積演算に関して閉じている ファジィ数の族と区分的多項式タイプの ファジィ数[†]

古川 長太*

本論文で扱うファジィ数間の積演算は、sup-min 型の拡張原理に基づくものである。またファジィ数の定義は、正規性およびサポートの有界性の他に、メンバシップ関数が狭義単調かつ連続であるものとして与えられる。ただし正または負のファジィ数に限定せず、サポートが正負にまたがるものも議論の対象とする。はじめに、ファジィ数の全体から成る族が積演算に関して閉じていることが証明される。次に多項式タイプおよび区分的多項式タイプのファジィ数が定義され、これらの族が積に関する閉性をもつ部分族であることが示される。次いで、積に関する閉性をもつ本論文で最も小さい部分族として、三角型ファジィ数から生成される多項式および区分的多項式タイプの族が提示される。この最後に提示された族に対しては、正または負のファジィ数の場合は、任意の次数の区分的多項式タイプのものに対して乗算の計算公式が与えられ、サポートが正負にまたがるファジィ数の場合は、特に三角型に対して計算公式が与えられる。

キーワード：連続・狭義単調メンバシップ関数，零ファジィ数，多項式タイプファジィ数，区分的多項式タイプファジィ数，乗算公式

1. はじめに

ファジィ数間の演算の理論は、Zadeh によって提唱された拡張原理[10]に端を発し、当初しばらくの間はその原型ともいえるべき sup-min 合成法に基づくファジィ数演算の研究が多くの人達によってなされてきた。その代表的なものとして、参考文献の[1], [2], [6], [7], [8], [9]が挙げられる。その研究過程において、ファジィ数間の乗算なるものが幾つかの難点を有していることは早くから指摘されていた。その一つは純粋に代数的見地から、乗法に関する分配法則が成り立たないことであり、他の一つは実用面から考えて、三角型ファジィ数同士の積が三角型にならない等の実計算の困難さに関するものである。

上述の前者の問題を、実数とファジィ数との乗算の場合に限定しても、同じく分配法則が成り立たない。このことはファジィ数の全体からなる集合が、通常の関数空間とは異なり、線形空間をなさないことを意味している。これにより、ファジィ値写像に関する研究等においては種々困難を生じているが、ここではその

問題は論じないことにする。後者の問題に関しては、コンピュータ・シミュレーションの他に、三角型ファジィ数同士の積を適当な三角型ファジィ数で近似する方法が考えられている([11])。しかし積演算の計算結果を厳密にかつ体系的に導びくための研究はまだ少ないようである。本論文では特に後者の問題を取りあげて論じることとする。sup-min 合成法に続く演算法として、t-ノルム、t-コノルムに基づくファジィ演算の研究があり、これらについては[16], [17]にその由来からファジィ理論への応用に至るまで、詳しく述べられている。sup-(t-ノルム)合成法の場合の実際の演算結果に関しては[13], [14]の研究があり、メンバシップ関数の離散化により、いろいろな例について四則演算の結果がコンピュータ・シミュレーションにより与えられている。

本論文で扱うファジィ数間の積演算は、sup-min 合成法に基づくものである。またファジィ数は正または負のものに限定せず、サポートが正と負にまたがるもの(以下**零ファジィ数**とよぶ、[12]参照)も扱っている。2節でメンバシップ関数の狭義単調性と連続性をもつファジィ数の全体からなる族が、積演算に関して閉じていることを証明する。この節はあくまで3節以降の準備のためのものなので必要最小限にとどめ、それ以上広いファジィ数の族について論じることとはしない。

3節で多項式タイプおよび区分的多項式タイプのファジィ数を定義し、これらの族がまた積の演算に関し

[†] Some Families of Fuzzy Numbers Closed Under the Operation of Multiplication, and Fuzzy Numbers of Piecewise-Polynomial Type.

Nagata FURUKAWA

* 創価大学工学部情報システム学科

Faculty of Engineering, Soka University

て閉じていることを示す。4節で、3節のファジイ数をやや具体化した三角型ファジイ数から生成される多項式および区分的多項式タイプのファジイ数が定義され、それらの間の積演算に関する厳密な計算式が与えられる。正または負のファジイ数間の積の場合は、任意の次数の区分的多項式タイプのものに対して計算式が与えられ、零ファジイ数の場合の積演算の計算式は、特に三角型同士に対して与えられている。4節の終わりに、ここで得られた計算公式の簡単な応用として、ファジイ数の階乗の計算式が与えられている。

2. 積演算に関して閉じているファジイ数の族

ファジイ数の定義については、人によりまたそのときのテーマにより何通りかのものが考えられているが、本論文でいうファジイ数は次のようなものである。ただし $\text{supp}(A)$ はファジイ集合 A のサポートを表すもの

図1 ファジイ数のメンバシップ関数

図2 上限関数・下限関数

とする。

定義2.1 数直線上のファジイ集合 A のメンバシップ関数 $\mu_A(x)$ が次の (i) ~ (iv) をみたすとき、 A を **ファジイ数** という。

