オペレーションズリサーチにおけるファジィ応用

確率計画問題とファジィ数理計画問題[†]

乾口 雅弘*

1. はじめに

確率論とファジィ理論は、ファジィ理論が提唱された頃から論争が絶えない。確率論者は、ファジィ理論の不必要性、理論的基盤の欠如を訴え、ファジィ論者は、確率論との相違、確率論の限界を主張し続けている。

ところで、数理計画法の分野(確率計画法とファジィ数理計画法)に目を向けると、不思議なことに、これらの論争は全くといってよいほどなされていない(もっとも、ファジィ数理計画法は垂流の学問として無視されていたとも考えられるが…)。むしろ、確率計画法とファジィ数理計画法の類似性が強調され、不確定な状況のもとで、異なったアプローチをする2種類の数理計画法と考えられているようである[1,2,3,4]。

このように恵まれた(?)環境のもとで、著者らは、確率計画問題の一種である機会制約条件計画問題と同様な考え方に基づき、ファジィ数理計画問題を様相制約条件計画問題として定式化し[5, 6]、従来のほとんどのファジィ数理計画問題がこの枠組みで解釈できることを示している[6,7,8]。これにより、ファジィ数理計画問題が確率計画問題と同様な考え方に基づき定式化されていることが明らかになった。

一方、全く別の研究として、確率計画問題をフレキシブル計画問題[7,9]の考え方に基づき定式化した問題と、ファジィ数理計画問題の必然性測度最大化[9]に基づき定式化した問題が、ある特別

な場合に等価になることを示した[10]。

本稿では、著者らが行ったこれらの研究をもとに、確率計画法とファジィ数理計画法との類似性について解説する。前半では、両計画問題の定式化の意味における類似性を強調し、後半では、定式化された両計画問題が、ある特別な場合において、一致することを示す。

2. 機会制約条件計画問題

確率計画問題は、最適解や最適値の確率分布を求めようとする分布問題、制約条件が成り立たない場合にペナルティを付加する二段計画問題、制約条件を満たす確率がある値以上になることを要求する機会制約条件計画問題に分類される[11,12]。ここでは、機会制約条件計画問題を簡単に述べる。なお、説明のため、次の確率線形計画問題を考える。

$$\max \{ \mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i, i=1,2,\dots,m, \mathbf{x} \geq 0 \} \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ は決定変数で、 $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 、 $\mathbf{a}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ は予め定められた n 変量確率分布に従う確率変数、 b_i は予め定められた1変量確率分布に従う確率変数である。

2.1 制約条件の扱い方

通常の数理計画問題では、解 $\mathbf{x}$ は制約を満たすか満たさないかのいずれかである。ところが、(1)式の確率計画問題では、制約条件式の係数は確率変数であるので、解 $\mathbf{x}$ が制約を満たす確率を求めることができる。そこで、制約を必ず満たすべきであるという条件を緩め、制約をある与えられた

[†] Stochastic Programming Problems versus Fuzzy Mathematical Programming Problems
Masahiro INUIGUCHI

* 大阪府立大学 工学部経営工学科
Department of Industrial Engineering, College of Engineering, University of Osaka Prefecture

値(充足水準)以上の確率で満たせばよいと解釈する方法が考えられる。機会制約条件計画問題では、この考え方にに基づき、制約条件 $\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i$ を

$$\text{Prob}(\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i) \geq p_i \quad (2)$$

と扱う。ただし、 $\text{Prob}(\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i)$ は $\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i$ が成立する確率を示し、 $p_i \in [0, 1]$ は充足水準を示している。(2) 式の制約条件は、機会制約条件と呼ばれている。

