ファジィ多目的計画問題に対する解の概念[†]

乾口 雅弘* 久米 靖文*

従来、係数をファジィ数とする数理計画問題では、問題の複雑さのため、主として意思決定者から選好構造や希求水準を引き出すことにより目的関数を取り扱ってきた。すなわち、最適化よりむしろ満足化を行ってきた。近年、ファジィ数理計画問題に対しても、最適性や有効性の概念を拡張することにより、目的関数を取り扱い、最適化を試みようとする研究がある。本研究では、二つの方法により、通常の多目的計画問題における有効解あるいは非支配解の概念をファジィ多目的計画問題へ拡張する。二つの方法とは、有効解の概念を直接拡張する方法と、目的空間上の支配関係から決定空間上の支配関係を構成することによる方法である。これらの方法に従い様相測度を用いて定義すると、前者の方法では2種類、後者の方法では6種類、計8種類の解の概念が得られる。そこで、これら8種類の解を整理するために、これらの解の強弱関係を議論する。その結果、一般に、これらの解は6種類にまとめられ、特に、各ファジィ係数間に相互関係が存在しない多目的線形計画問題の場合は、支配関係を通常の関係 $\geq$ とすれば、4種類になることが明らかになった。これらの解は、様相測度を用いて構成されているので、解の意味を言語を用いて表すことができ、ファジィ多目的計画問題の解の妥当性を議論するうえで重要になると考えられる。

キーワード : ファジィ多目的計画問題、有効解、非支配解、可能性測度、必然性測度

1. はじめに

Bellman と Zadeh [1] のファジィ決定に基づきファジィ数理計画問題が田中ら [2] により定式化されて以来、約 17 年が経過した。その間、ファジィ数理計画問題は、意思決定者の選好のあいまいさばかりではなく、係数のあいまいさをも取り扱えるように発展した [3-11]。係数のあいまいさを含むファジィ数理計画問題は通常の数理計画問題とは異なり、ill-posed な問題となり、さまざまな観点から定式化されている。これらのファジィ数理計画問題では、主として意思決定者の選好や希求水準を引き出すことにより目的関数を扱って

いた。すなわち、これらの方法では、目的関数を最適化するよりむしろ満足化していると考えられる。

近年、係数のあいまいさを含む目的関数の新たな取り扱い方法として、通常の数理計画問題の最適解、有効解(一般に有効解はパレート解、非劣解を意味する [12,13] が、非支配解 [14] を意味することもある [15])の概念を拡張しようとする動きがある [16-22]。Luhandjula [17,18] は、拡張原理 [23] を用いて決定空間上の支配関係を拡張することにより、 β -可能的最適解、 β -可能的有効解を定義している。Sakawa ら [19,20] は、 α -レベル集合に基づき α -パレート最適解および M - α -パレート最適解を定義している。さらに、坂和ら [21,22] は、Dubois ら [24] によるファジィ数間の四つの大小関係を、決定変数により得られる各目的空間上のファジィ数に適用して、4種類の β -パレート最適解、 γ -パレート最適解を定義している。

[†] Solution Concepts for Fuzzy Multiple Objective Programming Problems

Masahiro INUIGUCHI and Yasufumi KUME

* 大阪府立大学 工学部
College of Engineering, University of Osaka Prefecture

一方、ファジィ数理計画問題の特殊な場合である区間数理計画問題に対しても、同様な試みがなされている [25–27]。Bitran [25] は、区間で制限されたすべてのパラメータに対して有効となる解と、区間で制限された少なくとも一つのパラメータに対して有効となる解が考えられることを指摘している。これらは、必然的有效解、可能的有效解と考えることができる [26]。また、乾口ら [27] は、目的空間上の支配関係から決定空間上の支配関係を構成し、これを用いて、各区間パラメータに相互関係がない場合には、四つの非支配解が定義できることを示し、Bitran の必然的有效解、可能的有效解との関係を論じている。

以上の有効解の定義は類似しているが、同一の概念ではない。本研究では、各目的関数の係数をファジィ数とする多目的計画問題を取り上げ、それに対するいくつかの有効解を定義し、その関係を明らかにする。これらの有効解は、ファジィ多目的計画問題に対する解の妥当性を議論するうえで重要になると考えられる。

ファジィ数理計画問題への有効解の概念の拡張方法として、基本的には次の三つの方法が考えられる。すなわち、Bitran の方法と同様に解の有効性を直接拡張する方法、Luhandjula や乾口らの方法のように、目的関数が点対集合写像であることを加味して、目的空間上の支配関係から決定空間上の支配関係を構成することにより定義する方法、そして、坂和らの方法と類似した、決定変数により得られる目的空間上のファジィ集合間の支配関係へ要素間の支配関係を拡張することにより定義する方法である。記述の簡単のため、これらの方法をそれぞれ、直接的定義、第一種間接的定義、第二種間接的定義と呼ぶことにする。

ここでは、紙数の都合により、直接的定義および第一種間接的定義に従い有効解を定義し、定義された有効解の関係を吟味する。第二種間接的定義による有効解については、稿を改めて報告するつもりである。

2. 準備

2.1 ファジィ多目的計画問題

本研究では、各目的関数の係数をファジィ数とする次の多目的計画問題を考える。

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \\ &\text{subject to} \\ &\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

ただし、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}), f_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \dots, f_p(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$ 、 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_l(\mathbf{x}))$ 、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ であり、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_q)$ は目的関数 $\mathbf{f}$ の係数ベクトルで、係数 a_i はファジィ数(可能性分布)である。すなわち、 a_i は係数の取りうる範囲をファジィ集合で表している(したがって、 $\mathbf{a}$ は係数ベクトルの取りうる領域を表す)。係数ベクトル $\mathbf{a}$ はメンバシップ関数 $\mu_{\mathbf{a}}: \mathbf{R}^q \rightarrow [0, 1]$ をもち、 $\mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = 1$ なる $\mathbf{a}$ が存在する(このことを正規性という)ものと仮定する。(2.1)式の決定変数 $\mathbf{x}$ は n 次元ベクトルであるので、決定空間は $\mathbf{R}^n$ となる。目的関数は、 p 個あるので、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ は $\mathbf{R}^p$ 上のファジィ集合となり、目的空間は $\mathbf{R}^p$ である。また、 $\mathbf{a}$ はファジィ数を成分とする q 次元ベクトルであるので、 $\mathbf{a}$ に束縛されるパラメータ $\mathbf{a}$ の空間(以後パラメータ空間と記す)は $\mathbf{R}^q$ となる。なお、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ は拡張原理 [23] を用いて求められるものとする。すなわち、メンバシップ関数を用いて、

$$\mu_{f(\mathbf{x}, \mathbf{a})}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sup_{\mathbf{a} \in h(\mathbf{y}; \mathbf{x})} \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) & ; h(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \neq \emptyset \\ 0 & ; h(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \emptyset \end{cases} \quad (2.2)$$

$$h(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \{\mathbf{a} / \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{y}\} \quad (2.3)$$

となる。

(2.1)式の制約集合(通常の集合)を F と記し、その特性関数を μ_F とする。なお、通常の多目的計画問題は係数ベクトル $\mathbf{a}$ を通常のベクトル $\mathbf{a}$ としたものである。

2.2 可能性測度と必然性測度

正規なファジィ集合 A (可能性分布 [23]) が与えられたとき、任意のファジィ集合 B に対して、“ A

のもとで $\underline{B}$ である可能性の度合”、“ $\underline{A}$ のもとで $\underline{B}$ である必然性の度合”はそれぞれ、次のように与えられる [23,24]。

$$\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) = \sup_y \{ \mu_{\underline{A}}(y) \wedge \mu_{\underline{B}}(y) \} \quad (2.4)$$

$$N_{\underline{A}}(\underline{B}) = \inf_y \{ (1 - \mu_{\underline{A}}(y)) \vee \mu_{\underline{B}}(y) \} \quad (2.5)$$

ただし、 $b \wedge c = \min(b, c)$ 、 $b \vee c = \max(b, c)$ であり、 $\mu_{\underline{A}} : U \rightarrow [0, 1]$ 、 $\mu_{\underline{B}} : U \rightarrow [0, 1]$ はそれぞれ、 $\underline{A}$ 、 $\underline{B}$ のメンバシップ関数である。また、 U は全体集合で、 $\Pi_{\underline{A}}(\underline{B})$ 、 $N_{\underline{A}}(\underline{B})$ はそれぞれ、ファジィ集合 $\underline{A}$ のもとでのファジィ集合 $\underline{B}$ の可能性測度、必然性測度と呼ばれている。