- (i) $\mu_A(m)=1$ をみたす実数 m (これを A の **センター** という) がただ一つ存在する。
 - (ii) $\text{supp}(A)$ は $\mathbf{R}$ における有界集合である。
 - (iii) $\mu_A(x)$ は $\text{supp}(A) \cap (-\infty, m]$ 上で狭義単調増加であり、 $\text{supp}(A) \cap [m, \infty)$ 上で狭義単調減少である。
 - (iv) $\mu_A(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で連続である。
- ファジイ数の全体からなる集合を $\mathcal{H}$ で表す。

[3], [15] その他の文献では、メンバシップ関数が広義単調で上半連続なものをファジイ数と定義している場合が多く見受けられる。それらに比べると、上の定義によるファジイ数は若干制限されたものになるが、本論文は3節以降に主な目的があるので、直接その目的に叶うように設定した。(i)のセンターの一意性は本質的なものではなく、記述の煩雑さをなるべく避けるために設定した。応用上よく使われる三角型ファジイ数やサポート有界なベル型ファジイ数は、いずれも上のすべての条件をみたしている。また(iii)により実数は $\mathcal{H}$ には含まれないことになる。これにより本論文では、ファジイ数のスカラー倍が扱われないことになるが、これは自明な演算なので除外しても問題にはならない。

$\mathcal{H}$ の要素のうち正のファジイ数(サポートが区間 $[0, \infty)$ に含まれるもの)の全体を $\mathcal{H}_+$ で表し、負のファジイ数(サポートが $(-\infty, 0]$ に含まれるもの)の全体を $\mathcal{H}_-$ で表す。1節で述べた零ファジイ数の全体を $\mathcal{H}_0$ で表す。

ファジイ数 A の α -カットを通常の通りに定義する。すなわち、 $0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$A_\alpha = \{x \in \mathbf{R} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\},$$

$\alpha=0$ に対して

$$A_0 = \text{cl} \left[\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A_\alpha \right]$$

で定義する。ここに cl は閉包を表す。

A を任意のファジイ数、 μ_A をそのメンバシップ関数とすると、定義2.1の(iii)により任意の $t \in [0, 1]$ に対して $t = \mu_A(x)$ をみたす x が $\text{supp}(A) \cap (-\infty, m]$ 上に一意に存在する。各 $t \in [0, 1]$ に対してこのような x を対応させる関数を $i_A(t)$ とおく。すなわち $i_A(t)$ は μ_A を $\text{supp}(A) \cap (-\infty, m]$ 上に制限した関数の逆関数である。 i_A

(t) を A の下関数とよぶ。同様にして, μ_A を $\text{supp}(A) \cap [m, \infty)$ 上に制限した関数の逆関数を $s_A(t)$ で表し, これを A の上関数とよぶ(図2)。これらの関数の名称と記号は文献[15]にならって導入した。ただし[15](p.136)で述べられている定義によると, メンバシップ関数は広義単調で上半連続となるので, 関数 $i_A(t)$, $s_A(t)$ はそれぞれ A の α -カットの左端点, 右端点で定義されている。本論文ではメンバシップ関数は狭義単調で連続なので, どちらで定義しても同じである。

図2の横軸はメンバシップ関数の元のグラフでいえば, α -カットの α 軸に相当するものであるが, これからの便宜のために図2の横軸は α 軸とはせずに, t 軸とよぶことにする。

明らかに

$$i_A(l) = s_A(l) = m \quad (2.1)$$

が成立する。

下関数, 上関数の記号を使うと, 定義2.1の(ii), (iv)はまとめて次のように書きかえられる。

(a) $i_A(t)$, $s_A(t)$ は $[0, 1]$ 上で定義されて, かつ $[0, 1]$ 上で連続である。

同様に(iii)は次のように書きかえられる。

(b) $i_A(t)$ は $[0, 1]$ 上で狭義単調増加であり, $s_A(t)$ は $[0, 1]$ 上で狭義単調減少である。

(2.1)式の左側の等号条件をあらためて(c)とおく。すなわち

$$(c) \quad i_A(l) = s_A(l)$$

とする。ファジイ数の定義においてセンターの値を明記することを省略すれば, 以上の書きかえにより定義2.1は(a), (b), (c)の3つの条件が成り立つことと同値であることが分かる。

以下では, sup-min 型の拡張原理によるファジイ数の積演算を $\otimes$ で表す。次の定理によって, ファジイ数の族 $\mathcal{H}$ が積演算に関して閉じていることが示される。

定理2.1 任意の2つのファジイ数 $A, B \in \mathcal{H}$ に対し

$$A \otimes B \in \mathcal{H}$$

が成立する。

証明 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x, y) = x \times y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad (2.2)$$

で定義する。 $\mathbf{R}$ 上の2つの有限区間 I, J に対して直積集合 $I \times J$ の f による像を $f(I, J)$ で表す。すなわち

$$f(I, J) = \{z = x \times y \mid x \in I, y \in J\}. \quad (2.3)$$

拡張原理による f のファジイ化を $\tilde{f}$ で表すことにす

る。 f は明らかに x, y について連続であり, また定義2.1によりメンバシップ関数が連続かつ単調であることから, Nguyen の定理([8]の Proposition 5.1)の仮定がすべてみたされる。よって同命題により

$$[\tilde{f}(A, B)]_\alpha = f(A_\alpha, B_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad (2.4)$$

