Diamond p$	対称的	$X \subseteq \underline{R}(\overline{R}(X))$
4 $= \Box p \rightarrow \Box \Box p$	推移的	$\underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(\underline{R}(X))$
5 $= \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$	Euclid 的	$\overline{R}(X) \subseteq \underline{R}(\overline{R}(X))$

表4 様相論理の公理型と到達可能関係, 一般化上・下近似の性質(2)

Df $\Box = \Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$	(条件なし)	$\underline{R}(X) = \overline{R}(X^c)^c$
M $= \Diamond(\Diamond p \vee \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \vee q)$	(条件なし)	$\overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y) \subseteq \overline{R}(X \cup Y)$
C $= \Diamond(\Diamond p \vee \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \vee \Diamond q)$	(条件なし)	$\overline{R}(X \cup Y) \subseteq \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$
N $= \neg \Diamond \perp$	(条件なし)	$\overline{R}(\emptyset) = \emptyset$
K $= (\neg \Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(\neg p \wedge q)$	(条件なし)	$\overline{R}(X)^c \cap \overline{R}(Y) \subseteq \overline{R}(X^c \cap Y)$
D $= \Box p \rightarrow \Diamond p$	連鎖的	$\underline{R}(X) \subseteq \overline{R}(X)$
P $= \Diamond \top$	連鎖的	$\overline{R}(U) = U$
T $= \Diamond p \rightarrow \Diamond p$	反射的	$X \subseteq \overline{R}(X)$
B $= \Diamond \Box p \rightarrow p$	対称的	$\overline{R}(\underline{R}(X)) \subseteq X$
4 $= \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$	推移的	$\overline{R}(\overline{R}(X)) \subseteq \overline{R}(X)$
5 $= \Diamond \Box p \rightarrow \Box p$	Euclid 的	$\overline{R}(\underline{R}(X)) \subseteq \underline{R}(X)$

味で, どの様相論理の体系を特徴付けるか, が分る. 例えば, 反射的かつ Euclid 的な Kripke フレームが特徴付けるのは体系 S5(=KT5)である. すなわち, Pawlak 近似空間のクラスは体系 S5を特徴付けるのである. 一般化近似空間のクラスに関しては, 少なくとも表2で読み取れるクラスに関して, 特徴付ける体系が分る.

なお, 一つの様相論理の体系を健全かつ完全な意味で特徴付けるフレームないし近似空間のクラスは必ずしも一意的に定まる訳ではない. 全体関係を持つ近似空間をあえて, Carnap 近似空間と呼ばば, 体系 S5は Carnap 近似空間のクラスが特徴付けると同時に, それを真に包含する Pawlak 近似空間のクラスまで拡張しても, やはり体系 S5を特徴付けるのである.

6 Kripke フレームの拡張

Kripke モデルでは, 既に述べたように

$$V(\Box p, x) = 1 \Leftrightarrow U_R(x) \subseteq \|p\|^M$$

が成り立つ. そこで, x から到達可能な世界 $U_R(x)$ を含む集合を集めた集合族を値とする関数

$$\begin{aligned} N_R : U &\rightarrow 2^{2^U} \\ x &\mapsto \{X \subseteq 2^U \mid U_R(x) \subseteq X\} \end{aligned}$$

を導入する. その結果, ある文 p が必然である事は, その真理集合 $\|p\|^M$ が集合族 $N_R(x)$ のメンバーであればよい事になる. そこで, 必然演算子を適用した文の真理条件は, 関数 N_R を使って,

$$V(\Box p, x) = 1 \Leftrightarrow \|p\|^M \in N_R(x)$$

と書き換える事ができる. 従って, Kripke モデルは次の等価な再表現を得る:

$$\langle U, N_R, V \rangle.$$

さて, Kripke モデルから導いた関数 N_R が次の性質を持つ事は容易に示せる: 任意の世界 $x \in U$ に対して,

- [m] $(X \in N_R(x) \text{ and } X \subseteq X') \Rightarrow X' \in N_R(x),$
- [c] $X, X' \in N_R(x) \Rightarrow X \cap X' \in N_R(x),$
- [n] $U \in N_R(x),$
- [a] $\bigcap N_R(x) (= \bigcap_{X \in N_R(x)} X) \in N_R(x).$

条件[a]から

$$U_R(x) = \bigcap N_R(x)$$

が分る. また, 最初の三条件は, 実は任意の Kripke モデルで妥当な以下のスキーマに対応する:

- M. $\Box(p \wedge p') \rightarrow (\Box p \wedge \Box p')$,
 C. $(\Box p \wedge \Box p') \rightarrow \Box(p \wedge p')$,
 N. $\Box \top$,

逆に言えば、これらのスキーマは Kripke モデルでは識別できないともいえる。よって、関数 N_R から前記条件を外し、単なる関数とすれば、これらの文はもはや妥当ではなくなる。そこで、一般化した構造

$$\langle U, N, V \rangle$$

が様相論理の **Scott-Montague モデル** であり、 N は一般に特に条件を付さない単なる関数である：

$$N : U \rightarrow 2^{2^U}.$$

様相演算子を適用した文の真理条件は関数 N を使って、

$$V(\Box p, x) = 1 \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \|p\|^M \in N(x)$$

$$V(\Diamond p, x) = 1 \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} (\|p\|^M)^c \notin N(x)$$

と定義される。なお、可能な文の真理条件は双対性に基づく。 $N(x)$ の要素をあえて近傍と呼べば、文 p が世界 x で必然であるのは、 p の真理集合 $\|p\|^M$ が世界 x の近傍になる時である。もちろん、関数 N が位相空間における(全)近傍系になるためにはいくつか条件が必要であり、後述する。

Scott-Montague モデルから付値 V を除いた構造

$$F = \langle U, R \rangle$$

を **Scott-Montague フレーム** という。逆に、Scott-Montague フレーム $F = \langle U, R \rangle$ に付値関数 V を加えた構造 $\langle U, R, V \rangle$ を F 上の Scott-Montague モデルという。文 p の Scott-Montague モデルや Scott-Montague フレーム、Scott-Montague フレームのクラスにおける妥当性はそれぞれ、Kripke モデルや Kripke フレーム、Kripke フレームのクラスにおける妥当性と同等に定義できる。

必然性と可能性がそれぞれ、下・上近似に対応すると考えれば、Scott-Montague フレームにおいて拡張された近似を次のように定義できる：

近似の定義 3 (Scott-Montague フレーム)

$$\underline{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in U \mid X \in N(x)\},$$

$$\overline{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in U \mid X^c \notin N(x)\}.$$

これは定義 2 の拡張となっている。

様相論理の体系 Σ が

$$\text{Df} \Diamond \subseteq \Sigma$$

$$\text{RE. } p \leftrightarrow p' \in \Sigma \Rightarrow \Box p \leftrightarrow \Box p' \in \Sigma$$

を満たす時、**古典体系** (classical system) という。すべての古典体系の共通部分を E とする：

$$E \stackrel{\text{df}}{=} \bigcap \{\Sigma \mid \Sigma : \text{古典的}\}.$$

この E は最小の古典体系であり、すべての Scott-Montague フレームから成るクラスが特徴付ける。更に、スキーマ $S_1, \dots, S_n$ が与えられた時、

$$ES_1 \dots S_n \stackrel{\text{df}}{=} \bigcap \{\Sigma : \text{古典的} \mid S_1 \cup \dots \cup S_n \subseteq \Sigma\}$$

で定義される文集合 $ES_1 \dots S_n$ はスキーマ $S_1, \dots, S_n$ を包含する最小の古典体系である。

上に挙げた条件 [m] と [c], [n] を満たす Scott-Montague フレームを単に [m, c, n]-フレームと呼ぶことにする(以下、他の条件の場合も同様とする)。[m, c, n]-フレームのクラスは体系 $EMCN$ を特徴付ける事が証明されている。この体系 $EMCN$ は実は、定理の集合として最小の正規体系 K と一致する：

$$EMCN = K.$$

よって、[m, c, n]-フレームのクラスは事実上、最小の正規体系 K を特徴付ける。更に、条件 [a] を加えた [m, c, n, a]-フレームのクラスでは、

$$xR_N y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} y \in \bigcap N(x)$$

によって到達可能関係 R_N を定義できる。逆に、到達可能関係 R から定義した関数 N_R が四条件 [m], [c], [n], [a] を満たす事は既に見たので、[m, c, n, a]-フレームのクラスはすべての Kripke フレームのクラスと等価である。最小の正規体系 K はすべての Kripke フレームからなるクラス、よって、[m, c, n, a]-フレームのクラスが特徴付けるが、条件 [a] を外して拡張した [m, c, n]-フレームのクラスもやはり体系 K を特徴付けるのである。