2.2 目的関数の扱い方

(1) 式の目的関数 $\mathbf{c} \mathbf{x}$ の係数 $\mathbf{c}$ は確率変数であるので、 $\mathbf{c} \mathbf{x}$ も確率変数となる。したがって、確率変数 $\mathbf{c} \mathbf{x}$ の最大化、すなわち、

$$\max \mathbf{c} \mathbf{x} \quad (3)$$

に意味を与えなければならない。機会制約条件計画問題では、主なものとして、以下に示す4種類のモデルが考えられている。

(a) 期待値最大化モデル(E モデル) 目的関数値 $\mathbf{c} \mathbf{x}$ の期待値 $E(\mathbf{c} \mathbf{x})$ を最大化する。すなわち、(3) 式を

$$\max E(\mathbf{c} \mathbf{x}) \quad (4)$$

と定式化する。確率変数 $\mathbf{c}$ の平均ベクトルを γ とすると、(4) 式は次のような線形目的関数になる。

$$\max \gamma \mathbf{x} \quad (5)$$

(b) 分散最小化モデル(V モデル) 目的関数値 $\mathbf{c} \mathbf{x}$ の分散 $V(\mathbf{c} \mathbf{x})$ を最小化する。すなわち、(3) 式を

$$\min V(\mathbf{c} \mathbf{x}) \quad (6)$$

と定式化し、目的関数値のバラツキを最小にする。確率変数 $\mathbf{c}$ の分散共分散行列を Σ とすると、(6) 式は、次のような2次の目的関数になる。

$$\min \mathbf{x}^t \Sigma \mathbf{x} \quad (7)$$

(c) 確率最大化モデル(リスク最小化モデル)

目的関数に基準値 f_0 を与え、目的関数値が f_0 以上

となる確率を最大化する。すなわち、(3) 式を

$$\max \text{Prob}(\mathbf{c} \mathbf{x} \geq f_0) \quad (8)$$

と定式化する。特に、 $\mathbf{c}$ が多変量正規分布 $N(\gamma, \Sigma)$ に従うとき、(8) 式は次式と等価になる。

$$\max \frac{\gamma \mathbf{x} - f_0}{\sqrt{\mathbf{x}^t \Sigma \mathbf{x}}} \quad (9)$$

(d) 満足水準最適化モデル(片岡のモデル) 確率最大化モデルとは逆に、成立すべき確率 p_0 を与え、基準値 f を最大化する。すなわち、(3) 式を

$$\max \{f \mid \text{Prob}(\mathbf{c} \mathbf{x} \geq f) \geq p_0\} \quad (10)$$

と定式化する。特に、 $\mathbf{c}$ が多変量正規分布 $N(\gamma, \Sigma)$ に従うとき、(10) 式は次式と等価になる。

$$\max \gamma \mathbf{x} - \Phi^{-1}(p_0) \sqrt{\mathbf{x}^t \Sigma \mathbf{x}} \quad (11)$$

ただし、 Φ^{-1} は標準正規分布の分布関数 Φ の逆関数である。

3. 様相制約条件計画問題

3.1 ファジィ数理計画と確率計画との対応

ファジィ線形計画問題(可能性線形計画問題)は、次のように書かれる。

$$\max \{\mathbf{c} \mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i, i=1, 2, \dots, m, \mathbf{x} \geq 0\} \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ は決定変数で、 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 、 $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ は予め定められた n 次元の可能性分布に制限される可能性変数、 b_i は予め定められた1次元の可能性分布に制限される可能性変数である。

【注釈1】 可能性変数 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ を含む方程式 $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$ を考えたとき、 $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ が解であるとは限らない[13]。このように、可能性変数を安易に移行することはできない。このことから、より一般には、(12) 式の制約条件 $\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i$ を

$$\mathbf{a}_i \mathbf{x} + a_{i0} \leq \mathbf{b}_i \mathbf{x} + b_{i0}$$

とすべきである。また、一般的なファジィ数理計

画問題では、(12)式のように係数の不明確さばかりではなく、“だいたい小さい”のようなあいまいな不等号関係 $\leq$ などが扱われる[5,6]。この場合、係数の不明確さと関係のあいまいさを同時に扱う方法を考案する必要がある。これを述べることは、本稿の範囲を越えるので、興味ある読者は文献[5,6,14]をご覧頂きたい。■