が成り立つ。ここに A_α, B_α はそれぞれ A, B の α -カットであり, 上式左辺は $\tilde{f}(A, B)$ の α -カットである。

(2.3), (2.4)から各 $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$[A \otimes B]_\alpha = \{xy \mid x \in A_\alpha, y \in B_\alpha\} \quad (2.5)$$

が導かれる。

α -カットの単調性より, 任意の $0 \leq \alpha \leq \alpha' \leq 1$ に対して

$$[A \otimes B]_{\alpha'} \subseteq [A \otimes B]_\alpha \quad (2.6)$$

が成り立つことは明らか。各 α に対して $[A \otimes B]_\alpha$ が単一の有限閉区間になることの証明は, [18]の p.164に f が一般の連続関数の場合に証明されているので, ここでは省略する。

次に[15]の記述にならって, α -カット $[A \otimes B]_\alpha$ の左端点の値を $i_{A \otimes B}(\alpha)$, 右端点の値を $s_{A \otimes B}(\alpha)$ で表し, 次にこの α をあらためて t と書く。 $s_{A \otimes B}(t)$, $i_{A \otimes B}(t)$ はそれぞれ次の式で表される。

$$s_{A \otimes B}(t) = \text{Max}\{s_A(t) s_B(t), s_A(t) i_B(t), i_A(t) s_B(t), i_A(t) i_B(t)\}, \quad (2.7)$$

$$i_{A \otimes B}(t) = \text{Min}\{s_A(t) s_B(t), s_A(t) i_B(t), i_A(t) s_B(t), i_A(t) i_B(t)\}. \quad (2.8)$$

特に A_0, B_0 が共に正ならば, すべての $t \in [0, 1]$ に対し

$$\begin{cases} s_{A \otimes B}(t) = s_A(t) s_B(t), \\ i_{A \otimes B}(t) = i_A(t) i_B(t), \end{cases} \quad (2.9)$$

と表される。

A, B の上関数, 下関数はすべて連続なので, (2.7), (2.8)より $s_{A \otimes B}(t)$, $i_{A \otimes B}(t)$ は $[0, 1]$ 上で連続であることが分かる。また(2.6)は $s_{A \otimes B}(t)$ が $[0, 1]$ 上で単調減少, $i_{A \otimes B}(t)$ が $[0, 1]$ 上で単調増加であることを意味する。次にこれらの単調性が狭義であることを示そう。そこである t_0 ($0 \leq t_0 < 1$) と ε ($0 < \varepsilon \leq 1$) があって $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ 上で $s_{A \otimes B}(t)$ が一定であると仮定しよう。(2.7)により, t ごとに $s_{A \otimes B}(t)$ のとる値は

$$s_A(t) s_B(t), s_A(t) i_B(t), i_A(t) s_B(t), i_A(t) i_B(t), \quad (2.10)$$

の4つのうちのどれかしかないので, この仮定が成り

立つためには微小区間 $J \subset [t_0, t_0 + \varepsilon]$ が存在して, J 上で (2.10) の 4 つのうち少なくとも一つの値が一定でなければならない。仮に

$$s_{A \otimes B}(t) = s_A(t) s_B(t) = M, \forall t \in J \quad (2.11)$$

であるとする。これは (2.10) の 4 つの項のうち J 上で $s_A(t) s_B(t)$ が最大であることを意味する。そのためには $s_A(t)$ と $s_B(t)$ の値は J 上で共に正であるか共に負でなければならない。共に負であると, A, B の下限は共に負で絶対値は $s_A(t), s_B(t)$ の絶対値より大きくなって矛盾。よって $s_A(t), s_B(t)$ は J 上で共に正でなければならない。ところが, これらはいずれも狭義単調減少なので, とともに正の値をとりながら $s_A(t) s_B(t)$ が J 上で一定ということは起こり得ない。同様に

$$s_{A \otimes B}(t) = i_A(t) i_B(t) = M, \forall t \in J \quad (2.12)$$

も起こり得ない。次に

$$s_{A \otimes B}(t) = s_A(t) i_B(t) = M, \forall t \in J \quad (2.13)$$

を仮定する。これと (2.7) とを照合することにより, この場合 $s_A(t)$ が J 上で負, $i_B(t)$ が J 上で正に限られることが分かる。ところが $s_A(t)$ は狭義単調減少で $i_B(t)$ は狭義単調増加なので, この場合 $s_A(t) i_B(t)$ の絶対値は J 上で狭義単調増加となるから, (2.13) のように $s_A(t) i_B(t)$ が J 上で一定ということは起こり得ない。

同様に

$$s_{A \otimes B}(t) = i_A(t) s_B(t) = M, \forall t \in J \quad (2.14)$$

も起こり得ない。以上により $s_{A \otimes B}(t)$ が上で狭義単調減少であることが示された。 $i_{A \otimes B}(t)$ の狭義単調性も同様にして示される。