$\Pi_{\underline{A}}(\underline{B})$ 、 $N_{\underline{A}}(\underline{B})$ について、次式が成立する。

$$\Pi_{\underline{A}}(U) = 1, \quad \Pi_{\underline{A}}(\phi) = 0 \quad (2.6)$$

$$\Pi_{\underline{A}}(\underline{B} \cup \underline{C}) = \Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) \vee \Pi_{\underline{A}}(\underline{C}) \quad (2.7)$$

$$N_{\underline{A}}(U) = 1, \quad N_{\underline{A}}(\phi) = 0 \quad (2.8)$$

$$N_{\underline{A}}(\underline{B} \cap \underline{C}) = N_{\underline{A}}(\underline{B}) \wedge N_{\underline{A}}(\underline{C}) \quad (2.9)$$

$$\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) = 1 - N_{\underline{A}}(\underline{B}) \quad (2.10)$$

$$\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) \geq N_{\underline{A}}(\underline{B}) \quad (2.11)$$

$$\underline{B} \subseteq \underline{C} \Rightarrow \Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) \leq \Pi_{\underline{A}}(\underline{C}) \quad (2.12)$$

$$\underline{B} \subseteq \underline{C} \Rightarrow N_{\underline{A}}(\underline{B}) \leq N_{\underline{A}}(\underline{C}) \quad (2.13)$$

$$\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) > h \Leftrightarrow (\underline{A})_h \cap (\underline{B})_h \neq \phi \quad (2.14)$$

$$\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) \leq h \Leftrightarrow (\underline{A})_h \cap (\underline{B})_h = \phi \quad (2.15)$$

$$N_{\underline{A}}(\underline{B}) \geq h \Leftrightarrow (\underline{A})_{1-h} \subseteq [\underline{B}]_h \quad (2.16)$$

$$N_{\underline{A}}(\underline{B}) < h \Leftrightarrow (\underline{A})_{1-h} \not\subseteq [\underline{B}]_h \quad (2.17)$$

ただし、 $\underline{A} \cup \underline{B}$ 、 $\underline{A} \cap \underline{B}$ 、 $\underline{B}$ はそれぞれ、 $\underline{A}$ と $\underline{B}$ の和集合、共通集合および $\underline{B}$ の補集合で、メンバシップ関数を用いて、次式で定義される。

$$\mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(y) = \mu_{\underline{A}}(y) \vee \mu_{\underline{B}}(y) \quad (2.18)$$

$$\mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(y) = \mu_{\underline{A}}(y) \wedge \mu_{\underline{B}}(y) \quad (2.19)$$

$$\mu_{\underline{B}}(y) = 1 - \mu_{\underline{B}}(y) \quad (2.20)$$

包含関係 $\underline{B} \subseteq \underline{C}$ は、次式で定義される。

$$\mu_{\underline{B}}(y) \leq \mu_{\underline{C}}(y), \quad \forall y \in U \quad (2.21)$$

また、 $(\underline{A})_h$ 、 $[\underline{A}]_h$ はそれぞれ、強 h -レベル集合、(弱) h -レベル集合と呼ばれ、

$$(\underline{A})_h = \{ y / \mu_{\underline{A}}(y) > h \} \quad (2.22)$$

$$[\underline{A}]_h = \{ y / \mu_{\underline{A}}(y) \geq h \} \quad (2.23)$$

と定義される。通常、 $(\underline{A})_h$ 、 $[\underline{A}]_h$ はそれぞれ、 $h \in [0, 1]$ 、 $h \in (0, 1]$ に対して定義されるが、ここでは、これらの h の制限を設けず、 $h \in \mathbb{R}$ とする。したがって、 $h < 0$ のとき、 $(\underline{A})_h$ は全体集合、 $h \geq 1$ のとき、 $(\underline{A})_h$ は空集合となり、 $h \leq 0$ のとき、 $[\underline{A}]_h$ は全体集合、 $h > 1$ のとき、 $[\underline{A}]_h$ は空集合となる。一般に、次式が成立する。

$$(\underline{A})_h = [\underline{A}]_{1-h}, \quad [\underline{A}]_h = (\underline{A})_{1-h} \quad (2.24)$$

(2.6)、(2.7)式は、可能性測度の特徴的な性質を示し、(2.8)、(2.9)式は、必然性測度の特徴的な性質を示している。(2.7)、(2.9)式はそれぞれ、様相論理 [28] における可能性、必然性の性質

$$\Diamond(A \vee B) = \Diamond A \vee \Diamond B \quad (2.25)$$

$$\Box(A \wedge B) = \Box A \wedge \Box B \quad (2.26)$$

に対応している。ただし、 $\Diamond$ 、 $\Box$ は可能性演算子、必然性演算子を示し、 $\wedge$ 、 $\vee$ は連言、選言を表している。(2.10)式は、“ $\underline{A}$ のもとで $\underline{B}$ であることが可能である”ことと、“ $\underline{A}$ のもとで $\underline{B}$ でないことが必然ではない”ことが等価であること示し、様相論理 [28] における可能性と必然性の双対関係すなわち、

$$\Diamond A = \sim \Box \sim A \quad (2.27)$$

に対応している。ただし、 $\sim$ は否定を表している。また、(2.11)式は可能性測度が常に必然性測度以上であることを示し、“ $\underline{A}$ のもとで $\underline{B}$ であることが必然である”ならば、“ $\underline{A}$ のもとで $\underline{B}$ であることが可能である”ということを表している。すなわち、様相論理 [28] における次式に対応している。

$$\Box A \rightarrow \Diamond A \quad (2.28)$$

ただし、 $\rightarrow$ は含意を表している。(2.12)、(2.13)式は、可能性測度および必然性測度の包含に対する単調増加性を表している。このことより、

$$\Pi_{\underline{A}}(\underline{B} \cap \underline{C}) \leq \Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) \wedge \Pi_{\underline{A}}(\underline{C}) \quad (2.29)$$

$$N_{\underline{A}}(\underline{B} \cup \underline{C}) \geq N_{\underline{A}}(\underline{B}) \vee N_{\underline{A}}(\underline{C}) \quad (2.30)$$

が成立する。これらは、様相論理 [28] における

$$\Diamond(A \wedge B) \rightarrow \Diamond A \wedge \Diamond B \quad (2.31)$$

$$\Box A \vee \Box B \rightarrow \Box(A \vee B) \quad (2.32)$$

に対応している。(2.14)～(2.17)式より、

$$\begin{aligned}\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) &= \sup \{h/(\underline{A})_h \cap (\underline{B})_h \neq \phi\} \\ &= \inf \{h/(\underline{A})_h \cap (\underline{B})_h = \phi\}\end{aligned}\quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}N_{\underline{A}}(\underline{B}) &= \sup \{h/(\underline{A})_{1-h} \subseteq [\underline{B}]_h\} \\ &= \inf \{h/(\underline{A})_{1-h} \not\subseteq [\underline{B}]_h\}\end{aligned}\quad (2.34)$$

と表せる。さらに、(2.33)、(2.34)式より、

$$\begin{aligned}\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) &= \sup \{h/[\underline{A}]_h \cap (\underline{B})_h \neq \phi\} \\ &= \sup \{h/(\underline{A})_h \cap [\underline{B}]_h \neq \phi\} \\ &= \sup \{h/[\underline{A}]_h \cap [\underline{B}]_h \neq \phi\} \\ &= \inf \{h/[\underline{A}]_h \cap (\underline{B})_h = \phi\} \\ &= \inf \{h/(\underline{A})_h \cap [\underline{B}]_h = \phi\} \\ &= \inf \{h/[\underline{A}]_h \cap [\underline{B}]_h = \phi\}\end{aligned}\quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}N_{\underline{A}}(\underline{B}) &= \sup \{h/(\underline{A})_{1-h} \subseteq (\underline{B})_h\} \\ &= \sup \{h/[\underline{A}]_{1-h} \subseteq [\underline{B}]_h\} \\ &= \sup \{h/[\underline{A}]_{1-h} \subseteq (\underline{B})_h\} \\ &= \inf \{h/(\underline{A})_{1-h} \not\subseteq (\underline{B})_h\} \\ &= \inf \{h/[\underline{A}]_{1-h} \not\subseteq [\underline{B}]_h\} \\ &= \inf \{h/[\underline{A}]_{1-h} \not\subseteq (\underline{B})_h\}\end{aligned}\quad (2.36)$$

