|||||
講演
|||||

可能性・必然性によるファジィモデリング[†]

田中 英夫*

1. はじめに

第5回のファジィシステム・シンポジウムにおいて、「ファジィモデリング」という基調講演を行ったが、そのときの講演を解説にまとめることを依頼された。それで、そのときの原稿から特に可能性・必然性に基づくモデリングについて述べることにする。

現実を直視すれば、現象に対する部分的無知さ、情報の不完全性、さらに評価の多様性などが存在することに気づくであろう。あいまいな状況において、物事を可能性の観点から考えるか、または必然性の観点から考えるかの二つの観点がある。たとえば、不確定要素がある決定問題では、少なくとも楽観的か悲観的かの二つの決定方策が考えられている。すなわち、不確定要素があればその中の可能性を追求するか、より確からしい必然性を追求するかの二つの行動様式が考えられる。このような可能性、必然性の観点からあいまいさのある問題のモデリングについて述べる。

可能性、必然性などは様相概念と呼ばれ、論理学で古くから議論されていた。特に、1900年代のはじめから数理論理学で、古典論理に可能性と必然性とを導入した様相論理が研究されている。可能性、必然性をそれぞれ記号 $\Diamond$ 、 $\Box$ で表し、否定

を $\sim$ とすると、命題 A に対して

$$\sim\Diamond\sim A = \Box A \quad (1.1)$$

と定義している。(1.1)式は「 A でないことは可能でない」=「 A は必然」と解釈している。また二重否定 $\sim\sim A$ は A であることから(1.1)式の A のところに $\sim A$ を代入すれば、

$$\sim\Box\sim A = \Diamond A \quad (1.2)$$

が得られる。これは「 A でないことが必然でない」=「 A は可能」ということを意味している。これは可能性から必然性が導けるし、また必然性から可能性が導けることを示している。

以上のことを述語命題 $P(x)$ として考える。これはある要素 x が述語的性質 $P(x)$ が成り立っているかどうかだけでなく、ある与えられた定義域 D の要素 x について議論することになる。したがって、すべての $x \in D$ について $P(x)$ が真であることを $\forall x P(x)$ と表し、また $P(x)$ が成り立つ x が存在することを $\exists x P(x)$ と表す。このとき、(1.1)式と対応した関係は

$$\sim\exists x \sim P(x) = \forall x P(x) \quad (1.3)$$

となる。同様に、

$$\sim\forall x \sim P(x) = \exists x P(x) \quad (1.4)$$

も得られる。

以下で述べる可能性・必然性モデルの原理はすべて(1.3)、(1.4)式からの演算であるといえる。またファジィ数のメンバシップ関数を可能性分布関数と解釈されるようになり、これは可能性測度を定義する。このことは確率分布関数と確率測度との関係から容易に理解できるであろう。可能性

[†] Fuzzy Modelling by Possibility and Necessity
Hideo TANAKA

* 大阪府立大学 工学部
College of Engineering, University of Osaka Prefecture

測度の(1.3)式の意味での双対概念が必然性測度である。このことからファジィ数は可能性・必然性の概念と深く結びついている。これらの概念を導入したモデリングの考え方を種々の問題を通して説明する。

2. 診断・検索モデル

まず Z.Pawlak の Rough Sets [1] から説明する。Rough Sets はあいまいな分類に対する基本的概念である。近似空間を A で表し、これは 2 項組 $A = (U, R)$ である。ただし、 U は全体集合で R は同値関係である。 U を R で分割した空間を近似空間 A と呼んでいる。図 1 に簡単な例を示す。

図 1 全体集合 U の近似空間 A

この例で、同値関係 R によって U は $S_1, \dots, S_{16}$ の 16 個の同値類に分けられている。このとき、 X というパターンが与えられたとき、 X を S_i の集合で近似することを考える。 X の上からの近似を $A^*(X)$ と表し、 X の下からの近似を $A_*(X)$ と表し、それぞれを次のように定義する。

$$A^*(X) = \{S_i \mid S_i \cap X \neq \emptyset\} = \{S_1, \dots, S_{12}\} \quad (2.1)$$

$$A_*(X) = \{S_i \mid S_i \subset X\} = \{S_6, S_7\} \quad (2.2)$$

X を表現するのに可能な S_i を集めたものが $A^*(X)$ であり、 X を表現するのに確かに必要な S_i を集めたものが $A_*(X)$ である。すなわち、 X と交わっている S_i は可能性があり、また X に含まれている S_i は必然性があるということになる。また $A^*(X)$ と $A_*(X)$ との差集合を B_n で表し、 X の

境界集合と呼ぶ。すなわち

$$\begin{aligned} B_n &= A^*(X) - A_*(X) \\ &= \{S_1, \dots, S_5, S_8, \dots, S_{12}\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$A^*(X)$ 、 $A_*(X)$ に関して次の性質が容易に導ける。

$$\left. \begin{aligned} (i) & A_*(X) \subset X \subset A^*(X) \\ (ii) & A^*(X \cup Y) = A^*(X) \cup A^*(Y) \\ (iii) & A_*(X \cup Y) \supset A_*(X) \cup A_*(Y) \\ (iv) & A^*(X \cap Y) \subset A^*(X) \cap A^*(Y) \\ (v) & A_*(X \cap Y) = A_*(X) \cap A_*(Y) \\ (vi) & A_*(A_*(X)) = A^*(A_*(X)) = A_*(X) \\ (vii) & A^*(A^*(X)) = A_*(A^*(X)) = A^*(X) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