最後に

$$s_{A \otimes B}(1) = i_{A \otimes B}(1)$$

は, (2.7), (2.8) から

$$s_{A \otimes B}(1) = s_A(1) s_B(1) = i_A(1) i_B(1) = i_{A \otimes B}(1)$$

が導かれることにより示される。

以上により定理が証明された。 (証明終り)

ここで上記定理について少しばかり注意を述べておこう。ファジイ数同士の積がまたファジイ数になることの証明は, ファジイ数の族を正または負のファジイ数だけに制限すれば, さほどむづかしいことではない。上記定理は, ファジイ数の族を零ファジイ数にまで広げたところに意味がある。今までに零ファジイ数同士の積について論じたものとして, [6] の付録 B にその記

述がある。しかしながら同書ではファジイ数の定義が明確でなく, 同書で実際の計算に使われているファジイ数は一二の離散的なものを除いて, すべてメンバシップ関数が狭義単調で連続であるにもかかわらず, ファジイ数同士の積がファジイ数になることの証明は, 正規性と凸性(メンバシップ関数の広義単調性)の証明だけで終わっている。

さて上のように積演算に関して閉じているファジイ数の族を一つ示すことが出来たが, 上記定理はこれを使ってファジイ数同士の積の計算に役立てるという性質のものではない。そのためにはファジイ数の族 $\mathcal{H}$ は広すぎるので, ファジイ数の表現をある程度具体化し, 制限しなければならない。これについては次節以降で論じることにする。その際, 定理 2.1 は理論展開のための一つの基礎を与えるものとして必要になることを附記しておく。

3. 多項式タイプおよび区分的多項式タイプのファジイ数

前節のファジイ数の族 $\mathcal{H}$ に次いでこの節では, 積の演算に関して閉じているファジイ数の部分族として, 多項式タイプおよび区分的多項式タイプのファジイ数からなる族を提示しよう。

定義 3.1 $\mathcal{H}$ に属するファジイ数で, その上限関数と下限関数がそれぞれ区間 $[0, 1]$ 上で単一の多項式(式として変数の位置に依存しない)で表されるものを **多項式タイプのファジイ数** という。この場合, 上限関数を表す多項式と下限関数を表す多項式は異なってもよい。多項式タイプのファジイ数の全体からなる集合を $\mathcal{P}$ で表す。

定義 3.2 関数 $f(t)$ が区間 $[0, 1]$ 上の **区分的多項式** であるとは, $[0, 1]$ の有限分割

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1, \quad (n \geq 2)$$

と, n 個の多項式 $f_1, f_2, \dots, f_n$ (そのうち少なくとも二つは相異なる) が存在して, 各 i ($1 \leq i \leq n$) について $f(t)$ が

$$f(t) = f_i(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

と表され, かつ $f(t)$ がすべての分点 t_j ($j=1, 2, \dots, n-1$) において連続であることをいう。

定義 3.3 $\mathcal{H}$ に属するファジイ数でその上限関数, 下限関数のうち少なくとも一方が区間 $[0, 1]$ 上の区分的多項式であるものを, **区分的多項式タイプのファジイ数**

という。区分的多項式タイプのアジイ数の全体からなる集合を $\mathcal{P}^*$ で表す。

定理3.2 $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}^*$ は積の演算に関して閉じている。

証明 $A, B \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^*$ を任意にとる。 $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}^*$ は $\mathcal{H}$ の部分集合だから、定理2.1により $A \otimes B$ は $\mathcal{H}$ に属する。すなわち $A \otimes B$ のメンバシップ関数は連続性と狭義単調性をみたす。 $A \otimes B$ のメンバシップ関数が区分的多項式になることは明らか。(証明終り)

この定理により積の演算に関して閉じているアジイ数の部分族として、 $\mathcal{H}$ の他に $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}^*$ があることが分かった。 $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}^*$ は明らかに $\mathcal{H}$ の真部分族である。 $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}^*$ を $\mathcal{H}$ と比べると、その実体はやや具体的ではあるが、各種演算の計算のためにはまだ十分とは言えない。次節ではこの点を更に追究していこう。

4. 三角型アジイ数から生成される多項式および区分的多項式タイプのアジイ数

A を任意の三角型アジイ数とし、そのセンターを m 、サポートを $[a, b]$ とする。したがって $a < m < b$ が成り立つ。このような三角型アジイ数を簡単に記号で

$$A = (a, m, b) \quad (4.1)$$

と表す。

簡単な計算により、アジイ数(4.1)の下限関数、上限関数はそれぞれ次のように表されることが分かる。

$$\left. \begin{aligned} i_A(t) &= (m-a)t+a \\ s_A(t) &= (m-b)t+b \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.2)$$