となる。たとえば、(2.35)式の最初の三つの等式は、次のように示すことができる。明らかに、

$$\begin{aligned}\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) &= \sup \{h/(\underline{A})_h \cap (\underline{B})_h \neq \phi\} \\ &\leq \sup \{h/[\underline{A}]_h \cap (\underline{B})_h \neq \phi\} \\ &\leq \sup \{h/[\underline{A}]_h \cap [\underline{B}]_h \neq \phi\} \\ \Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) &= \sup \{h/(\underline{A})_h \cap (\underline{B})_h \neq \phi\} \\ &\leq \sup \{h/(\underline{A})_h \cap [\underline{B}]_h \neq \phi\} \\ &\leq \sup \{h/[\underline{A}]_h \cap [\underline{B}]_h \neq \phi\}\end{aligned}$$

が成立する。

$$k = \sup \{h/[\underline{A}]_h \cap [\underline{B}]_h \neq \phi\}$$

とすると、任意の $e > 0$ について、

$$[\underline{A}]_{k-e} \cap [\underline{B}]_{k-e} \neq \phi$$

が成立し、

$$(\underline{A})_h \cap (\underline{B})_h \neq \phi, \quad h < k - e$$

となる。 e は任意であるから、

$$(\underline{A})_h \cap (\underline{B})_h \neq \phi, \quad h < k$$

となり、(2.33)式より、 $\Pi_{\underline{A}}(\underline{B}) \geq k$ となる。したがって、(2.35)式の最初の三つの等式が示される。

他も容易に証明できる。

3. 直接的定義

いま、目的空間上の反射的な支配関係 $\underline{D}$ (ファジィ関係でもよい) が与えられたとする。反射的な支配関係 $\underline{D}$ は、メンバシップ関数 $\mu_{\underline{D}}$ をもち、 $\mu_{\underline{D}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ は $\mathbf{y}$ が $\mathbf{z}$ を支配する度合を表すとする。また、反射的とは、任意の $\mathbf{y}$ について $\mu_{\underline{D}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 1$ が成立することをいう。

このとき、反射的な支配関係 $\underline{D}$ に基づき、通常の多目的計画問題の有効解集合 $\underline{Eff}$ は次のように定義できる。すなわち、 $\underline{D}$ から目的空間上の非反射的な強支配関係 $\underline{D}^s$ をメンバシップ関数を用いて、

$$\mu_{\underline{D}^s}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mu_{\underline{D}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \wedge (1 - \mu_{\underline{D}}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) \quad (3.1)$$

と定義することにより、

$$\begin{aligned}\mu_{\underline{Eff}}(\mathbf{x}^* : \mathbf{a}) \\ &= 1 - \sup_{\mathbf{x}} \{\mu_F(\mathbf{x}) \wedge \mu_{\underline{D}^s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))\} \\ &= \inf_{\mathbf{x} \in F} \{1 - \mu_{\underline{D}^s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))\}\end{aligned}\quad (3.2)$$

と定義できる。ただし、 $\mu_{\underline{Eff}}(\cdot : \mathbf{a})$ は $\underline{Eff}$ のメンバシップ関数であり、以下の定義の簡便のため、通常の係数ベクトル $\mathbf{a}$ に依存した形で表記している。 $\mu_{\underline{Eff}}(\mathbf{x}^* : \mathbf{a})$ は、“すべての実行可能解に対する $\mathbf{x}^*$ の強支配されない度合”を示している。

$\underline{D}$ を通常の関係 $\geq$ とすると、 $\underline{D}^s$ は通常の関係 $\geq$ [29] すなわち、

$$\mu_{\geq}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{cases} 1; & \mathbf{y} \geq \mathbf{z} \text{ かつ } \mathbf{y} \neq \mathbf{z} \\ 0; & \text{その他} \end{cases} \quad (3.3)$$

となり、(3.2)式で定義される $\underline{Eff}$ は通常の有効解集合 [12, 13] と一致する。ここで、 $\mu_{\geq}$ は関係 $\geq$ の特性関数である。

Bitran の考え方に基づき、(3.2)式を(2.1)式のファジィ多目的計画問題へ適用できるように拡張すると、次のようになる。すなわち、必然的に有効である解、可能的に有効である解という意味から、必然的有效解集合 $\square \underline{Eff}$ 、可能的有効解集合 $\diamond \underline{Eff}$ は次のように定義される。

$$\mu_{\Box Eff}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{a}} \{ (1 - \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})) \vee \mu_{Eff}(\mathbf{x} : \mathbf{a}) \} \quad (3.4)$$

$$\mu_{\Diamond Eff}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{a}} \{ \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \wedge \mu_{Eff}(\mathbf{x} : \mathbf{a}) \} \quad (3.5)$$

ただし、 $\mu_{\Box Eff}$ 、 $\mu_{\Diamond Eff}$ は $\Box Eff$ 、 $\Diamond Eff$ のメンバシップ関数である。

(3.3)式と同様に、 $\underline{D}$ を通常の関係 $\geq$ とし、 $\underline{a}$ を通常の間とすると、(3.4)、(3.5)式で定義される $\Box Eff$ 、 $\Diamond Eff$ はそれぞれ、Bitran [25] の定義した必然的有効解集合、可能的有効解集合 [26] と一致する。この場合、 $\underline{a}$ は通常の集合となり、(3.4)式は $\underline{a}$ に属するすべてのパラメータに対して有効となる解の集合の特性関数を表し、(3.5)式は $\underline{a}$ に属する少なくとも一つのパラメータに対して有効となる解の集合の特性関数となる。 $\underline{a}$ が係数ベクトルの取りうる領域を示していることを想起すると、必然的有効解は、 $\underline{a}$ に属するどのようなパラメータが実現しても、通常の有効解の意味で有効である解を示している。また、可能的有効解は、 $\underline{a}$ に属する特別なパラメータの実現により、有効となる解を示している。

ここで、パラメータ空間上のファジィ集合 $Eff_{\mathbf{x}}$ を

$$\mu_{Eff_{\mathbf{x}}}(\mathbf{a}) = \mu_{Eff}(\mathbf{x} : \mathbf{a}) \quad (3.6)$$

と定義すると、

$$\mu_{\Box Eff}(\mathbf{x}) = N_{\underline{a}}(Eff_{\mathbf{x}}) \quad (3.7)$$

$$\mu_{\Diamond Eff}(\mathbf{x}) = \Pi_{\underline{a}}(Eff_{\mathbf{x}}) \quad (3.8)$$

と表せる。したがって、(3.4)、(3.5)式の値は、可能性分布 $\underline{a}$ のもとで、 $\mathbf{x}$ が有効となる必然性、可能性の度合を示している。

$\mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = 1$ なる $\mathbf{a}$ が存在するので、(2.11)式より、

$$\mu_{\Box Eff}(\mathbf{x}) \leq \mu_{\Diamond Eff}(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

が成立する。すなわち、 $\Box Eff$ が $\Diamond Eff$ よりもメンバシップ値が小さく、解の制限が強いことがわかる。

4. 第一種間接的定義

4.1 決定空間上の支配関係の構成

本章では、Luhandjula [17,18] や乾口ら [27] の方法と同様に、与えられた目的空間上の支配関係から、決定空間上の支配関係を構成することにより有効解を定義する方法について述べる。この際、目的関数が点対集合写像であることから、可能性測度、必然性測度を用いる。この方法では、支配関係を構成することに重点がおかれているので、非支配解と呼ぶことにする。

目的空間上の支配関係 $\underline{D}$ が与えられているので、 $f(\cdot, \underline{a})$ が決定空間から目的空間への点対集合(厳密にはファジィ集合)写像であることから、可能性測度、必然性測度を用いて、決定空間上の関係 $\Diamond \underline{D}$ 、 $\Box \underline{D}$ を次のように構成することができる。

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond \underline{D}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \sup_{\mathbf{a}} \{ \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \wedge \mu_{\underline{D}}(f(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}), f(\mathbf{x}_2, \mathbf{a})) \} \\ \mu_{\Box \underline{D}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \inf_{\mathbf{a}} \{ (1 - \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})) \vee \mu_{\underline{D}}(f(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}), f(\mathbf{x}_2, \mathbf{a})) \} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\vee \mu_{\underline{D}}(f(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}), f(\mathbf{x}_2, \mathbf{a})) \} \quad (4.2)$$