7 近傍系と近似

Scott-Montague フレーム $F = \langle U, N \rangle$ の関数 N が(全)近傍系になる条件は位相空間の教科書にある近傍系の公理そのものであり、具体的には前出の三条件 [m], [c], [n] (ただし、 N_R を N に読み替える)に加え

$$[t] \quad X \in N(x) \Rightarrow x \in X$$

$$[4'] \quad X \in N(x) \Rightarrow \exists Y \in N(x) [Y \in X \text{ and } \forall y \in Y (X \in N(y))]$$

である。すなわち、[m, c, n, t, 4']-フレームは N を(全)

近傍系とする位相空間である。条件 [4'] は条件 [m] の下で、次の条件

$$[4] \quad X \in N(x) \Rightarrow \{y | X \in N(y)\} \in N(x)$$

と同値である。すなわち、[m, c, n, t, 4]-フレームのクラスは N を(全)近傍系とする位相空間のクラスと一致する。

条件 [t] と [4] は Scott-Montague フレームにおいて、それぞれスキーマ $\mathbf{T} (= \Box p \rightarrow p)$ と $\mathbf{4} (= \Box p \rightarrow \Box \Box p)$ に対応する。よって、[m, c, n, t, 4]-フレームのクラスは古典体系 $EMCNT4$ を特徴付けるが、これは正規体系 $S4 (= KT4)$ と等しい：

$$EMCNT4 = KT4.$$

すなわち、位相空間のクラスが体系 $S4$ を特徴付けることが分る。体系 $S4$ が位相を表現するという事実は1940年代から指摘、研究されている (cf. [1])。なお、[m, c, n, t, 4]-フレームが更に条件 [a] を満たすとき、到達可能関係 R_N は反射的かつ推移的である。反射的かつ推移的な Kripke フレームのクラスに制限しても、やはり体系 $S4$ を特徴付ける。

Lin [6] が彼の granular 計算の理論で利用した近傍系は関数

$$N^* : U \rightarrow 2^{2^U}$$

である。 $N^*(x)$ に属する任意の部分集合 X を x の基本近傍 (fundamental neighbor) といい、その他の近傍は基本近傍から生成される。よって、Lin の近傍系は、通常の位相空間の**基本近傍系** (fundamental neighborhood system) からその条件を外したものである。

一般に、通常の位相空間の基本近傍系 N^* が与えられた時、

$$N(x) \stackrel{\text{df}}{=} \{X \subseteq U | \exists Y [Y \in N^*(x) \text{ and } Y \subseteq X]\}$$

で定義する N は通常の(全)近傍系になる。しかし、Scott-Montague フレームの関数 N は一般に、単調性の条件 [m] さえ満たしていないので、この式で Lin の近傍系から Scott-Montague フレームの関数 N を定義する事自体、あまり意味がない。Lin の近傍系 N^* は基本近傍系に相当するものとして設定されたとはいえ、そもそも、Scott-Montague フレームの N は関数という条件しかないのだから、 $\langle U, N^* \rangle$ 自体 Scott-Montague フレームである。

Lin [6] は基本近傍系の条件を外した近傍系から出発するが、位相空間の概念はそのまま利用する。なお、以下では、Scott-Montague フレーム $\langle U, N \rangle$ で話を進める。 U の部分集合 X の元 x が X の**内点**であるの

は、 $N(x) \subseteq X$ となる x の近傍 $N(x)$ が取れる時である。 X の内点の集合が X の**開核** (interior, open kernel) であり、これを Lin は X の下近似とした。双対的に定義される X の**閉包** (closure) が上近似である。

近似の定義 4 (近傍系)

$$\underline{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in U | \exists Y \in N(x) (Y \subseteq X)\},$$

$$\overline{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in U | \forall Y \in N(x) (Y \cap X \neq \emptyset)\}.$$

これは少なくとも位相空間となる Scott-Montague フレームでは定義 3 と一致するが、一般の Scott-Montague フレームでは必ずしも一致しない。定義 2 の拡張ではある。

U の部分集合 X が U の**開集合** (open set)、**閉集合** (closed set) であるのは、それぞれ、

$$\underline{R}(X) = X, \quad \overline{R}(X) = X$$

が成り立つ時である。

Lin [6] がその理論で実際に多用するのは二項関係に基づく granular 計算であり、 x の近傍系 $N^*(x)$ が一元集合の時である。Lin はこのような関数 N^* を U の**二項近傍系** (binary neighborhood system) と呼んだ。この関数 N^* が与えられた時、 U 上の関係 R_{N^*} を

$$x R_{N^*} y \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} y \in X \quad (\text{ただし, } N^*(x) = \{X\})$$