定義4.1 p を任意の正整数とする。 $a_1, a_2, \dots, a_p, m_1, m_2, \dots, m_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ (ただし $a_i \neq m_i, b_i \neq m, i=1, 2, \dots, p$) を $3p$ 個の実数とする。このとき

$$i(t) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_p=0}^1 (m_1-a_1)^{i_1} a_1^{1-i_1} (m_2-a_2)^{i_2} a_2^{1-i_2} \times \cdots \times (m_p-a_p)^{i_p} a_p^{1-i_p} t^{i_1+i_2+\cdots+i_p}, \quad (4.3)$$

$$s(t) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_p=0}^1 (m_1-b_1)^{i_1} b_1^{1-i_1} (m_2-b_2)^{i_2} b_2^{1-i_2} \times \cdots \times (m_p-b_p)^{i_p} b_p^{1-i_p} t^{i_1+i_2+\cdots+i_p}, \quad (4.4)$$

を p 次多項式タイプのアジイ数の基本形と呼ぶ。アジイ数 A の下限関数と上限関数が、 t の値に関係しないひと組のパラメータ $\{a_1, a_2, \dots, a_p, m_1, m_2, \dots, m_p, b_1, b_2, \dots, b_p\}$ によって区間 $[0, 1]$ 上でそれぞれ(4.3),

(4.4) で表されるとき、 A を p 次多項式タイプ基本アジイ数とよび、このとき記号で

$$A = (p; a_1, a_2, \dots, a_p; m_1, m_2, \dots, m_p; b_1, b_2, \dots, b_p), \quad (4.5)$$

と書くことにする。またこのとき(4.3)の左辺をあらためて $i_A(t)$ で表し、(4.4)の左辺をあらためて $s_A(t)$ で表す。

p 次基本アジイ数はその定義式から、 p 個の正または負の三角型アジイ数の積によって作られたものであることが分かる。ちなみに(4.3), (4.4)の両式を $p=1, 2$ の場合にしらべてみると次のようになる。

$p=1$ のとき、

$$i_A(t) = \sum_{i_1=0}^1 (m_1-a_1)^{i_1} a_1^{1-i_1} t^{i_1} = (m_1-a_1)t + a_1,$$

$$s_A(t) = \sum_{i_1=0}^1 (m_1-b_1)^{i_1} b_1^{1-i_1} t^{i_1} = (m_1-b_1)t + b_1.$$

(4.1) と (4.2) により、上式は A が

$$A = (a_1, m_1, b_1)$$

の三角型アジイ数であることを示している。

$p=2$ のとき、

$$\begin{aligned} i_A(t) &= \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 (m_1-a_1)^{i_1} a_1^{1-i_1} (m_2-a_2)^{i_2} a_2^{1-i_2} t^{i_1+i_2} = \\ &= (m_1-a_1)(m_2-a_2)t^2 \\ &+ [(m_1-a_1)a_2 + (m_2-a_2)a_1]t + a_1a_2 \\ &= [(m_1-a_1)t + a_1][(m_2-a_2)t + a_2], \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_A(t) &= \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 (m_1-b_1)^{i_1} b_1^{1-i_1} (m_2-b_2)^{i_2} b_2^{1-i_2} t^{i_1+i_2} = \\ &= [(m_1-b_1)t + b_1][(m_2-b_2)t + b_2]. \quad (4.7) \end{aligned}$$

上式は A が正または負の2つの三角型アジイ数の積であることを示している。ただしこの場合、もともなる2つの三角型アジイ数は

$$A_1 = (a_1, m_1, b_1), \quad A_2 = (a_2, m_2, b_2)$$

であるとは限らない。例えば A_1 が正で A_2 が負のアジイ数である場合、 $A \otimes B$ の下限関数と上限関数がそれぞれ(4.6)と(4.7)になるためには

$$A_1 = (b_1, m_1, a_1), \quad A_2 = (a_2, m_2, b_2),$$

でなければならない。このことは一般の p の場合も同様である。

p 個の三角型アジイ数のうち一つでも $\mathcal{H}_0$ の要素が

標を θ_B とおくと、それらは(4.2)から

$$\begin{cases} t_A = \frac{a}{a-m}, \\ \theta_B = \frac{d}{d-n} \end{cases} \quad (4.10)$$

となる。 t_A, θ_B を(4.10)によって計算すると、 m, n, a, d の値によっては負になることがあるが、それは A の下関数や B の上関数が実際には $[0, 1]$ の範囲で t 軸と交わらないことを意味する。以下では A, B のうち少なくとも一方が $\mathcal{H}_0$ の要素である場合だけを扱うので、 t_A と θ_B が両方とも負になることはない。

$$\begin{cases} p = m(c-d) + n(a-b) + bd - ac, \\ q = m(c-d) + n(b-a) + ad - bc, \\ S = \frac{bd - ac}{p}, \\ T = \frac{ad - bc}{q} \end{cases} \quad (4.11)$$

とおく。

(4.8)の2つの三角型ファジイ数 A, B の積を(4.9)の設定の下で計算すると、仮定からいずれの場合にも積ファジイ数は(4.5)のように単一の式で表されることはなく、結果は次のようにまとめられる。

I. $ad < bc$ かつ $bd < ac$ の場合

I-1. $\theta_B < t_A$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } T < t \leq t_A, \\ (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