ここで、パラメータ空間上のファジィ集合 $\mathbf{x}_1 \underline{D} \mathbf{x}_2$ を

$$\mu_{\mathbf{x}_1 \underline{D} \mathbf{x}_2}(\mathbf{a}) = \mu_{\underline{D}}(f(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}), f(\mathbf{x}_2, \mathbf{a})) \quad (4.3)$$

と定義すると、

$$\mu_{\Diamond \underline{D}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_1 \underline{D} \mathbf{x}_2) \quad (4.4)$$

$$\mu_{\Box \underline{D}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = N_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_1 \underline{D} \mathbf{x}_2) \quad (4.5)$$

が成立する。したがって、 $\Diamond \underline{D}$ 、 $\Box \underline{D}$ はそれぞれ、“ $\mathbf{x}_1$ が $\mathbf{x}_2$ を可能的に支配する関係”、“ $\mathbf{x}_1$ が $\mathbf{x}_2$ を必然的に支配する関係”と考えることができる。このことより、 $\Diamond \underline{D}$ 、 $\Box \underline{D}$ をそれぞれ、可能的支配関係、必然的支配関係と呼ぶことにする。また、 $\underline{D}$ が通常の関係 $\geq$ で、 $\underline{a}$ が通常の場合の場合を考えると、 $\Diamond \underline{D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ のメンバシップ値が1になることは、 $\underline{a}$ に属する少なくとも一つのパラメータ $\mathbf{a}$ に対して、 $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x}_2, \mathbf{a})$ となることを示している。また、 $\Box \underline{D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ のメンバシップ値が1になることは、 $\underline{a}$ に属するすべてのパラメータ $\mathbf{a}$

に対して、 $f(x_1, a) \geq f(x_2, a)$ となることを示している。 a が係数ベクトルの取りうる領域を表していることを想起すると、 $\Diamond D(x_1, x_2)$ のメンバシップ値が 1 になることは、 x_1 が x_2 を支配すること ($f(x_1, a) \geq f(x_2, a)$) が可能であることを意味し、 $\Box D(x_1, x_2)$ のメンバシップ値が 1 になることは、 x_1 が x_2 を支配すること ($f(x_1, a) \geq f(x_2, a)$) が必然であることを意味することが理解できる。

(4.1)、(4.2) 式の D に強支配関係 D^s を代入することにより、決定空間上の強支配関係として、可能的強支配関係 $\Diamond D^s$ 、必然的強支配関係 $\Box D^s$ が得られる。 D は反射的であったから、 $\Diamond D$ 、 $\Box D$ も反射的である。また、 $\Diamond D^s$ 、 $\Box D^s$ は非反射的である。 D から D^s を構成したように $\Diamond D$ 、 $\Box D$ からその組合せにより非反射的な支配関係 $\Diamond^s D$ 、 $\Diamond^s D$ 、 $\Box^s D$ 、 $\Box^s D$ が得られる。すなわち、メンバシップ関数を用いて、

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond^s D}(x_1, x_2) &= \mu_{\Diamond D}(x_1, x_2) \wedge (1 - \mu_{\Box D}(x_2, x_1)) \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond^s D}(x_1, x_2) &= \mu_{\Diamond D}(x_1, x_2) \wedge (1 - \mu_{\Diamond D}(x_2, x_1)) \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Box^s D}(x_1, x_2) &= \mu_{\Box D}(x_1, x_2) \wedge (1 - \mu_{\Box D}(x_2, x_1)) \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Box^s D}(x_1, x_2) &= \mu_{\Box D}(x_1, x_2) \wedge (1 - \mu_{\Diamond D}(x_2, x_1)) \quad (4.9) \end{aligned}$$

と定義できる。min 演算 $\wedge$ を連言と解釈すると、たとえば、 $\Diamond^s D$ は、“ x_1 が x_2 を支配することが可能であり、かつ、 x_1 が x_2 を支配することが必然ではない関係”と考えることができる。他も同様に解釈できる。

定義より、

$$\mu_{\Diamond D}(x_1, x_2) \geq \mu_{\Diamond^s D}(x_1, x_2) \quad (4.10)$$

$$\mu_{\Diamond D}(x_1, x_2) \geq \mu_{\Diamond^s D}(x_1, x_2) \quad (4.11)$$

が成立する。また、 $\mu_a(a) = 1$ なる a が存在するので、(2.11) 式より、

$$\mu_{\Diamond D}(x_1, x_2) \geq \mu_{\Box D}(x_1, x_2) \quad (4.12)$$

が成立する。したがって、

$$\mu_{\Diamond^s D}(x_1, x_2) \geq \mu_{\Diamond^s D}(x_1, x_2) \quad (4.13)$$

となる。これらのことより、 $\Diamond^s D$ 、 $\Diamond^s D$ をそれぞれ、弱意強可能的支配関係、強意強可能的支配関係と呼ぶ。同様な理由により、 $\Box^s D$ 、 $\Box^s D$ をそれぞれ、弱意強必然的支配関係、強意強必然的支配関係と呼ぶ。

4.2 非支配解集合の定義

決定空間上の非反射的な六つの支配関係 $\Diamond D^s$ 、 $\Box D^s$ 、 $\Diamond^s D$ 、 $\Diamond^s D$ 、 $\Box^s D$ 、 $\Box^s D$ を用いて、(2.1) 式の六つの非支配解集合 $\Box ND$ 、 $\Diamond ND$ 、 $\Box ND$ 、 $\Box ND$ 、 $\Diamond ND$ 、 $\Diamond ND$ を次のように定義できる。すなわち、メンバシップ関数を用いて、

$$\begin{aligned} \mu_{\Box ND}(x^*) &= 1 - \sup_x \{ \mu_F(x) \wedge \mu_{\Diamond D^s}(x, x^*) \} \quad (4.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond ND}(x^*) &= 1 - \sup_x \{ \mu_F(x) \wedge \mu_{\Box D^s}(x, x^*) \} \quad (4.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Box ND}(x^*) &= 1 - \sup_x \{ \mu_F(x) \wedge \mu_{\Diamond^s D}(x, x^*) \} \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond ND}(x^*) &= 1 - \sup_x \{ \mu_F(x) \wedge \mu_{\Diamond^s D}(x, x^*) \} \quad (4.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Box ND}(x^*) &= 1 - \sup_x \{ \mu_F(x) \wedge \mu_{\Box^s D}(x, x^*) \} \quad (4.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond ND}(x^*) &= 1 - \sup_x \{ \mu_F(x) \wedge \mu_{\Box^s D}(x, x^*) \} \quad (4.19) \end{aligned}$$

となる。 F が通常集合であることに注意すると、

$$\mu_{\Box ND}(x^*) = \inf_{x \in F} \{ 1 - \mu_{\Diamond D^s}(x, x^*) \} \quad (4.20)$$

などのように表すことができる。このことより、 $\mu_{\Box ND}(x^*)$ は、“すべての実行可能解に対する x^* の強支配されることが可能でない度合”、すなわち、“すべての実行可能解に対する x^* の強支配されないことが必然である度合”を示していると解釈できる。それゆえ、 $\Box ND$ を非支配必然解と呼ぶこ

とにする。同様な理由から、 $\Diamond ND$ を非支配可能解と呼ぶ。また、(4.14)～(4.19)式の定義により、強－弱、可能－必然が逆転することにより、 $\Box ND$ 、 $\Box ND$ 、 $\Diamond ND$ 、 $\Diamond ND$ をそれぞれ、強意非支配必然解、弱意非支配必然解、強意非支配可能解、弱意非支配可能解と呼ぶことにする。たとえば、 $\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}^*)$ は、“すべての実行可能解に対して、 $\mathbf{x}^*$ が支配されないことが必然であるか、支配することが可能である度合”を示している。他も同様に解釈できる。

D を通常の関係 $\geq$ とすると、 $\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) > 1 - \beta$ なる解は Luhandjula [17] の β -可能的有効解となり、 β -可能的有効解は $\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) \geq 1 - \beta$ となる。また、 D を通常の関係 $\geq$ とし、 a_i を通常の開区間とすると、非支配必然解、非支配可能解、弱意非支配必然解、強意非支配可能解は、乾口ら [27] の四つの非支配解と一致する。