(12)式の問題と(1)式の問題を比較すると、可能性分布と確率分布とが異なるだけで他は一致している。(1)式と(12)式の対応を考えると、およそ表1のようになる。

表1から、分布問題、二段計画問題、機会制約条件計画問題に対応するファジィ数理計画問題を考えることができる。現在までのところ、機会制約条件計画問題に対応してのみ様相制約条件計画問題が定式化されている。しかし、ファジィ数理計画問題における解の概念[17]、様相性目標計画問題[18]は、それぞれ、分布問題、二段計画問題にかなり近い定式化になっている。

以下では、機会制約条件計画問題に対応して定式化される様相制約条件計画問題を述べる。

表1. (1)式と(12)式の対応

(1)式	(12)式
確率分布	可能性分布
確率測度	可能性測度および必然性測度
平均(期待値)	可能性分布の中心(メンバシップ値が1となる値の集合)または、可能性分布の平均[15]
分散, エントロピー	あいまいさ, 情報測度[16]

3.2 可能性変数間の不等号関係

まず、1次元の可能性分布 π_A, π_B に制限される二つの可能性変数 a, b 間の不等号関係 $a \leq b$ の成立度合を定義する(これらの導出は文献[6, 9, 13, 19, 20, 21]などを参照されたい)。

$$\text{Poss}(a \leq b) = \Pi_A((-\infty, B]) \quad (13)$$

$$\text{Nepo}(a \leq b) = N_A((-\infty, B]) \quad (14)$$

$$\text{Pone}(a \leq b) = \Pi_A((-\infty, B)) \quad (15)$$

$$\text{Ness}(a \leq b) = N_A((-\infty, B)) \quad (16)$$

$$\text{Poss}(b \geq a) = \Pi_B([A, +\infty)) \quad (17)$$

$$\text{Nepo}(b \geq a) = N_B([A, +\infty)) \quad (18)$$

$$\text{Pone}(b \geq a) = \Pi_B(A, +\infty)) \quad (19)$$

$$\text{Ness}(b \geq a) = N_B(A, +\infty)) \quad (20)$$

ただし、 $(-\infty, B], (-\infty, B(, [A, +\infty)$ および $)A, +\infty)$ は、それぞれ、次のメンバシップ関数で定義されるファジィ集合である。

$$\mu_{(-\infty, B]}(r) = \Pi_B([r, +\infty)) \quad (21)$$

$$\mu_{(-\infty, B(}(r) = N_B([r, +\infty)) \quad (22)$$

$$\mu_{[A, +\infty)}(r) = \Pi_A((-\infty, r]) \quad (23)$$

$$\mu_{)A, +\infty)}(r) = N_A((-\infty, r]) \quad (24)$$

また、可能性分布 π_U のもとでのメンバシップ関数 μ_C をもつファジィ集合(事象) C の可能性測度 $\Pi_U(C)$ および必然性測度 $N_U(C)$ は次のように定義される。

$$\Pi_U(C) = \sup_r \min(\pi_U(r), \mu_C(r)) \quad (25)$$

$$N_U(C) = \inf_r \max(1 - \pi_U(r), \mu_C(r)) \quad (26)$$

$(-\infty, B], (-\infty, B(, [A, +\infty)$ および $)A, +\infty)$ は、それぞれ、“可能的に b 以下である集合”、“必然的に b 以下である集合”、“可能的に a 以上である集合”、“必然的に a 以上である集合”を表している。したがって、(13)~(20)式で定義される指標は、それぞれ、“ a が可能的に b 以下である可能性の度合”、“ a が可能的に b 以下である必然性の度合”、“ a が必然的に b 以下である可能性の度合”、“ a が必然的に b 以下である必然性の度合”、“ b が可能的に a 以上である可能性の度合”、“ b が可能的に a 以上である必然性の度合”、“ b が必然的に a 以上である可能性の度合”、“ b が必然的に a 以上である必然性の度合”を示している。一般に、