I-2. $t_A < \theta_B$ かつ $T < S$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } T < t \leq S, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq \theta_B, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } \theta_B < t \leq 1, \end{cases}$$

I-3. $t_A < \theta_B$ かつ $S < T$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq S, \\ (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq \theta_B, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } \theta_B < t \leq 1, \end{cases}$$

II. $ad < bc$ かつ $ac < bd$ の場合

II-1. $t_A < \theta_B$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } T < t \leq \theta_B, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } \theta_B < t \leq 1, \end{cases}$$

II-2. $\theta_B < t_A$ かつ $S < T$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq S, \\ (2; a, d; m, n; a, c) & \text{if } S < t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } T < t \leq t_A, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

II-3. $\theta_B < t_A$ かつ $T < S$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } T < t \leq S, \\ (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } S < t \leq t_A, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

III. $bc < ad$ かつ $bd < ac$ の場合

III-1. $\theta_B < t_A$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq t_A, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

III-2. $t_A < \theta_B$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq S, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq \theta_B, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } \theta_B < t \leq 1, \end{cases}$$

IV. $bc < ad$ かつ $ac < bd$ の場合

IV-1. $\theta_B < t_A$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq S, \\ (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } S < t \leq t_A, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

IV-2. $t_A < \theta_B$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq \theta_B, \\ (2; b, c; m, n; a, d) & \text{if } \theta_B < t \leq 1. \end{cases}$$

以上いずれの場合も $A \otimes B$ は多項式タイプではなく、区分的多項式タイプのファジイ数になることが分かるであろう。例えばIV-2の場合に θ_B が負なら、結果の式において $0 \leq t \leq \theta_B$ の場合はなく、

$$A \otimes B = (2; b, c; m, n; a, d)$$

のように $A \otimes B$ は多項式タイプになる。しかし θ_B が負ならIV-2の設定により t_A もまた負になり、始めに述べ

図3 2つの三角型ファジイ数

図4 ファジイ数の積

た通り θ_B と t_A がともに負になることはないから、したがってIV-2において θ_B が負になることはない。

ここで(4.9)の場合の積演算の数値例の一つ挙げておく。 A, B は

$$A = (-4.7, 1.2, 4.3), B = (-3.5, -2.4, 5)$$

で与えられる三角型ファジイ数とする(図3)。

(4.10), (4.11)のパラメータを計算すると、これは上記II-3の場合であることが分かる。II-3にしたがって計算すると、積演算の結果は次の通りである。

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; -4.7, 5; 1.2, -2.4; 4.3, 5) & \text{if } 0 \leq t \leq 0.20994, \\ (2; 4.3, -3.5; 1.2, -2.4; 4.3, 5) & \text{if } 0.20994 < t \leq 0.30699, \\ (2; 4.3, -3.5; 1.2, -2.4; -4.7, -3.5) & \text{if } 0.30699 < t \leq 0.79661, \\ (2; 4.3, -3.5; 1.2, -2.4; -4.7, 5) & \text{if } 0.79661 < t \leq 1, \end{cases}$$

上式から、(4.6), (4.7)にしたがって $A \otimes B$ の下限関数と上限関数を書けば、それぞれ次のようになる。

$$i_{A \otimes B}(t) = \begin{cases} (5.9t - 4.7)(-7.4t + 5) & \text{if } 0 \leq t \leq 0.20994, \\ (-3.1t + 4.3)(1.1t - 3.5) & \text{if } 0.20994 < t \leq 1. \end{cases}$$

$$s_{A \otimes B}(t) = \begin{cases} (-3.1t + 4.3)(-7.4t + 5) & \text{if } 0 \leq t \leq 0.30699, \\ (5.9t - 4.7)(1.1t - 3.5) & \text{if } 0.30699 < t \leq 0.79661, \\ (5.9t - 4.7)(-7.4t + 5) & \text{if } 0.79661 < t \leq 1. \end{cases}$$

これにより $A \otimes B$ のメンバシップ関数のグラフを描いたものが、図4である。ただしこの図では、区分的多項式の区分が目立つように、図3と比べて多少縮尺を

変えてある。

以上はすべて(4.9)の設定の下での積演算であったが、(4.8)の三角型ファジイ数 A, B が

$$0 < n < m \quad (4.12)$$

をみたまつ場合について積演算の結果を示そう。この場合もファジイ数 A, B のうち少なくとも一方が H_0 の要素であることを仮定する。(4.12)の設定により、 A, B の上限関数はいずれも t 軸と $[0, 1]$ の範囲で交わることはない。 A, B の下限関数と t 軸との交点の座標それぞれ t_A, t_B とおくと、それらは(4.2)から

$$\begin{cases} t_A = \frac{a}{a-m}, \\ t_B = \frac{c}{c-n}, \end{cases} \quad (4.13)$$

で与えられる。積演算の結果は次のようにまとめられる。なお S, T は(4.11)の通りである。

V. $ad < bc$ かつ $bd < ac$ の場合

V-1. $t_B < t_A$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq S, \\ (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq t_A, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