4.3 六つの非支配解の強弱関係

ここで、(4.14)～(4.19)式で定義される六つの非支配解の強弱関係について吟味する。

$\mu_a(\mathbf{a}) = 1$ なる $\mathbf{a}$ が存在するので、(2.11)式より、

$$\mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq \mu_{\Box ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (4.21)$$

が成立する。したがって、定義より、

$$\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) \leq \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}) \quad (4.22)$$

となる。また、(4.12)式および定義より、明らかに次の関係が成立する。

$$\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) \leq \mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) \quad (4.23)$$

$$\mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}) \leq \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}) \quad (4.24)$$

$$\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) \leq \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

$$\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) \leq \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}) \quad (4.26)$$

さらに、パラメータ空間上のファジィ集合 $\mathbf{x}_1 D^s \mathbf{x}_2$ を

$$\mu_{\mathbf{x}_1 D^s \mathbf{x}_2}(\mathbf{a}) = \mu_{D^s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, \mathbf{a})) \quad (4.27)$$

と定義すると、

$$\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Pi_a(\mathbf{x}_1 D^s \mathbf{x}_2) \quad (4.28)$$

$$\mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = N_a(\mathbf{x}_1 D^s \mathbf{x}_2) \quad (4.29)$$

と書ける。定義より明らかに、

$$\mathbf{x}_1 D^s \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2 \cap \mathbf{x}_2 \bar{D} \mathbf{x}_1 \quad (4.30)$$

が成立するので、(2.9)、(2.27)式より、

$$\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mu_{\Box ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (4.31)$$

$$\mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (4.32)$$

が成立する。したがって、

$$\mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}) = \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}) \quad (4.33)$$

$$\mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) \geq \mu_{\Box ND}(\mathbf{x}) \quad (4.34)$$

となる。

以上の議論より、六つの非支配解の中で、互いに等しくなる $\Diamond ND$ と $\Diamond ND$ のメンバシップ値が一番大きく、解の制限が一番弱いことがわかる。また、 $\Box ND$ のメンバシップ値が一番小さく、解の制限が一番強いことがわかる。他は、これらの中間にあり、それらの間に強弱関係が常に存在するとは限らない。

5. 有効解および非支配解の相互関係

5.1 非反射的な支配関係の条件付き強弱関係

4. で定義した六つの非支配解の条件付き強弱関係を以下で議論するため、各非支配解の定義の基礎となる非反射的な支配関係の強弱関係を論じる。

[補題 1]

$$\begin{aligned} \mu_{\Box ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \sup \{ h / (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \\ &\quad \cap [\overline{\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1}]_{1-h} \neq \phi \} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Box ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \mu_{\Box ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= \sup \{ h / (\underline{\mathbf{a}})_{1-h} \\ &\quad \subseteq (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \cap [\overline{\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1}]_{1-h} \} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \sup \{ h / (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \neq \phi, \\ &\quad (\underline{\mathbf{a}})_h \cap [\overline{\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1}]_{1-h} \neq \phi \} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \sup \{ h / (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \neq \phi, \\ &\quad (\underline{\mathbf{a}})_{1-h} \subseteq [\overline{\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1}]_{1-h} \} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxtimes^s D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ = \sup \{ h / (\underline{\mathbf{a}})_{1-h} \subseteq (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h, \\ (\underline{\mathbf{a}})_h \cap \overline{[\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h}} \neq \phi \} \end{aligned} \quad (5.5)$$

と表せる。

(証明) (2.33)～(2.36)式および(4.4)、(4.5)、(4.28)、(4.29)式より明かである。たとえば、(5.1)式は、

$$(\mathbf{x}_1 D^s \mathbf{x}_2)_h = (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \cap \overline{[\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h}}$$

が成立することより、

$$\begin{aligned} \mu_{\supset D^s}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ = \sup \{ h / (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D^s \mathbf{x}_2)_h \neq \phi \} \\ = \sup \{ h / (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \\ \cap \overline{[\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h}} \neq \phi \} \end{aligned}$$

と示すことができる。

(証明終)

(2.33)～(2.36)式より明らかなように、(5.1)～(5.5)式の各強 h -レベル集合を(弱) h -レベル集合に、(弱) h -レベル集合を強 h -レベル集合に置き換えることができる。また、sup をとる h の条件の強弱関係を考えることにより、(4.10)～(4.13)、(4.21)、(4.32)式などの関係が容易に理解できる。

[命題 1] $\mu_{\boxtimes^s D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) > 0.5$ ならば、

$$\mu_{\boxtimes^s D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \mu_{\supset D^s}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (5.6)$$

が成立する。

(証明) $h > 0.5$ ならば、 $(\underline{\mathbf{a}})_h \subseteq (\underline{\mathbf{a}})_{1-h}$ が成立する。したがって、 $h > 0.5$ のとき、

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \neq \phi, (\underline{\mathbf{a}})_{1-h} \subseteq \overline{[\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h}} \\ \Rightarrow (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \cap \overline{[\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h}} \\ = (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \neq \phi \end{aligned}$$

が成立する。このことと仮定より、(5.6)式が成立する。

(証明終)

[命題 2] $\mu_{\boxtimes^s D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) > 0.5$ ならば、

$$\mu_{\boxtimes^s D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \mu_{\supset D^s}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (5.7)$$

が成立する。

(証明) 命題 1 と同様にできるので省略する。

(証明終)

命題 1、2 より、 $\boxtimes^s D$ 、 $\boxtimes^s D$ のメンバシップ値が 0.5 より大きいとき、 $\diamond D^s$ は $\boxtimes^s D$ 、 $\boxtimes^s D$ よりも弱い非反射的な支配関係であることがわかる。さらに、 $\underline{\mathbf{a}}$ が通常の集合となると、次の命題が成立する。

[命題 3] $\underline{\mathbf{a}}$ が通常の集合であるとき、(5.6)、(5.7)式が成立する。

(証明) $0 < h < 1$ に対して、 $(\underline{\mathbf{a}})_h = (\underline{\mathbf{a}})_{1-h}$ が成立することおよび、補題 1 より明かである。

(証明終)

[補題 2] 次の [I]、[II] は等価である。

[I] 任意の h に対して、

$$\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > h \Rightarrow \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) < 1 - h$$

が成立する。

[II] $\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq 1$ が成立する。

(証明) [II] $\Rightarrow$ [I] は明かである。

[I] $\Rightarrow$ [II] を証明する。 $\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > 1$ と仮定する。このとき、

$$\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > h \Rightarrow \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) < 1 - h \quad ([I] \text{ より})$$

$$\Rightarrow \mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

$$> (k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - 1) + h \quad (\text{前提より})$$

$$\Rightarrow \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) < 2 - k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - h \quad ([I] \text{ より})$$

$$\Rightarrow \mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > 2(k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - 1) + h \quad (\text{前提より})$$

.....

$$\Rightarrow \mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > r(k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - 1) + h$$

.....

すなわち、

$$\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > r(k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - 1) + h, \quad r = 1, 2, \dots$$

が成立する。 $k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - 1 > 0$ であるから、この式は矛盾する。したがって、 $\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq 1$ でなければならない。

(証明終)

[補題 3] 次の [I]、[II] は等価である。

[I] 任意の h に対して、

$$\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) < h \Rightarrow \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) > 1 - h$$

が成立する。

[II] $\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \geq 1$ が成立する。

(証明) 補題 2 と同様に証明できる。

(証明終)

補題 2, 3 より、次の系が得られる。

[系 1] 次の [I], [II] は等価である。

[I] 任意の h に対して、

$$\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > h \Leftrightarrow \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) < 1 - h$$

が成立する。

[II] $\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 1$ が成立する。

[命題 4]

$$\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \geq 1 \quad (5.8)$$

が成立するとき、次式が成立する。

$$\mu_{\otimes D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mu_{\cdot D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (5.9)$$

(証明) (5.8) 式および補題 3 より、 $(\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \supseteq [\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h}$ が成立するので、

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \neq \phi, \\ & (\underline{\mathbf{a}})_h \cap [\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h} \neq \phi \end{aligned} \right. \\ & \Rightarrow (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \cap [\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h} \neq \phi \quad (*) \end{aligned}$$

となる。したがって、補題 1 および (4.32) 式より (5.9) 式が成立する。

(証明終)

(5.8) 式は、中村 [30] により定義された M -比較可能性を示している。したがって、 D が M -比較可能であるとき、特に、 D が M -弱順序関係 [30] であるとき、(5.9) 式が成立する。通常の場合、 D が比較可能 [12] であれば、(5.9) 式が成立する。したがって、 D が通常の弱順序関係 [12] である場合は、(5.9) 式が成立する。