(1.3)、(1.4)式と対応した次の関係も容易に得られる。

$$A_*(X) = U - A^*(U - X) = \sim A^*(\sim X) \quad (2.5)$$

$$A^*(X) = U - A_*(U - X) = \sim A_*(\sim X) \quad (2.6)$$

ただし、 $\sim$ は補集合をまた $-$ は差集合をとる演算である。

いま与えられた X において、 $A^*(X) = A_*(X)$ ならば、 X は近似空間 A において完全に定義できるが、次のような 4 つの状況がある。

(i) $A_*(X) \neq \emptyset$ 、 $A^*(X) \neq U$ ならば X はあいまいに定義できる。

(ii) $A_*(X) \neq \emptyset$ 、 $A^*(X) = U$ ならば X は外から定義できない。

(iii) $A_*(X) = \emptyset$ 、 $A^*(X) \neq U$ ならば X は内から定義できない。

(iv) $A_*(X) = \emptyset$ 、 $A^*(X) = U$ ならば X は外からも内からも定義できない。

(ii) の場合には、 X の可能性を考えると全体集合になり、(iii) の場合には、 X の必然性のものは存在しない。(iv) の場合は近似空間 A からは X についての情報が得られない。したがって (i) の場合が重要である。

さて、医療診断などに用いられるデータ・ベースの例を用いて同値類や属性の独立性などの概念を説明する。情報システムを $S = (U, Q, V, \rho)$ で表す。ただし、 U は対象の集合、 Q は属性の集合、 V は属性値の集合、 $\rho: U \times Q \rightarrow V$ で記述関数である。 ρ はデータ・ベースの表として考えられる

ので、次に簡単な例を表1に示す。表1において、 $U = \{x_1, \dots, x_5\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_4\}$, $V_{q_1} = \{0, 1\}$, $V_{q_2} = \{0, 1\}$, $V_{q_3} = \{0, 1\}$, $V_{q_4} = \{0, 1, 2\}$ である。 ρ は表1で与えられ、例えば $\rho(x_1, q_1) = 0$ である。また x_i は人を、 q_i は検査項目を、 $\{0, 1, 2\}$ は検査の結果と考えることができる。

表1 与えられたデータ・ベース

U	q_1	q_2	q_3	q_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	1	0	2
x_3	1	1	0	1
x_4	1	1	0	1
x_5	0	1	1	2

さて x_i と x_j とがある q に関して識別できないことを $\rho(x_i, q) = \rho(x_j, q)$ と定義する。これを x_i $[q]$ x_j と表す。すなわち $[q]$ は同値関係である。同値関係 $[q]$ による U の分割を商集合といい、これを $U/[q] = \{\{x_i\} \mid x_i \in U\}$ と表す。表1の例では

$$U/[q_1] = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}\}$$

$$U/[q_2] = \{\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}\}$$

$$U/[q_3] = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_5\}\}$$

$$U/[q_4] = \{\{x_1\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}\}$$

である。

同値関係 $[q]$, $[p]$ に対して

(a) 属性 p は属性 q に従属している $\Leftrightarrow q \rightarrow p$ iff

$$[q] \subset [p]$$

(b) 属性 p, q は独立である $\Leftrightarrow p \rightarrow q, q \rightarrow p$ のどちらも成り立たない

と定義する。ただし、 $[q] \subset [p]$ は $x_i [q] x_j$ ならば $x_i [p] x_j$ である。商空間でいうと $U/[q]$ が $U/[p]$ の細分割になっていることを意味する。

表1の例では $q_4 \rightarrow q_1, q_4 \rightarrow q_2$ が成り立つので、 q_1 と q_2 とは q_4 に従属している。 Q の部分集合 P について、(a), (b) と同様な定義ができる。ただし、

$$[P] = \bigcap_{p \in P} [p] \quad (2.7)$$

である。例で示すと、 $P = \{q_1, q_2\}$ とすると $[P] = [q_1] \cap [q_2]$ であり、 $U/[P]$ は

$$U/[P] = \{\{x_1\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}\} \quad (2.8)$$

となる。

(c) 部分集合 $P \subset Q$ が独立 $\Leftrightarrow$ すべての $P' \subset P$ に対して $[P'] \supset [P]$

(d) 部分集合 $P \subset Q$ が従属 $\Leftrightarrow [P'] = [P]$ となる $P' \subset P$ が存在する

(e) 部分集合 $P' \subset P$ が P において余分である $\Leftrightarrow [P - P'] = [P]$

(f) 部分集合 $P \subset Q$ が Q の簡略化である $\Leftrightarrow Q - P$ が余分であり P が独立である。

以上の定義から、(f) が重要である。すなわち、 Q における属性のうち、真に必要な Q の簡略化を求めることが重要である。例においては、 $\{q_1, q_2, q_3\}$ と $\{q_3, q_4\}$ とが Q の簡略化になっている。表1から、 x_3, x_4 は同じ属性値ベクトルをもつので、区別できない、すなわち $\{x_3, x_4\}$ が一つの同値類である。したがって、 $U/[Q] = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5\}\}$ となる。 x_4 を x_3 で代表させ、表1の簡略化を次に示す。ただし、 U の列は省略している。

簡略化 I			簡略化 II	
q_1	q_2	q_3	q_3	q_4
0	0	0	0	0
0	1	0	0	2
1	1	0	0	1
0	1	1	1	2

表1の例から分かるように、 U を構成している4つの状態を分けるために必要な属性は $\{q_1, q_2, q_3\}$ か $\{q_3, q_4\}$ であることが分かる。真に必要な属性だけを見つけるために上記の定義(a)~(f)が用いられている。

表1のようなデータ・ベースを情報システム $S = (U, Q, V, \rho)$ と見なし、この S の良さを評価できる。実際の応用として、150人の心臓病の患者のデータと医者による診断に関する6つのクラスが

与えられ、次のような結果が得られている。属性は7個あり、属性の全体集合 Q による同値類は125個である。与えられた6つのクラスをこの同値類で考えると次の表が得られている。ただし、近似の精度は(下からの近似の個数)/(上からの近似の個数)である。

クラス の数	患 者 の 数	下から の近似 A_*	上から の近似 A^*	近似の 精 度
1	10	4	15	0.27
2	46	33	54	0.72
3	42	39	45	0.87
4	33	30	36	0.86
5	15	15	15	1.00
6	4	4	4	1.00