V-2. $t_A < t_B$ かつ $T < S$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } T < t \leq S, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq t_B, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_B < t \leq 1, \end{cases}$$

V-3. $t_A < t_B$ かつ $S < T$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq S, \\ (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } T < t \leq t_B, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_B < t \leq 1, \end{cases}$$

VI. $ad < bc$ かつ $ac < bd$ の場合

VI-1. $t_A < t_B$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } T < t \leq t_B, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_B < t \leq 1, \end{cases}$$

VI-2. $t_B < t_A$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq t_A, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

VII. $bc < ad$ かつ $bd < ac$ の場合

VII-1. $t_B < t_A$ かつ $T < S$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ (2; a, d; m, n; a, c) & \text{if } T < t \leq S, \\ (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq t_A, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

VII-2. $t_B < t_A$ かつ $S < T$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq S, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq T, \\ (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } T < t \leq t_A, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_A < t \leq 1, \end{cases}$$

VII-3. $t_A < t_B$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; a, c) & \text{if } 0 \leq t \leq S, \\ (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } S < t \leq t_B, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_B < t \leq 1, \end{cases}$$

VIII. $bc < ad$ かつ $ac < bd$ の場合

VIII-1. $t_A < t_B$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq t_B, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_B < t \leq 1, \end{cases}$$

VIII-2. $t_B < t_A$ のとき

$$A \otimes B = \begin{cases} (2; b, c; m, n; b, d) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ (2; a, d; m, n; b, d) & \text{if } T < t \leq t_A, \\ (2; a, c; m, n; b, d) & \text{if } t_A < t \leq 1. \end{cases}$$

以上の他に三角型ファジイ数(4.8)が

$$n < m < 0 \quad (4.14)$$

をみたす場合が考えられるが、その場合の積演算の結果については、余り冗長になるので割愛する。

次に、本節で導入した三角型ファジイ数から生成される区分的多項式の族に関する性質を、定理としてまとめておく。証明は明らかなので省略する。

三角型ファジイ数の全体からなる集合を $\mathcal{T}$ とし、 $\mathcal{T}$ の要素の上に積の演算を有限回(零回を含む)施して得られる多項式および区分的多項式の全体を $\Phi(\mathcal{T})$ とおく。すなわち $\Phi(\mathcal{T})$ は積演算によって $\mathcal{T}$ から生成されたファジイ数の族である。

定理4.1 (i) $\Phi(\mathcal{T})$ は積演算に関して閉じている。

(ii) つぎの包含関係が成立する。

$$\Phi(\mathcal{T}) \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^* \subset \mathcal{H}.$$

これまでの結果から、積の演算に関して閉じているファジイ数の族として、全部で3つ求められたことになる。そのうち乗算の具体的な計算がある程度可能なものは、もちろん最も小さい $\Phi(\mathcal{T})$ である。

最後の例として正の三角型ファジイ数の階乗を示す。

例4.1(階乗)

「だいたい1」を表す正の三角型ファジイ数を

$$A_1 = (a, 1, b), 0 < a < 1 < b,$$

とおく。[6]の第3章5節の定義にならって「だいたい2」, 「だいたい3」, $\dots$, 「だいたい n 」をつぎのように定める。ただし $\oplus$ はファジイ数の和を表わす。

$$A_2 = A_1 \oplus A_1$$

$$A_3 = A_1 \oplus A_2$$

$$\vdots$$

$$A_n = A_1 \oplus A_{n-1}$$

これにより

$$A_n = (na, n, nb), n = 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

と表される。実数の場合の n の階乗のファジイ化を同じく[6]の第3章5節にならって

$$[n!] = A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n$$

で定義する。上式右辺のファジイ数はすべて正の三角型であるから、(4.15)に対して本節始めの4で示した公式を適用すると、 $[n!]$ は次のような n 次多項式タイプの基本ファジイ数になる。

$$[n!] = (n; a, 2a, \dots, na; 1, 2, \dots, n; b, 2b, \dots, nb).$$

したがって上式右辺の表現形式の定義により、 $[n!]$ の下関数と上関数はそれぞれ次式で表される。

$$[n!]_i(t) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_n=0}^1 (1-a)^{i_1} a^{1-i_1} (2-2a)^{i_2} (2a)^{1-i_2} \times \cdots \times (n-na)^{i_n} (na)^{1-i_n} t^{i_1+i_2+\cdots+i_n},$$

$$[n!]_s(t) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \cdots \sum_{i_n=0}^1 (1-b)^{i_1} b^{1-i_1} (2-2b)^{i_2} (2b)^{1-i_2} \times \cdots \times (n-nb)^{i_n} (nb)^{1-i_n} t^{i_1+i_2+\cdots+i_n}.$$

上の2式は簡潔な式にまとめられて

$$[n!]_i(t) = n!((1-a)t+a)^n,$$

$$[n!]_s(t) = n!((1-b)t+b)^n,$$

となる。上の2式に $t=1$ を代入すれば、 $[n!]$ のセンターは $n!$ であることが分かる。

5. おわりに

本研究では、まず始めに与えられた性質をみたすファジイ数の全体からなる族が、積の演算に関して閉じていることを証明した。この結果に基づいて、最終的に三角型ファジイ数から生成される多項式および区分的多項式タイプのファジイ数の族が同じ閉性をもつことを示した。