によって定義する事ができる。よって、二項近傍系 N^* に対して、 $\langle U, N^* \rangle$ は一般化近似空間と等価である。二項近傍系から得られる集合族 $\{N^*(x) | x \in U\}$ が U の被覆 (cover) であるなら、関係 R_{N^*} は連鎖的である。また、 $\{N^*(x) | x \in U\}$ が分割であるなら、関係 R_{N^*} は同値関係であり、 $\langle U, R_{N^*} \rangle$ は Pawlak 近似空間である。Pawlak 近似空間はすべての開集合が閉集合であり、逆もまた成り立つ、特殊な位相空間である。

8 あとがき

無用な誤解が招かないようお断りするが、もちろん、ラフ集合に基づいて展開されるラフ理論は、様相論理の意味論の単なる片割れではない。Pawlak が中心となって展開したラフ理論は類別 (分割) と近似に基づく知識に関する数学的理論とその応用から構成される。ラフ理論では、様相論理には存在しない数多くの興味深い概念が提唱されており、それらがラフ理論の独自性を形作るのである。

最後になったが、なかなか筆が進まない中、脱稿に至ったのは、ひとえに編者である乾口雅弘先生 (阪大) の並外れた寛容さに甘えさせていただいた結果である。

ここに心からお詫び申し上げるとともに、深く謝意を表したい。本研究の一部は日本学術振興会科学研究費萌芽的研究(No.12878054)の援助を得て行った。

文 献

- [1] R. A. Bull and K. Segerberg, Basic Modal Logic. In D. Gabbay and F. Guentner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol.2, D. Reidel, 1984, pp. 1-88.
- [2] R. Carnap, *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*. The University of Chicago Press, 1947.
- [3] B. F. Chellas, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press, 1980.
- [4] G. E. Hughes and M. J. Cresswell, *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, 1968.
- [5] R. Goldbratt, *Logics of Time and Computation*, CSLI, 1987.
- [6] T. Y. Lin, Granular Computing on Binary Relation I: Data Mining and Neighborhood Systems, II: Rough Set Representations and Belief Functions. In L. Polkowski and A. Skowron (eds.), *Rough Sets in Knowledge Discovery 1: Methodology and Applications*. Physica-Verlag, 1998, pp. 107-121, 122-140.
- [7] 中村昭, ラフ集合-その理論と応用. 日本ファジィ学会誌, Vol.8, No.4 (1996), pp.594-603.
- [8] 村井哲也, 深海悟, 様相論理(1), (2). 日本ファジィ学会誌, Vol.7, No.1.2 (1995), pp.3-18, 222-238.
- [9] Z. Pawlak, Rough Sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, Vol. 11 (1982), pp.341-356.
- [10] Z. Pawlak, *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Kluwer, 1991.
- [11] A. N. Prior, *Time and Modality*. Oxford University Press, 1957.
- [12] Y. Y. Yao, S. K. M. Wang, and T. Y. Lin, A Review of Rough Set Models. In T. Y. Lin and N. Cercone (eds.), *Rough Sets and Data Mining*. Kluwer, 1997, pp.47-75.
- [13] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets and Information Granularity. In M. M. Gupta, R. K. Ragade, and R. Yager (eds.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, North-Holland, 1979, pp.3-18.
(2001年10月30日 受付)

[問合せ先]

〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目
北海道大学大学院工学研究科
システム情報工学専攻数理情報工学講座
村井 哲也
Phone & Fax : 011-706-6757
E-mail : murahiko@main.eng.hokudai.ac.jp

著 者 紹 介

むらい てつや
村井哲也

北海道大学大学院工学研究科システム情報工学専攻数理情報工学講座

1983年 北海道大学理学部数学科卒。
1985年 同大学大学院工学研究科修士課程修了。1987年 同博士後期課程を中退し、札幌医科大学衛生短期大学部専任講師、北海道教育大学助教授を経て、1995年 北海道大学助教授、現在に至る。博士(工学)。様相論理、ラフ集合、証拠と信念、情報検索、データベースなどに興味を持つ。SOFT, IFSA, ASIS&T, IEEE, ACM, AAAI 他各会員。