上の表から分るようにクラス5, 6はデータから完全に特性づけられていることが分かる。しかしクラス1はデータから特性づけられる程度はかなり低い。上の結果の表からクラス1は図2のようになっていると考えられる。また属性をいくつか取りのぞいて同様なことが示されている。

以上のように専門家である医者診断と与えられたデータから得られる同値類との関係から、それらの整合性が議論できる。

図2 クラス1における下からの近似と上からの近似: □は同値類

情報検索の分野においても、不完全情報の取り扱いに可能性、必然性の概念が用いられている。不完全情報の例は自動車の色が灰色または紺という集合で与えられる場合である。W.Lipski [2] は検索のときの必然性、可能性を次のように定義している。

(i) the lower value of the query $A_*(Q)$, which is the set of objects which from the information available can not fail to satisfy Q .

[必然性]

(ii) the upper value of the query $A^*(Q)$ which is the set of objects which from the information available could possibly satisfy Q . [可能性]

(i), (ii)の定義の意味は前述の $A_*(Q)$, $A^*(Q)$ に対応している。このことを次の簡単な例で示す。いま年齢が完全には分からなくて、区間として表2のように与えられるとする。また検索したい人の年齢を Q とし、 $Q = [20, 25]$ とする。このとき、

$$A_*(Q) = \{2, 4\}; \text{必然性}$$

$$A^*(Q) = \{1, 2, 4\}; \text{可能性}$$

となる。

表2 不完全情報のデータ・ベースの例

名前	年齢
1	[22, 26]
2	[20, 22]
3	[30, 36]
4	[20, 23]
5	[27, 31]

全体集合 $U = \{1, \dots, 5\}$ であるので

$$A_*(Q) = U - A^*(\sim Q)$$

$$= \{1, \dots, 5\} - \{1, 3, 5\} = \{2, 4\}$$

が成り立ち、これは(2.5)式に対応する。年齢を0から120歳までとすると、 $\sim Q = [0, 19] \cup [26, 120]$ である。 $A_*(Q) \subset A^*(Q)$ であるので、常に可能性は必然性を包含している。

以上の概念をファジィ集合に拡張した研究が D.Dubois と H.Prade [3] によって行われている。

3. 証拠理論による決定問題

A.P.Dempster[4]はベイズ確率では取扱えない無知量を取扱うために上界, 下界確率の概念を導入した. G.Shafer は Dempster の概念を発展させ, 「証拠の数学理論」[5]という一冊の本にまとめた. 2. で述べた Rough Sets は Dempster の概念の集合への応用である.

基本確率で定義される証拠の構造を述べる. まず簡単な例として, A が犯人であることを記号 A で, A が犯人でないことを記号 $\neg A$ で表す. いま刑事が証拠を集めてきて, A が犯人である度合を 0.4 だと分かったとする. これ以外が完全無知だとすると, 残りの度合 0.6 は当然全体集合 $S = \{A, \neg A\}$ の上にあると考える. A が犯人かどうか, A が犯人でないとかの証拠が集められなかった度合が 0.6 だと考えている. 証拠として集められた重みを $m(\cdot)$ で表すと,

$$m(A) = 0.4, m(\{A, \neg A\}) = 0.6 \quad (3.1)$$

となり,

$$m(A) + m(\{A, \neg A\}) = 1 \quad (3.2)$$

が成り立つので $m(\cdot)$ を基本確率と呼んでいる (図 3 参照). ただし $\neg A$ は A の余事象である.

図 3 証拠の構造の例(基本確率)

ここで, (3.1)式の基本確率から A が犯人である確率 $P(A)$ と A が犯人でない確率 $P(\neg A)$ を推定することになる. $m(\{A, \neg A\}) = 0.6$ をどのように考えるかによって上界確率 P^* と下界確率 P_* とが次のように得られる. 0.6 の重みは $\{A, \neg$

$A\}$ の上を自由に動ける構造になっているので, 上界を考えるとときは最大値を, 下界のときは最小値を取るように考える. すなわち,

$$P^*(A) = 0.4 + 0.6 = 1.0, P^*(\neg A) = 0 + 0.6 = 0.6$$

$$P_*(A) = 0.4 + 0 = 0.4, P_*(\neg A) = 0 + 0 = 0$$

以上に述べたことを数学的に定義すると次のようになる.

[基本確率] S を全体集合として, 次の条件を満足する関数 $m: 2^S \rightarrow [0, 1]$ は基本確率と呼ばれる.

$$m(\emptyset) = 0, \sum_{B \subseteq S} m(B) = 1 \quad (3.3)$$

$$[\text{上界確率}] P^*(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B) \quad (3.4)$$

$$[\text{下界確率}] P_*(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (3.5)$$

この定義から分かるように, 上界確率は可能性の, 下界確率は必然性の概念として対応している. 上の例でいえば, $P^*(A) = 1$ から A が犯人の可能性は 1 あることを, また $P_*(A) = 0.4$ から A が犯人である必然性は 0.4 あることになり, これは推定区間 $[0.4, 1]$ になっている. すなわち, 与えられた証拠の無知量 0.6 を反映して, 推定区間の幅も 0.6 ある.

(3.4), (3.5)式から

$$\begin{aligned} P^*(A) &= \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) = \sum_{B \subseteq S} m(B) - \sum_{B \subseteq \neg A} m(B) \\ &= 1 - P_*(\neg A) \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる. これは(1.2), (1.4), (2.6)式などに対応している. また上界, 下界確率の定義(3.4), (3.5)式は(2.1), (2.2)式と対応している.