$$\text{Poss}(a \leq b) = \text{Poss}(b \geq a) \quad (27)$$

$$\text{Ness}(a \leq b) = \text{Ness}(b \geq a) \quad (28)$$

が成立する。また、 π_A , π_B が上半連続で、そのいずれかが有界であれば、次式が成立する[20]。

$$\text{Nepo}(a \leq b) = \text{Pone}(b \geq a) \quad (29)$$

$$\text{Pone}(a \leq b) = \text{Nepo}(b \geq a) \quad (30)$$

$\text{Nepo}(a \leq b)$ と $\text{Nepo}(b \geq a)$ 、 $\text{Pone}(a \leq b)$ と $\text{Pone}(b \geq a)$ は意味が似ているが、 a , b のいずれを中心(主体)に考えるかにより異なることに注意されたい。

【注釈2】 DuboisとPrade[19,21]のものでは、不等号関係 $\leq$ と厳密な不等号関係 $<$ を混せて定義しているが、線形計画問題では、一般に厳密な不等号関係 $<$ を用いない。そのため、ここでは、不等号関係 $\leq$ のみを用いて定義している。厳密な不等号関係 $<$ を混せて定義しても、 π_A , π_B が連続であれば問題はないが[20]、 π_A , π_B が不連続の場合は少々取り扱いが困難になる[2,9]。 ■

3.3 制約条件の扱い方

確率計画問題の場合と同様に、(32)式の問題では、 a_i , b_i は可能性変数であるので、解 $\mathbf{x}$ が制約を満たす度合を求めることができる。そこで、様相制約条件計画問題では、機会制約条件計画問題と同様に、制約を完全に満たすべきであるという条件を緩め、制約をある与えられた度合(充足水準)以上で満たせばよいと考える。この際、注意しなければならないことは、制約を満たす度合を示す指標が、(13)～(20)式のように6種類((27), (28)式が成立するため6種類となる)あることである。したがって、制約条件 $\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i$ は、

$$\begin{aligned} \text{Poss}(\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i) &\geq h_i^1 \\ \text{Nepo}(\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i) &\geq h_i^2 \\ \text{Pone}(\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i) &\geq h_i^3 \\ \text{Ness}(\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i) &\geq h_i^4 \\ \text{Nepo}(b_i \geq \mathbf{a}_i \mathbf{x}) &\geq h_i^5 \\ \text{Pone}(b_i \geq \mathbf{a}_i \mathbf{x}) &\geq h_i^6 \end{aligned} \quad (31)$$

と定式化される。ただし、 $h_i^j \in [0,1]$, $j=1,2,\dots,6$ は充足水準を示している。(31)式の制約条件は、様相制約条件と呼ばれている。

3.4 目的関数の扱い方

(12)式の目的関数 $\mathbf{c}\mathbf{x}$ の係数 $\mathbf{c}$ は可能性変数であるので、やはり、 $\mathbf{c}\mathbf{x}$ の最大化、すなわち、

$$\max \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (32)$$

に意味を与えなければならない。ここでは、文献[5,6]で提案されたモデルのうち、三つのモデルを紹介する。

(a)制約化モデル 目的関数に基準値 f_0 を与え、(32)式を次の制約条件として扱う。

$$\mathbf{c}\mathbf{x} \geq f_0 \quad (33)$$

もう少し一般化して、“だいたい f_0 以上である”というファジィ目標 G (ファジィ集合)を与え、

$$\mathbf{c}\mathbf{x} \gtrsim f_0 \quad (34)$$

と扱ってもよい(f_0 が可能性変数である場合も考えられている[5,6])。ただし、 $\gtrsim$ はファジィ不等号で、“だいたい $\sim$ 以上”を表す。この場合、 $\mathbf{c}\mathbf{x} \gtrsim f_0$ を満たす度合は、 $\mathbf{c}\mathbf{x}$ を制限する可能性分布を $\pi_{\mathbf{c}\mathbf{x}}$ とすると、 $\Pi_{\mathbf{c}\mathbf{x}}(G)$, $N_{\mathbf{c}\mathbf{x}}(G)$ で与えることができる。