従来ファジイ数間の乗算については、三角型の場合の近似式がよく知られているが、厳密な計算式を導く研究が少なかった。本研究の結果により、零ファジイ数の場合に若干制限されることにはなるが、ファジイ数同士の乗算公式を体系化された形で導くことに成功した。2次以上の次数をもつ区分的多項式タイプで零ファジイ数の場合、それらの間の乗算の計算をどのように体系化するかは、今後の重要な研究課題である。

本論文ではとりあげなかった除算については、区分的多項式タイプのファジイ数間の除算公式を導くことはある程度可能と思われるが、それについて詳細は別の機会に譲りたい。

謝辞

本論文を作成するにあたり、有意義かつ丁寧なご助言とご指摘をして下さった査読者の先生方に、心から感謝の意を表します。

参考文献

- [1] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy real algebra: Some results, Fuzzy Sets and Systems, 2, 327-348, 1979.
- [2] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, Inc., 1980.
- [3] R. Goetschel and W. Voxman, Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems, 18, 31-43, 1986.
- [4] D.-H. Hong and S.-Y. Hwang, The convergence of T-product of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 85, 373-378, 1997.
- [5] D.-H. Hong and S.-Y. Do, Fuzzy system reliability analysis by the use of T_ω (the weakest t-norm) on fuzzy number arithmetic operations, Fuzzy Sets and Systems, 90, 307-316, 1997.
- [6] A. Kaufmann and M. M. Gupta, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1991.
- [7] M. Mizumoto and K. Tanaka, Some properties of fuzzy numbers, in: Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, M. M. Gupta (eds), 153-164, 1979.
- [8] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 64, 369-380, 1978.
- [9] R. R. Yager, On the lack of inverses in fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets and Systems, 4, 73-82, 1980.
- [10] L. A. Zadeh, The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, Part I, Information Sciences, 8, 199-249, 1975.
- [11] 本多中二, 大里有生, ファジイ工学入門, 海文堂, 1989.
- [12] 日本ファジイ学会編, 講座ファジイ2, ファジイ集合, 日刊工業新聞社, 1992.
- [13] 河口万由香, 伊達惇, 離散表現による Weakly non-interactive ファジイ数の基本演算について, 日本ファジイ学会誌, 第3巻, 93-105, 1992.
- [14] 河口万由香, 伊達惇, t-ノルムに基づくファジイ算法に関する諸性質, 日本ファジイ学会誌, 第5巻, 1113-1121, 1993.
- [15] 堀内清光, ファジイ数学, 大阪教育図書, 1998.
- [16] 中島信之, t-ノルム, t-コノルム通覧(1)一説と歴史, 日本ファジイ学会誌, 第11巻, 561-576, 1999.
- [17] 中島信之, t-ノルム, t-コノルム通覧(2)一応用, 日本ファジイ学会誌, 第11巻, 734-744, 1999.
- [18] 古川長太, ファジイ最適化の数理, 森北出版, 1999.
(2001年1月16日 受付)
(2001年12月25日 採録)

[問い合わせ先]

〒192-8577 東京都八王子市丹木町1-236
創価大学工学部情報システム学科
古川 長太

TEL : 0426-91-9326

Email : furukawa@t.soka.ac.jp

著者紹介

 ふるか わ なが た
 古川 長太 [正会員]

昭和30年 九大・理・数学卒, 昭和32年 同大大学院理学研究科修士課程数学専攻修了, 昭和33年 同大大学院理学研究科博士課程中退, 同年 熊本大・理・数学助手, 昭和40年 同助教授, 昭和41年 九大・理・数学助教授, 昭和50年 同教授を経て, 平成5年 創価大学工学部情報システム学科教授となり, 現在に至る. 九大在職中はマルコフ決定過程, 非線形最適化理論, 微分不可能計画の研究に従事, 創価大着任後はファジイ数学, ファジイ最適化理論の研究に従事. 理博. 著書「ファジイ最適化の数理」(森北出版).

Some families of fuzzy numbers closed under the operation of multiplication, and fuzzy numbers of piecewise-polynomial type.

by

Nagata FURUKAWA

Abstract :

In this paper, a fuzzy number on the real line is defined as the one whose membership function is everywhere continuous and has a strict monotonicity on its bounded support. Firstly, it is proved that the family of all fuzzy numbers is closed under the operation of multiplication derived from Zadeh's extension principle. Two kinds of subfamilies of fuzzy numbers closed under the multiplication are presented. For the purpose of describing these two subfamilies, the notion of polynomial type and piecewise-polynomial type fuzzy numbers are introduced. Fundamental formulae for the multiplication among fuzzy numbers of polynomial type or piecewise-polynomial type are given.

Keywords : Continuous and Strictly-monotone Membership Function, Zero Fuzzy number, Polynomial Type, Piecewise-polynomial Type, Multiplication Formulae.