[命題 5] 任意の $\mathbf{a} \in (\underline{\mathbf{a}})_0$ について、

$$\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, \mathbf{a}) \quad (5.10)$$

および、 $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ のとき、

$$\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mu_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq 1 \quad (5.11)$$

が成立するならば、(5.9) 式が成立する。

(証明) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ のとき、非反射性より、

$$\mu_{\otimes D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mu_{\cdot D}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$$

となり、明らかである。 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ のとき、(5.10)、

(5.11) 式および補題 2 を用いて、命題 4 と同様に証明できる。

(証明終)

(5.11) 式を満たす D として、反対称 [12] [31] な支配関係がある。したがって、 $\mathbf{f}$ が (5.10) 式を満たすとき、たとえば、 D が通常の半順序関係 [12] であれば、(5.9) 式が成立する。なお、(5.11) 式は、中村 [30] により定義されている M -非対称性を表していないことに注意されたい。 M -非対称性では、(5.11) 式の条件 $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ が存在しない。本研究の支配関係 D の反射性を取り除くと、 $\mathbf{f}$ が (5.10) 式を満たすとき、 M -非対称な支配関係 D について (5.9) 式が成立する。

[命題 6] 互いに相互関係がない m 個のファジィベクトル $(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_m)$ を用いて、 $\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_m)$ 、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{a}}) = (f_1(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{a}}_1), f_2(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{a}}_2), \dots, f_m(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{a}}_m))$ と表せ、支配関係 D が

$$\mu_{D_i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) + \mu_{D_i}(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i) \geq 1 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (5.12)$$

なる各目的空間上の支配関係 D_i を用いて、

$$\mu_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \bigwedge_{i=1}^m \mu_{D_i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) \quad (5.13)$$

と表せるとき、(5.9) 式が成立する。ただし、 $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m)$ 、 $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m)$ であり、 $\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_m)$ に対して、

$$\mu_{\underline{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}) = \bigwedge_{i=1}^m \mu_{\underline{\mathbf{a}}_i}(\mathbf{a}_i) \quad (5.14)$$

と表せるとき、 m 個のファジィベクトル $(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_m)$ は互いに相互関係がないという。

(証明) 補題 1 より、(*) 式を証明すればよい。

(5.13)、(5.14) 式より、

$$\begin{aligned} & (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \neq \phi \\ & \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{a}}_i)_h \cap (\mathbf{x}_1 D_i \mathbf{x}_2)_h \neq \phi, \quad i=1, 2, \dots, m \\ & (\underline{\mathbf{a}})_h \cap [\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h} \neq \phi \\ & \Leftrightarrow i \in \{1, 2, \dots, m\}, (\underline{\mathbf{a}}_i)_h \cap [\mathbf{x}_2 D_i \mathbf{x}_1]_{1-h} \neq \phi \\ & (\underline{\mathbf{a}})_h \cap (\mathbf{x}_1 D \mathbf{x}_2)_h \cap [\mathbf{x}_2 D \mathbf{x}_1]_{1-h} \neq \phi \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} & i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & (\underline{\mathbf{a}}_i)_h \cap (\mathbf{x}_1 D_i \mathbf{x}_2)_h \cap [\mathbf{x}_2 D_i \mathbf{x}_1]_{1-h} \neq \phi \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

が成立する。ただし、ファジィ集合 $x_1 \underline{D}_i x_2$ は次のメンバシップ関数により定義される。

$$\mu_{x_1 \underline{D}_i x_2}(a_i) = \mu_{\underline{D}_i}(f_i(x_1, a_i), f_i(x_2, a_i))$$

$\underline{D}_i$ について命題 4 と同様にすれば、(*) 式が得られる。

(証明終)

命題 6 は、命題 4 の条件(5.8)式を(5.12)、(5.13)式の条件にゆりめ、その代わりに(5.14)式の相互関係がない条件を加えた場合にも、(5.9)式が成立することを表している。これにより、 $\underline{D}$ が通常の半順序関係で、(5.10)式が成立しない場合にも、(5.14)式さえ満足すれば、(5.9)式が成立することがわかる。

【命題 7】 任意の $a \in (a)_0$ について(5.10)式が成立し、 $y \neq z$ について、

$$\mu_{\underline{D}}(y, z) + \mu_{\underline{D}}(z, y) = 1 \quad (5.15)$$

が成立するとき、(5.9)式および、

$$\begin{aligned} \mu_{\square \underline{D}}(x_1, x_2) &= \mu_{\square^s \underline{D}}(x_1, x_2) \\ &= \mu_{\square^s \underline{D}}(x_1, x_2) = \mu_{\diamond^s \underline{D}}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.16)$$

が成立する。

(証明) (5.9)式は明らかである。(5.16)式を証明する。 $x_1 = x_2$ のとき、非反射性より明らかである。 $x_1 \neq x_2$ のとき、(5.15)式より、 $(x_1 \underline{D} x_2)_h = \overline{[x_2 \underline{D} x_1]_{1-h}}$ が成立し、補題 1 により明らかである。
(証明終)

上述の議論より、 $\underline{D}$ が M -比較可能で、反対称的であれば、(5.15)式を満たす。たとえば、 $\underline{D}$ が通常的全順序関係 [12] である場合、(5.10)式が成立すれば、(5.9)、(5.16)式が成立し、拡張された支配関係は、2 種類になる。また、 $\underline{D}$ の反射性を取り除くと、 $\underline{D}$ が相反関係 [30] であるとき、(5.10)式が成立すれば、(5.9)、(5.16)式が成立する。

【命題 8】 $\mu_{\square^s \underline{D}}(x_1, x_2) > h$ のとき、 $(a)_h$ が単集合(要素が一つの集合)であるならば、

$$\begin{aligned} \mu_{\square \underline{D}}(x_1, x_2) &= \mu_{\square^s \underline{D}}(x_1, x_2) \\ &= \mu_{\square^s \underline{D}}(x_1, x_2) = \mu_{\diamond^s \underline{D}}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$= \mu_{\diamond \underline{D}}(x_1, x_2) = \mu_{\diamond^s \underline{D}}(x_1, x_2) \quad (5.17)$$

が成立し、すべての非反射的な支配関係が一致する。

(証明) 補題 1 より明らかである。

(証明終)

命題 8 は、ほぼ当然の結果であり、たとえば、(2.1)式のファジィ多目的計画問題が、通常の多目的計画問題であれば、六つの支配関係がすべて一致することを表している。

以上を図にまとめると、図 1 のようになる。図の上に位置するものが強く、下にいくほど弱い支配関係になっている。

図 1. 六つの非反射的な支配関係の強弱関係

5.2 六つの非支配解の条件付き強弱関係

ここでは、適当な条件が与えられたもとの六つの非支配解の強弱関係について議論する。5.1 の結果より、以下の命題が成立する。

【命題 9】 $\mu_{\square \underline{ND}}(x^*) < 0.5$ ならば、

$$\mu_{\square \underline{ND}}(x^*) \geq \mu_{\square \underline{ND}}(x^*) \quad (5.18)$$

(証明) $\square \underline{ND}$ の定義および仮定より、

$$\sup_x \{ \mu_F(x) \wedge \mu_{\diamond^s \underline{D}}(x, x^*) \} > 0.5$$

となり、 $G = \{x / \mu_{\diamond^s \underline{D}}(x, x^*) > 0.5\}$ と置くと、 $x \in G$ なる x について、命題 1 より、

$$\mu_{\diamond^*D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \leq \mu_{\diamond D^*}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} & \sup_{\mathbf{x}} \{ \mu_F(\mathbf{x}) \wedge \mu_{\diamond^*D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \} \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in G} \{ \mu_F(\mathbf{x}) \wedge \mu_{\diamond^*D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in G} \{ \mu_F(\mathbf{x}) \wedge \mu_{\diamond D^*}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x}} \{ \mu_F(\mathbf{x}) \wedge \mu_{\diamond D^*}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \} \end{aligned}$$

となり、 $\sqcap ND$ 、 $\square ND$ の定義および(4.34)式より、(5.18)式が成立する。

(証明終)

[命題 10] $\mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) < 0.5$ ならば、

$$\mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) \geq \mu_{\square ND}(\mathbf{x}^*) \quad (5.19)$$