上界, 下界確率が定義されたので, これによる分布関数をそれぞれ F^*, F_* とする. このとき, S 上の関数 v の F^*, F_* による期待値を E^*, E_* とし次のように定義する.

$$E^*(v) = \int_{-\infty}^{\infty} v dF_*(v) \quad (3.7)$$

$$E_*(v) = \int_{-\infty}^{\infty} v dF^*(v) \quad (3.8)$$

ただし,

$$F^*(v) = P^* (\{s : v(s) \leq v\}) \quad (3.9)$$

$$F_*(v) = P_*(\{s : v(s) \leq v\}) \quad (3.10)$$

ベイズ決定問題に応用した例を以下に述べる。自然の状態 s_j をもつ不確実性のある決定問題で、 S に関する証拠が与えられるとする。証拠として基本確率 m が与えられ、自然の状態が s_j のとき代替案 a_i を選択したときの効用を $u(a_i, s_j)$ とする。このときの期待効用は (3.7) ~ (3.10) 式から

$$\begin{aligned} E^*(u(a_i)) &= \int_{-\infty}^{\infty} v dP^*(\{s_j : u(a_i, s_j) \leq v\}) \\ &= \sum_{B \subset S} m(B) \max_{s_j \in B} \{u(a_i, s_j)\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} E_*(u(a_i)) &= \int_{-\infty}^{\infty} v dP_*(\{s_j : u(a_i, s_j) \leq v\}) \\ &= \sum_{B \subset S} m(B) \min_{s_j \in B} \{u(a_i, s_j)\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

以下に簡単な数値例を示す。効用行列と証拠の基本確率は次のように与えられている。

[効用行列]				[証拠の基本確率]	
	s_1	s_2	s_3		
a_1	10	5	2	$m(A) = \begin{cases} 0.6; A = s_2 \\ 0.2; A = s_3 \\ 0.2; A = \{s_1, s_2, s_3\} \end{cases}$	
a_2	5	10	2		
a_3	3	3	3		

このとき、期待効用は次のようになる。

$$E_*(u(a_1)) = 3.8, E^*(u(a_1)) = 5.4$$

$$E_*(u(a_2)) = 6.8, E^*(u(a_2)) = 8.4$$

$$E_*(u(a_3)) = 3.0, E^*(u(a_3)) = 3.0$$

この例から分かるように $E_*(u(a_i)) \leq E^*(u(a_i))$ であり、行動 a_i を取ったとき効用の推定区間は $[E_*(u(a_i)), E^*(u(a_i))]$ と考えられる。すなわち、 a_1 の効用は区間 $[3.8, 5.4]$ 、 a_2 は $[6.8, 8.4]$ 、 a_3 は 3.0 である。この結果から a_2 が選ばれる。証拠の無知量を反映して期待効用も区間として推定されている。

なお、2つの証拠、すなわち2つの基本確率が与えられたときの結合法則も次のように定義されている。 m_1 と m_2 とから1つの基本確率 $m_1 \oplus m_2$ を得るための結合法則は

$$m_1 \oplus m_2(A) = \sum_{A = A_i \cap A_j} m_1(A_i) m_2(A_j) / (1 - k) \quad (3.13)$$

ただし、

$$k = \sum_{A_i \cap A_j \neq \phi} m_1(A_i) m_2(A_j)$$

であり、 $k < 1$ のとき $m_1 \oplus m_2$ は存在する。

以上のように証拠理論はベイズ決定問題の拡張であり、またエキスパート・システムの確信度の計算に用いられている。

4. 区間線形回帰分析

区間線形システムをモデルとした回帰分析の手法について述べる [6]。区間線形システムは

$$Y = A_1 x_1 + \dots + A_n x_n \quad (4.1)$$

によって定義されている。ただし、 x_i は入力であり、係数 A_i は区間であり、中心 α_i と幅 c_i によって $A_i = (\alpha_i, c_i)$ と表現する。このとき、出力 Y も区間となり、区間演算から

$$Y = (\alpha x, c | x|) \quad (4.2)$$

となる。ただし、 α, c は横ベクトル、 x は縦ベクトル、 $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)^t$ である。(4.2) 式の意味は区間係数の可能性から区間出力 Y の可能性が計算されていることを示している。ゆえに (4.1) 式を可能性線形システムと呼んでいる。

区間の包含関係 $A_i \subset A_j$ は

$$\alpha_j - c_j \leq \alpha_i - c_i, \quad \alpha_j + c_j \geq \alpha_i + c_i \quad (4.3)$$

と定義する。

ここで取り扱う j 番目のデータは

$$(Y_j, x_{j1}, \dots, x_{jn}) = (Y_j, \mathbf{x}_j), j = 1, \dots, m \quad (4.4)$$

と表す。ただし、区間出力 Y_j は $Y_j = (y_j, e_i)$ と中心 y_j と幅 e_i とで表示されている。もし、出力が通常の数値のときは $e_i = 0$ とすればよい。区間出力 Y_j は多数回の観測値 $\{y_j\}$ の最小値と最大値とから求められる。

可能性推定モデルと必然性推定モデルをそれぞれ以下のように定義する。

$$Y_j^* = A_1^* x_{j1} + \dots + A_n^* x_{jn} \quad (4.5)$$

$$Y_{*j} = A_{*1} x_{j1} + \dots + A_{*n} x_{jn} \quad (4.6)$$

さて、二つの定式化を以下に述べる。

[可能性推定モデル]

ここでの問題は

$$Y_j \subset Y_j^*, j = 1, \dots, m \quad (4.7)$$

を満足し、推定区間の幅の合計

$$J^* = \sum_j c^* |x_j| \quad (4.8)$$

を最小にする区間係数 $A_i^* = (\alpha_i^*, c_i^*)$ を求めることになる。

(4.7)式は(4.3)式から線形不等式になるので、上述の問題は線形計画問題になる。したがって容易に解が得られる。

[必然性推定モデル]