が成立する。

(証明) 命題 2 を用いて、命題 9 と同様に証明できる。

(証明終)

[命題 11] $\mathbf{a}$ が通常 of 集合であるとき、(5.18)、(5.19)式が成立する。

(証明) 命題 3 より明らかである。

(証明終)

[命題 12] 命題 4、5、6 のいずれかの仮定が満足されるとき、次式が成立する。

$$\mu_{\sqcap ND}(\mathbf{x}^*) = \mu_{\square ND}(\mathbf{x}^*) \quad (5.20)$$

(証明) 命題 4、5、6 より明らかである。

(証明終)

[命題 13] 命題 7 の仮定が満足されるとき、(5.20)式および次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) &= \mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) \\ &= \mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) = \mu_{\sqcap ND}(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \quad (5.21)$$

(証明) 命題 7 より明らかである。

(証明終)

[命題 14] $\mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) < 1-h$ のとき、 $(\mathbf{a})_h$ が単集合であるならば、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) &= \mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) \\ &= \mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) = \mu_{\sqcap ND}(\mathbf{x}^*) \\ &= \mu_{\square ND}(\mathbf{x}^*) = \mu_{\sqcap ND}(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \quad (5.22)$$

すなわち、六つの非支配解が一致する。

(証明) 命題 8 を用いて、命題 9 と同様に証明できる。

(証明終)

5.3 二つの有効解と六つの非支配解の関係

前節で、六つの非支配解の関係が明らかになったので、ここでは、六つの非支配解と 3. で定義した二つの有効解との関係を明らかにする。

[命題 15] 次式が成立する。

$$\mu_{\square ND}(\mathbf{x}^*) = \mu_{\sqcap Eff}(\mathbf{x}^*) \quad (5.23)$$

(証明)

$$\begin{aligned} & \mu_{\square ND}(\mathbf{x}^*) \\ &= 1 - \sup_{\mathbf{x}} \{ \mu_F(\mathbf{x}) \wedge \mu_{\diamond D^*}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \} \\ &= \inf_{\mathbf{x}} [(1 - \mu_F(\mathbf{x})) \vee \{ 1 - \sup_{\mathbf{a}} \{ \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \wedge \mu_{D^*}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a})) \} \}] \\ &= \inf_{\mathbf{x}, \mathbf{a}} [(1 - \mu_F(\mathbf{x})) \vee (1 - \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})) \vee \{ 1 - \mu_{D^*}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a})) \}] \\ &= \inf_{\mathbf{a}} [(1 - \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})) \vee \{ 1 - \sup_{\mathbf{x}} \{ \mu_F(\mathbf{x}) \wedge \mu_{D^*}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a})) \} \}] \\ &= \mu_{\sqcap Eff}(\mathbf{x}^*) \end{aligned}$$

(証明終)

[命題 16] 次式が成立する。

$$\mu_{\diamond ND}(\mathbf{x}^*) \geq \mu_{\sqcap Eff}(\mathbf{x}^*) \quad (5.24)$$

(証明) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{a}$ について、

$$\begin{aligned} \mu_{\sqcap Eff}(\mathbf{x} : \mathbf{a}) &\leq (1 - \mu_F(\mathbf{x})) \vee (1 - \mu_{D^*}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))) \\ \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) &\leq (1 - \mu_F(\mathbf{x})) \vee \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

が成立することより、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{a}$ について、

$$\begin{aligned} & \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \wedge \mu_{\sqcap Eff}(\mathbf{x} : \mathbf{a}) \\ &\leq (1 - \mu_F(\mathbf{x})) \\ &\wedge \{ \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \wedge (1 - \mu_{D^*}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))) \} \end{aligned}$$

が成立する。ゆえに、

$$\sup_{\mathbf{a}} \{ \mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \wedge \mu_{\sqcap Eff}(\mathbf{x} : \mathbf{a}) \}$$

$$\leq \inf_x \sup_a \{ (1 - \mu_F(\mathbf{x})) \vee \{ \mu_a(\mathbf{a}) \wedge (1 - \mu_{D^s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))) \} \}$$

すなわち、(5.24)式が成立する。

(証明終)

【命題 17】 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_g)$ の各成分 $\mathbf{a}_j$ は上半連続なメンバシップ関数をもつ凸で有界なファジィ集合で、互いに相互関係がないと仮定する。また、互いに相互関係のない m 個のファジィベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ を用いて $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1), f_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}_2), \dots, f_m(\mathbf{x}, \mathbf{a}_m))$ と表せるとする。このとき、 $\mathbf{f}$ および $\mathbf{g}$ が線形関数であり、 D^s が (3.3) 式で定義されるとき、

$$\mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}^*) = \mu_{\Diamond Eff}(\mathbf{x}^*) \quad (5.26)$$

が成立する。

(証明) (2.35)、(2.36) 式と同様にして、

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond ND}(\mathbf{x}^*) &= \sup \{ h / \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{a} (\mathbf{x} \in [F]_{1-h} \rightarrow (\mathbf{a} \in [\mathbf{a}]_h \wedge (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in [\overline{D^s \mathbf{x}^*}]_{1-h})) \} \\ \mu_{\Diamond Eff}(\mathbf{x}^*) &= \sup \{ h / \exists \mathbf{a} \forall \mathbf{x} (\mathbf{a} \in [\mathbf{a}]_h \wedge (\mathbf{x} \in [F]_{1-h} \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in [\overline{D^s \mathbf{x}^*}]_{1-h})) \} \end{aligned}$$

と表せる。ただし、決定空間とパラメータ空間の直積上のファジィ集合 $D^s \mathbf{x}^*$ は、次のメンバシップ関数により定義される。

$$\mu_{D^s \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mu_{D^s}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))$$

$[\mathbf{a}]_h = [\mathbf{a}_1]_h \times [\mathbf{a}_2]_h \times \dots \times [\mathbf{a}_g]_h$ と表せ、閉区間 $[\mathbf{a}_i]_h$ に相互関係がないこと、 $[F]_{1-h}$ が線形制約条件で表せることおよび、 $h < 1$ に対し、

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in [\overline{D^s \mathbf{x}^*}]_{1-h} \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a})$$

となり、 $\mathbf{f}$ が線形であることに注意すると、文献 [27] の命題 10 と同様にして、次の 2 式

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{a} (\mathbf{x} \in [F]_{1-h} \rightarrow (\mathbf{a} \in [\mathbf{a}]_h \wedge (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in [\overline{D^s \mathbf{x}^*}]_{1-h})) \\ \Leftrightarrow \exists \mathbf{a} \forall \mathbf{x} (\mathbf{a} \in [\mathbf{a}]_h \wedge (\mathbf{x} \in [F]_{1-h} \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in [\overline{D^s \mathbf{x}^*}]_{1-h})) \end{aligned}$$

が等価になる。したがって、(5.26)式が成立する。

(証明終)

命題 17 の仮定を満たす問題は、互いに相互関係のない g 個の上半連続なメンバシップ関数をもつ凸で有界なファジィパラメータ $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_g)$ がいずれかの目的関数にせいぜい 1 回ずつしか現れない場合のファジィ多目的線形計画問題である。

前節および本節の結果を図にまとめると図 2 のようになる。すなわち、一般の場合、 $\boxed{S}ND$ が最も強く、 $\boxed{Q}ND$ ($\boxed{Q}Eff$)、 $\Diamond ND$ 、 $\boxed{W}ND$ が次に強く、次いで $\Diamond Eff$ 、そして、 $\Diamond ND$ ($\Diamond ND$) という順になる。また、命題 17 の仮定を満たすファジィ多目的線形計画問題の場合、命題 6 の仮定も満足するので、 $\boxed{S}ND$ と $\boxed{Q}ND$ と $\boxed{Q}Eff$ 、および、 $\Diamond Eff$ と $\Diamond ND$ と $\Diamond ND$ がそれぞれ一致し、4 種類にまとめられることがわかる。

6. おわりに

本研究では、目的関数の係数をファジィ数とする多目的線形計画問題の解の概念を、二つの立場から定義した。すなわち、通常の多目的計画問題の有効解の概念を直接拡張する方法と、目的空間上の支配関係から決定空間上の支配関係を構成することにより定義する方法である。さらに、これらの方法により定義された解の関係について議論した。その結果、図 2 のように解の強弱関係が整理された。これらの解は、様相測度を用いて定義