ここでの問題は

$$Y_{*j} \subset Y_j \quad j=1, \dots, m \quad (4.9)$$

を満足し、推定区間の幅の合計

$$J_* = \sum_j c_* |x_j| \quad (4.10)$$

を最大にする区間係数 $A_{*i} = (\alpha_{*i}, c_{*i})$ を求めることになる。

この問題も線形計画問題になり、容易に解が得られる。また J_* を最大にする理由は(4.9)式の拘束条件を満足するものの中からより幅の広い推定区間 Y_{*j} を求めるためである。すなわち、必然性推定区間 Y_{*j} と可能性推定区間 Y_j^* とは

$$Y_{*j} \subset Y_j \subset Y_j^* \quad (4.11)$$

の包含関係にある。したがって上式を満足するような Y_j^* と Y_{*j} とを求めることであるので Y_j^* の幅は最小に、 Y_{*j} の幅は最大になるように定式化されている。

与えられたデータ Y_j^0 が可能性線形システム

$$Y_j^0 = A_1^0 x_{j1} + \dots + A_n^0 x_{jn} \quad (4.12)$$

を満足するならば、 $Y_{*j} = Y_j^0 = Y_j^*$, $j=1, \dots, m$ となり、(4.7)(4.8)式または(4.9), (4.10)式の線形計画問題の解は $A_{*i} = A_i^0 = A_i^*$, $i=1, \dots, n$ となる。

Y_j が通常の数値 y_j のときには、可能性推定モデルだけが定式化でき、(4.7)式は

$$y_j \in Y_j^* \quad (4.13)$$

となる。(4.8), (4.13)式から定義される問題は同様に線形計画問題になる。

以上で定式化した区間線形回帰モデルの特徴を以下に述べる。

(i) 区間データに対する可能性、必然性推定モデル

は Rough Sets の上からの近似 $A^*(X)$ と下からの近似 $A_*(X)$ の概念と類似している。出力データが区間である不完全情報のときには、この不完全性を反映してモデルも区間線形システムで定義され、可能性、必然性推定区間が得られる。

(ii) データ数が増加するほど、推定区間の幅が広がる。これは解析のためのデータが増加することは、それだけ情報が多くなり意思決定のための可能性が広がるからである。通常回帰分析ではデータ数が増加すればするほど推定区間が小さくなるのでこの性質は対照的である。通常回帰分析は確率モデルによっているので、大多数のデータから客観的分析を行うことが多いが、区間線形回帰分析は可能性モデルによっていて、どのようなことが可能かを決定する決定問題としての側面がある。

(iii) 区間回帰分析は線形計画問題に帰着させているので、係数に関する拘束条件を導入できる。たとえば、出力と正の相関がある変数に対する係数を正に限定して解くことができるという利点がある。一般的に言えば、次のような専門家の知識を導入し、その中に限定して区間係数を推定できる。専門家がある係数について漠然とした知識があり、これを区間 $B_i = (\beta_i, d_i)$ とすると、 $A_i \subset B_i$ という拘束条件を導入できる。すなわち、

$$\beta_i - d_i \leq \alpha_i - c_i, \quad \beta_i + d_i \geq \alpha_i + c_i \quad (4.14)$$

このように専門家の知識によって拘束されているので、推定された区間線形回帰モデルは受容しやすいものになると考えられる。

(iv) 区間は、一般にわれわれの部分的無知を表しているといえるので、解析結果にもこのような部分的無知を反映させることができる。

以下において応用例を述べる。

[住宅価格モデル]

プレハブ住宅 A 社のパンフレットから表 3 の通常の数値のデータを得た。ここで

入力データ： x_1 = 材質の良さ

x_2 = 1 階床面積 (m²)

x_3 = 2 階床面積 (m²)

x_4 = 総室数

x_5 = 和室数

出力データ： y = 販売価格(万円)

ただし、材質は1=低級、2=中級、3=高級を示す。

表3 プレハブ住宅に関するデータ

No.	y_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	606	1	38.09	36.43	5	1
2	710	1	62.10	26.50	6	1
3	808	1	63.76	44.71	7	1
4	826	1	74.52	38.09	8	1
5	865	1	75.38	41.10	7	2
6	852	2	52.99	26.49	4	2
7	917	2	62.93	26.49	5	2
8	1031	2	72.04	33.12	6	3
9	1092	2	76.12	43.06	7	2
10	1203	2	90.26	42.64	7	2
11	1394	3	85.70	31.33	6	3
12	1420	3	95.27	27.64	6	3
13	1601	3	105.98	27.64	6	3
14	1632	3	79.25	66.81	6	3
15	1699	3	120.50	32.25	6	3

区間線形モデルとして

$$Y^* = A_0^* + A_1^*x_1 + A_2^*x_2 + A_3^*x_3 + A_4^*x_4 + A_5^*x_5$$

とする。係数は正であることを仮定し、 $\alpha_i \geq 0, i = 0, \dots, 5$ という拘束条件の下に(4.8), (4.13)式の線形計画問題の最適解を求めた。このとき最適区間線形システムは

$$Y^* = (245.167, 37.634)x_1 + (5.853, 0)x_2 + (4.786, 0)x_3$$

と得られた。このときの区間推定値を図4に示す。

図4 住宅価格モデルによる区間推定

図4から、価格の安いプレハブ住宅の販売価格は推定区間の下端に位置し、価格の高いものの販売価格は推定区間の上端に位置している。これは高級品が付加価値を含んで価格を高い目に設定しているというわれわれの直観とよく合っていることを示している。また利益に関する説明変数が不明であるが、これを反映した区間推定モデルが得られているといえる。

[砥削加工モデル]

実験は送り速度を9種とり、これに対する表面あらさを測定した。3回の加工実験から表面あらさの最大値と最小値から表4の区間出力データを得た。区間線形システムは

$$Y = A_0 + A_1x + A_2x^2$$

であり、次のような解を得た。

[可能性推定モデル]

$$A_0^* = (0.236, 0) \quad A_1^* = (-0.007, 0.055)$$

$$A_2^* = (0.016, 0)$$

[必然性推定モデル]

$$A_{*0} = (0.477, 0), A_{*1} = (-0.206, 0)$$

$$A_{*2} = (0.047, 0.002)$$

表4 送り速度と表面あらさ

No.	送り x (10mm/min)	あらさ(μ) y_i		あらさ(μ) Y_i (y_i, c_i)
		最小値	最大値	
1	1.0	0.19	0.29	(0.240, 0.050)
2	1.5	0.24	0.32	(0.280, 0.040)
3	2.0	0.20	0.27	(0.235, 0.035)
4	2.5	0.20	0.46	(0.330, 0.130)
5	3.0	0.22	0.38	(0.300, 0.080)
6	3.5	0.22	0.33	(0.275, 0.055)
7	4.0	0.35	0.56	(0.455, 0.105)
8	4.5	0.37	0.60	(0.485, 0.115)
9	5.0	0.41	0.89	(0.650, 0.240)

図5、図6にそれぞれの推定区間とデータとを示す。図において、縦線が与えられた出力データ Y_i であり、2つの曲線によって推定区間 Y_i^*, Y_{*i} を表している。この図から分かるように $Y_{*i} \subset Y_i$

$\subset Y_i^*$ となっている。

なお、係数をファジィ数にした可能性線形回帰分析 [7] およびモデルを非線形系としたファジィ GMDH [8] なども定式化されている。

図5 可能性推定モデル

図6 必然性推定モデル

5. 様相性線形計画問題

通常の線形計画問題は

$$\max_x c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (5.1)$$

subject to

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, i=1, \dots, m \quad (5.2)$$

と記述される。この問題は(5.2)式の拘束条件を満足し、(5.1)式の目的関数を最大化する x を求めることである。しかし、一般に目的関数は利益などの場合が多く、実際の企業では、利益最大よりも満足度規準に従っていることが多い。すなわち、

(5.1)式の値がだいたい b_0 円以上あれば良いというように x を決定している。また(5.1), (5.2)式の係数 c_i, b_i, a_{ij} なども専門家の知識からだいたい10ぐらいというようにファジィ数で与えられることが多い。したがって、(5.1), (5.2)式の問題は

$$C_1x_1 + \dots + C_nx_n \geq B_0 \quad (5.3)$$

$$A_{i1}x_1 + \dots + A_{in}x_n \leq B_i, i=1, \dots, m \quad (5.4)$$

を満足する x を求める問題になる。ただし、大文字 C_i, B_i, A_{ij} はファジィ数であり、したがってファジィ数の大小関係を定義する必要がある。また x を選択することによって、(5.3), (5.4)式の左辺のファジィ数が直線 R^1 次元上で移動する。ゆえにファジィ数の不等式の成立の度合いが定義できれば、その度合いが大きくなる x を求めることになる。これが様相性線形計画問題の基本的な考え方である。ファジィ数は可能性分布と考えられるので、これを可能性線形計画問題ということもある。以下では可能性と必然性との概念を導入した様相性を考慮した定式化を乾口ら [9] の研究から述べる。

さて、説明を簡単にするために、ファジィ数を通常の集合とし、大小関係を選好関係に置き換えて上述の問題を考える。いま、全体集合 X の任意の要素 x, y について、通常選好関係 $R(x, y)$ が与えられているとする。ただし、 $R(x, y)$ は x を y より選好することを意味する。このとき、選好関係 $R(x, y)$ を集合 A, B の選好関係に拡張する方法を以下で述べる。ただし、選好関係 R の特性関数を χ_R とし、集合 A, B の特性関数を χ_A, χ_B とする。

まず X のある要素 x を固定し、これと集合 B との選好関係を考えると、次の4つの場合がある。

(i) $\chi_R(x, y) = 1$ となる B の要素 y が存在する。すなわち、 x を B より選好することは可能である。この関係を $\chi_{\oplus R}(x, B)$ と表すと

$$\chi_{\oplus R}(x, B) = \sup_y \{ \chi_B(y) \wedge \chi_R(x, y) \} \quad (5.5)$$

となり、この関係は x を B より可能的に選好する関係である。

(ii) B のすべての要素 y に対して $\chi_R(x, y) = 0$ となる。すなわち、 x を B より選好することは必

然である。この関係を $\chi_{\square R}(x, B)$ と表すと

$$\chi_{\square R}(x, B) = \inf_y \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_R(x, y) \} \quad (5.6)$$

となり、この関係は x を B より必然的に選好する関係である。

(iii) $\chi_R(y, x) = 1$ となる B の要素 y が存在する。すなわち、 B を x より選好することは可能である。この関係を $\chi_{\oplus R}(B, x)$ と表すと

$$\chi_{\oplus R}(B, x) = \sup_y \{ \chi_B(y) \wedge \chi_R(y, x) \} \quad (5.7)$$

となり、この関係は B を x より可能的に選好する関係である。

(iv) B のすべての要素 y に対して $\chi_R(y, x) = 1$ となる。すなわち、 B を x より選好することは必然である。この関係を $\chi_{\square R}(B, x)$ と表すと

$$\chi_{\square R}(B, x) = \inf_y \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_R(y, x) \} \quad (5.8)$$

となり、この関係は B を x より必然的に選好する関係である。

以上の定義において用いられた記号 $\Diamond$, $\square$ は様相演算子の可能性と必然性とに対応している。また選好関係 R を通常の数値の大小関係すなわち、 $x \geq y$ ならば $\chi_R(x, y) = 1$ とすれば (5.5) ~ (5.8) 式の意味が理解できるであろう。また、よく知られた可能性測度と必然性測度の定義が (5.5) ~ (5.8) 式で用いられている。すなわち、一般に A のもとでの B の可能性測度 $\text{Pos}(B \mid A)$ および必然性測度 $\text{Nes}(B \mid A)$ はそれぞれ次のように定義できる。

$$\text{Pos}(B \mid A) = \sup_x \{ \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) \} \quad (5.9)$$

$$\text{Nes}(B \mid A) = \inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_B(x) \} \quad (5.10)$$