図 2. 二つの有効解と六つの非支配解の強弱関係

されているため、解の概念を言語を用いて表すことができ、ファジィ多目的計画問題の解の妥当性を議論するうえで重要になると考えられる。特に、対話型システムなどにおいて、対話により求められた解の妥当性を議論するような場合、これらの解の概念が重要になるであろう。また、これらの解の概念のいずれを適用するかは、問題設定の環境や、意思決定者の主観に依存して定まると考えられる。たとえば、なるべく危険を回避すべき状況においては、強意非支配必然解あるいは、非支配必然解(必然的有効解)を用いるべきであろう。さらに、各有効解(非支配解)のメンバシップ値を評価基準と考え、複数の解の概念を用いて、解を決定する方法なども考えられる。この方法では、各有効解(非支配解)のメンバシップ値を用いて、さらに有効解を定義することができる。

なお、ここでは、制約を通常の制約と仮定したが、ファジィ制約である場合も、各命題は成立し、図2のような関係が得られる。

今後の課題としては、1. で述べたように、目的空間上の支配関係を、決定変数により得られるファジィ集合間の関係へ拡張することにより、解の概念を定義する方法がある。ここでは、同時可能性分布、条件付き可能性分布[32]の概念が重要になる。また、この定義方法および本研究の定義方法では、制約条件や目標に対してDubois[8]や乾口ら[11]により取り扱われているような、各目的間の不確実性に対する重視度が考慮されていない。不確実性に対する重視度を加味する定義方法の研究も必要であろう。これを実現する方法として、坂和ら[21,22]の方法を拡張することも考えられる。最後に、実際、各有効解(非支配解)を求める方法も必要である。このためには、解の有効性(非支配性)の条件を議論する必要がある。各区間パラメータに相互関係がない区間多目的線形計画問題の場合は、乾口ら[27]により、解の有効性(非支配性)の条件が議論されている。また、実行可能集合の各端点の必然的有効性と、可能的有効性を調べる方法は、Bitran[25]および乾口ら[26]により議論されている。これらを基にし

て、各有効解(非支配解)を求める方法が開発されることが期待される。

終わりに、本研究は文部省奨励研究(A)課題番号01780052に関連して行われたことを付記し、謝意を表する。

参考文献

- [1] R.E. Bellman and L.A. Zadeh, Decision-Making in a Fuzzy Environment, Management Sci., Vol.17 B, No.4, 141-164, 1970.
- [2] 田中、奥田、浅居, Fuzzy 数理計画法, 計測自動制御学会論文集, 9 巻, 5 号, 607-613, 1973.
- [3] S.A. Orlovsky, On Formalization of a General Fuzzy Mathematical Problem, Fuzzy Sets and Syst., Vol.3, 311-321, 1980.
- [4] C.V. Negoita, The Current Interest in Fuzzy Optimization., Fuzzy Sets and Syst., Vol.6, 261-269, 1981.
- [5] 田中、浅居, ファジィ関数による線形計画問題の定式化, システムと制御, 25 巻, 6 号, 1981.
- [6] 田中、市橋、浅居, ファジィ目的関数によるファジィ線形計画問題の定式化, J. Oper. Res. Soc. Jpn. Vol.27, No.2, 178-190, 1984.
- [7] 矢野、坂和, ファジィパラメータを含む多目的最適化問題に対する解の概念とその性質, J. Oper. Res. Soc. Jpn., Vol.29, No.1, 21-42, 1986.
- [8] D. Dubois, Linear Programming with Fuzzy Data, Analysis of Fuzzy Information, Vol. III, J.C. Bezdek ed., CRC Press, 241-263, 1987.
- [9] 乾口、市橋、久米, ファジィ数理計画問題の様相的構成, システム制御情報学会論文誌, 2 巻, 3 号, 69-79, 1989.
- [10] M.K. Luhandjula, Fuzzy Optimization: An Appraisal, Fuzzy Sets and Syst., Vol.30, 257-282, 1989.
- [11] 乾口、久米, 様相性目標計画問題, J. Oper. Res. Soc. Jpn., Vol.32, No.3, 326-351, 1989.
- [12] 市川惇信 編, 多目的決定の理論と方法, 計測自動制御学会, 1980.
- [13] 坂和正敏, 非線形システムの最適化 <一目的から多目的へ>, 森北出版, 1986.
- [14] P.L. Yu, Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives, J. Opti

- mization Theory and Applications, Vol.14, No. 3, 319-377, 1974.
- [15] Y. Sawaragi, H. Nakayama and T. Tanino, Theory of Multiobjective Optimization, Academic Press, 1985.
- [16] M.K. Luhandjula, On Possibilistic Linear Programming, Fuzzy Sets and Syst., Vol.18, 15-30, 1986.
- [17] M.K. Luhandjula, Linear Programming with a Possibilistic Objective Function, European J. Oper. Res., Vol.31, 110-117, 1987.
- [18] M.K. Luhandjula, Multiple Objective Programming Problems with Possibilistic Coefficients, Fuzzy Sets and Syst., Vol.21, 135-145, 1987.
- [19] M. Sakawa and H. Yano, Interactive Decision Making for Multiobjective Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Parameters, Fuzzy Sets and Syst., Vol.29, 315-326, 1989.
- [20] M. Sakawa and H. Yano, An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Parameters, Fuzzy Sets and Syst., Vol. 30, 221-238, 1989.
- [21] 坂和、矢野、ファジーパラメータを含む多目的線形計画問題に対する統一的アプローチ, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol.J 71-A, No.8, 1569-1575, 1988.
- [22] 坂和、矢野、高橋、ファジーパラメータを含む多目的線形計画問題に対する拡張パレート最適性の概念とその性質, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol.J 72-A, No.4, 678-684, 1989.
- [23] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Numbers : An Overview, Analysis of Fuzzy Information, Vol. I, J.C. Bezdek ed., CRC Press, 3-39, 1987.
- [24] D. Dubois and H. Prade, Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory, Inform. Sci., Vol.30, 183-224, 1983.
- [25] G.R. Bitran, Linear Multiple Objective Problems with Interval Coefficients, Management Sci., Vol.26, No.7, 694-706, 1980.
- [26] 乾口、久米, 区間多目的線形計画問題に対する可能的有効端点判別法, 計測自動制御学会論文集, 25 巻, 7 号, 824-826, 1989.
- [27] 乾口、久米, 区間多目的線形計画問題に対する非支配解の概念, (投稿中)
- [28] 長尾、淵, 論理と意味, 岩波書店, 1983.
- [29] O.L. Mangasarian (関根智明訳), 非線形計画法, 倍風館, 1972.
- [30] 中村和男, 多属性 Fuzzy 選好に基づく非劣関係に関する一考察, 計測自動制御学会論文集, 22 巻, 5 号, 549-556, 1986.
- [31] S.A. Orlovsky, Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation, Fuzzy Sets and Syst., Vol.1, 155-167, 1978.
- [32] E. Hisdal, Conditional Possibilities Independence and Noninteraction, Fuzzy Sets and Syst., Vol.1, 229-309, 1978.

(1989 年 9 月 1 日受付)

[問い合わせ先]

〒591 堺市百舌鳥梅町4-804

大阪府立大学 工学部 経営工学科

乾口 雅弘

TEL : 0722-52-1161(内)2374

FAX : 0722-59-3340

著者紹介

乾口 雅弘 (いぬいぐち まさひろ)

大阪府立大学 経営工学科

昭和62年3月大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程(経営工学専攻)修了。同年4月同大学経営工学科助手、現在に至る。主として、可能性理論、ファジィ数値計画問題、不明確線形計画法等に関する研究に従事。計測自動制御学会、国際ファジィシステム学会、システム制御情報学会、日本オペレーションズ・リサーチ学会、日本経営工学会、日本ファジィ学会などの会員。

久米 靖文 (くめ やすふみ)

大阪府立大学 経営工学科

昭和49年3月大阪府立大学大学院航空工学専攻博士課程単位修得退学。同年4月琉球大学機械工学科助手、昭和51年4月大阪府立大学経営工学科助手、昭和59年同講師、昭和60年同助教授、現在に至る。生産設備の動特性、振動・騒音の人体への影響と作業能率、作業環境における振動・騒音の制御、安全管理に関する研究およびこれらの研究に関連して信号処理、カタストロフィモデルに関する研究に従事。工学博士。日本経営工学会、日本機械学会、日本音響学会、日本産業衛生学会、日本騒音制御工学会、精密工学会、日本ファジィ学会などの会員。