(5.9), (5.10) 式 of 概念を用いて (i) ~ (iv) における $\exists x$ と $\forall x$ を $\sup$ と $\inf$ とに置き代えている。

さて、以上と同じ考えによって、(5.5) ~ (5.8) 式を集合 A, B の選好関係に拡張すると次の 6 つの場合が考えられる。

(a) $\chi_{\oplus R}(x, B) = 1$ となる A の要素 x が存在す

る。すなわち、 A を B より可能的に選好することが可能である。この関係を $\chi_{\Diamond \oplus R}(A, B)$ と表すと、

$$\begin{aligned} \chi_{\Diamond \oplus R}(A, B) &= \sup_x \{ \chi_A(x) \wedge \chi_{\oplus R}(x, B) \} \\ &= \sup_{x, y} \{ \chi_A(x) \wedge \chi_B(y) \wedge \chi_R(x, y) \} \end{aligned} \quad (5.11)$$

となり、この関係は A を B より可能的に選好する関係である。

(b) $\chi_{\square R}(x, B) = 1$ となる A の要素 x が存在する。すなわち、 A を B より必然的に選好することが可能である。この関係を $\chi_{\Diamond \square R}(A, B)$ と表すと

$$\begin{aligned} \chi_{\Diamond \square R}(A, B) &= \sup_x \{ \chi_A(x) \wedge \chi_{\square R}(x, B) \} \\ &= \sup_x \inf_y \{ \chi_A(x) \wedge \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_R(x, y) \} \} \end{aligned} \quad (5.12)$$

となり、この関係は A を B より必然的に選好することが可能な関係である。

(c) A のすべての要素 x に対して $\chi_{\oplus R}(x, B) = 1$ となる。すなわち、 A を B より可能的に選好することは必然である。この関係を $\chi_{\square \Diamond \oplus R}(A, B)$ と表すと

$$\begin{aligned} \chi_{\square \Diamond \oplus R}(A, B) &= \inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_{\oplus R}(x, B) \} \\ &= \inf_x \sup_y \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \{ \chi_B(y) \wedge \chi_R(x, y) \} \} \end{aligned} \quad (5.13)$$

となり、この関係は A を B より可能的に選好することが必然である関係である。

(d) A のすべての要素 x に対して $\chi_{\square R}(x, B) = 1$ となる。すなわち、 A を B より必然的に選好することは必然である。この関係を $\chi_{\square \square R}(A, B)$ とすると

$$\begin{aligned} \chi_{\square \square R}(A, B) &= \inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_{\square R}(x, B) \} \\ &= \inf_{x, y} \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_R(x, y) \} \} \end{aligned} \quad (5.14)$$

となり、この関係は A を B より必然的に選好することが必然である関係である。

(e) B のすべての要素 y に対して $\chi_{\oplus R}(A, y) = 1$ となる。すなわち、 B が A に可能的に選好されることは必然である。この関係を $\chi_{\square \Diamond R}(A, B)$

B)と表すと

$$\begin{aligned}\chi_{\underline{B} \oplus_R}(A, B) &= \inf_y \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\underline{A} \oplus_R}(A, y) \} \\ &= \inf_y \sup_x \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \{ (1 - \chi_A(x)) \wedge \chi_R(x, y) \} \} \end{aligned} \quad (5.15)$$

となり、この関係は B が A に可能的に選好されることが必然である関係である。

(f) $\chi_{\underline{B} \oplus_R}(A, y) = 1$ となる B の要素 y が存在する。すなわち、 B が A に必然的に選好されることは可能である。この関係を $\chi_{\underline{B} \oplus_R}(A, B)$ と表すと

$$\begin{aligned}\chi_{\underline{B} \oplus_R}(A, B) &= \sup_y \{ \chi_B(y) \wedge \chi_{\underline{A} \oplus_R}(A, y) \} \\ &= \sup_y \inf_x \{ \chi_B(y) \wedge \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_R(x, y) \} \} \end{aligned} \quad (5.16)$$

となり、この関係は B が A に必然的に選好されることが可能である関係である。

いま選好関係 R を通常的不等式関係とすると、D.Dubois ら [10] の区間の4つの大小関係と一致する。図7に6つの区間の大小関係について(a)～(f)の関係が成立するものを示す。

図7 (a)～(f)の関係が成立する例

(a)～(f)の定義は通常の集合でなされているが、ファジィ集合またはファジィ数のときは、特性関数 χ をメンバシップ関数 μ に置き換えれば、同様

に(a)～(f)が定義できる。このとき6つの定義の大小関係は図8のようにになる。また次の関係がある。

$$\mu_{\underline{A} \oplus_R}(A, B) = \mu_{\sim \underline{A} \oplus \sim R}(A, B) \quad (5.17)$$

$$\mu_{\underline{A} \oplus_R}(A, B) = \mu_{\sim \underline{B} \oplus \sim R}(A, B) \quad (5.18)$$

$$\mu_{\underline{B} \oplus_R}(A, B) = \mu_{\sim \underline{A} \oplus \sim R}(A, B) \quad (5.19)$$

ただし、

$$\mu_{\sim R}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y) \quad (5.20)$$

である。これらの関係は様相論理における

$$\square \square A = \sim \diamond \diamond \sim A \quad (5.21)$$

$$\square \diamond A = \sim \diamond \square \sim A \quad (5.22)$$

あるいは、述語論理における

$$\forall x, \forall y P(x, y) = \sim \exists x, \exists y \sim P(x, y) \quad (5.23)$$

$$\forall x, \exists y P(x, y) = \sim \exists x, \forall y \sim P(x, y) \quad (5.24)$$

に対応している。

図8 (a)～(f)の関係の半順序関係

さて、(5.3), (5.4)式の計画問題を簡単にして、 $A_1(x) \geq B_1, A_2(x) \leq B_2$ (5.25) とする。ただし、 x が決定変数であり、 x が決められると不等式の左辺のファジィ数が決まるので、これを $A_1(x), A_2(x)$ と表している。(a)～(f)の規準のうち、(5.25)式の最初の不等式を(a)でまた2番目の不等式を(d)で評価するとすると、この計画問題は

$$\begin{aligned} \sup_x \mu_{\underline{A} \oplus_R}(A_1(x), B_1) \\ \wedge \mu_{\underline{B} \oplus_R}(B_2, A_2(x)) \end{aligned} \quad (5.26)$$

と表せる。ただし、ファジィ数を考えているので χ を μ に置きかえている。また他の定式化として

$$\begin{aligned} \sup_x \mu_{\otimes \otimes}^R(A_1(x), B_1) \\ \text{subject to } \mu_{\boxtimes \boxtimes}^R(B_2, A_2(x)) \geq h \end{aligned} \quad (5.27)$$

などが考えられる。ただし、 h は決定者によって決められる値である。より詳しくは乾口らの論文[11]を参照されたい。

6. むすび

最後に組織の様相性について簡単にふれる。社会科学の分野でも、可能性、必然性の概念が古くから用いられている。例えば、テンニースは1900年代初期に人間の心理状態には、本質的意志(本質的合致)と任意的意志(任意的同意)という二つのものが本源的にあることを述べている。前者は必然性、後者は可能性と解釈できる。すなわち、個人レベルで考えて、自分の中の可能性を広げたいし、また自分の中の必然性だけに関与したい欲求がある。このように、人間がもっている本源的な心理状態を反映して、運命共同体的に結びついている「共同社会」と利害打算的に理性的に結びついている「利益社会」という二つの組織が本来必要であると述べている。

またハーズバーグは職務満足の調査から動機づけ-衛生理論を確立した。この調査研究から次の二つの因子があることを見つけた。

満足 — 満足でない(M因子)

不満足 — 不満足でない(H因子)

積極的なM因子(Motivator)と消極的なH因子(Hygiene)とによって職務満足が規定されることを述べている。M因子は成長の欲求(自己実現の欲求)と結びつけられ、同様にH因子は欠如するものを満たす欲求(生理的、安全、帰属、地位の欲求)と結びつけられている。この研究でも、初期には満足の反対が不満足と考えていたが、これでは職務満足を説明できなくなり、M因子とH因子という様相性が考えられるようになった。

より人間らしい組織を求めて、形式的・機械的ピラミッド型組織から、条件適合理論により流動化組織、例えばネットワーク型組織なども提案され、組織のファジィ化が進んでいる[12]。組織の

弁証法的発展という実事が示されており、弁証法は我々の不完全性から導かれている。条件適合理論はファジィ分割による限定された領域における比較的単純な理論という考え方と類似していると思われる。すなわち、組織の種々の状況に応じた組織形態が模索されつつある。

以上、可能性・必然性という様相概念を導入したファジィモデルについて述べた。われわれの不完全性や部分的無知さを認めるならば、可能性・必然性という様相性ができ、世界が豊かになる。しかし、ファジィモデリングという考えはまだ新しく、不備な点も多くあるが、まだ未知の広範囲な領域が残されている。

可能性・必然性という概念でこの解説をまとめたが、ファジィモデリングの全体としては筆者の第5回ファジィシンポジウムの講演論文[13]を参照されたい。

参考文献

- [1] Z.Pawlak: Rough Classification, Int.J. Man-Machine Studies, 20, 469-483, 1984.
- [2] W.Lipski: On Semantic Issues connected with Incomplete Information in Databases ACM Trans. on Database Systems, 4, 262-296, 1979.
- [3] D.Dubois and H.Prade: Twofold Fuzzy Sets and Rough Sets-Some Issues in Knowledge Representation, Fuzzy Sets and Systems, 23, 3-18, 1987.
- [4] A.P.Dempster: Upper and Lower Probabilities induced by a Multivalued Mapping, Anal. Math. Statist., 38, 447-511, 1967.
- [5] G.Shafer: A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, 1976.
- [6] 田中・林・長坂: 可能性測度による区間回帰分析, 行動計量学, 16, 1, 1~7, 1988.
- [7] 田中・和多田・林: ファジィ線形回帰分析の3つの定式化, 計測自動制御学会論文集, 22, 10, 1051-1057, 1986.
- [8] 田中・林・浅居: ファジィGMDH, システムと制御, 30, 9, 581-587, 1986.
- [9] 乾口・市橋・田中: 様相概念に基づくファジィ選好関係の拡張とその性質, 計測自動制御学会論文集, 24, 7, 738-745, 1988.

- [10] D.Dubois and H.Prade : Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory, Inform, Sci., 30, 183-224, 1983.
- [11] 乾口・市橋・久米：ファジィ数理計画問題の様相的構成, システム制御情報学会論文誌, 2, 3, 69-79, 1989.
- [12] 森：組織のファジィ構造について, 昭和 63 年度 日本人間工学会関西支部大会講演論文集, 45-47, 1988.
- [13] 田中：ファジィモデリング, 第 5 回システムシンポジウム講演論文集, 3-8, 1989.

[問い合わせ先]

〒591 堺市百舌鳥梅町4-804

大阪府立大学 工学部 経営工学科

田中 英夫

TEL : 0722-52-1161(内)2376

FAX : 0722-59-3340

(1989 年 11 月 4 日受付)

—— 著 者 紹 介 ——

田 中 英 夫 (たなか ひでお)

大阪府立大学 工学部 経営工学科

1962年, 神戸大学工学部計測工学科卒業, 1969年, 大阪市立大学大学院博士課程(電気工学専攻)修了, 同年大阪府立大学工学部経営工学科助手, 現在同教授, ファジィシステム理論とその応用に関する研究に従事, 国際ファジィシステム学会, 日本OR学会などの会員.