(b)様相性最適化モデル 機会制約条件計画問題の確率最大化モデルに対応するもので、目的関数に基準値 f_0 を与え、目的関数値が f_0 以上となる可能性あるいは必然性を最大化する。より一般には、“だいたい f_0 以上である”というファジィ目標 G を与え、目的関数値がだいたい f_0 以上となる可能性あるいは必然性を最大化する(f_0 が可能性変数である場合も考えられている[5,6])。すなわち、次の3通りの定式化が考えられる。

① 可能性と必然性を同時に最大化する場合

$$\mathbf{v}\text{-max} \quad (\Pi_{\mathbf{c}\mathbf{x}}(G), N_{\mathbf{c}\mathbf{x}}(G)) \quad (35)$$

ただし、 $\mathbf{v}\text{-max}$ はvector maximizeの略である。

② 可能性のみ最大化する場合

$$\max \Pi_{\mathbf{c}\mathbf{x}}(G) \quad (36)$$

③ 必然性のみ最大化する場合

$$\max N_{\mathbf{c}\mathbf{x}}(G) \quad (37)$$

(36), (37)式は、それぞれ、可能性測度最大化モデル、必然性測度最大化モデルと呼ばれている。

一般に、ファジィ目標 G は単調増加なメンバーシップ関数 μ_G をもつと考えられる。特に、 $\pi_{\mathbf{C}\mathbf{x}}$ が有界で、 μ_G 、 $\pi_{\mathbf{C}\mathbf{x}}$ が上半連続である場合、たとえば、(35)式は次の数理計画問題と等価になることが知られている[5,6,9]。

$$\begin{aligned} & \text{v-max} \quad (h, k) \\ & \text{制約条件} \\ & \sup[\mathbf{C}\mathbf{x}]_h \geq \inf[G]_h \\ & \inf[\mathbf{C}\mathbf{x}]_{1-k} \geq \inf[G]_k \\ & 0 \leq h \leq 1, 0 \leq k \leq 1 \end{aligned} \quad (38)$$

ただし、 $[\mathbf{C}\mathbf{x}]_h$ 、 $[G]_h$ は h -レベル集合で、

$$[\mathbf{C}\mathbf{x}]_h = \{r \mid \pi_{\mathbf{C}\mathbf{x}}(r) \geq h\} \quad (39)$$

$$[G]_h = \{r \mid \mu_G(r) \geq h\} \quad (40)$$

と定義される。

(c) 満足水準最適化モデル 機会制約条件計画問題の満足水準最大化モデルに対応するもので、様相性最適化モデルとは逆に、目的関数値が基準値 f 以上である可能性、必然性が与えられた値 h_0 、 k_0 以上のもので f を最大化する。より一般には、“だいたい f 以上である”というパラメータ f をもつファジィ目標 G_f を与え、目的関数値がだいたい f 以上である可能性、必然性が h_0 、 k_0 以上のものでパラメータ f を最大化する。すなわち、

$$\max \{f \mid \Pi_{\mathbf{C}\mathbf{x}}(G_f) \geq h_0, N_{\mathbf{C}\mathbf{x}}(G_f) \geq k_0\} \quad (41)$$

と定式化する。

特に、 $\pi_{\mathbf{C}\mathbf{x}}$ が有界で、 μ_{G_f} 、 $\pi_{\mathbf{C}\mathbf{x}}$ が上半連続である場合、(41)式は次の数理計画問題と等価になる[5,6,9]。

$$\begin{aligned} & \text{max} \quad f \\ & \text{制約条件} \\ & \sup[\mathbf{C}\mathbf{x}]_{h_0} \geq \inf[G_f]_{h_0} \\ & \inf[\mathbf{C}\mathbf{x}]_{1-k_0} \geq \inf[G_f]_{k_0} \end{aligned} \quad (42)$$

さらに、 $k_0=0$ のとき、 $\max \sup[\mathbf{C}\mathbf{x}]_{h_0}$ となり、 $h_0=0$ のとき、 $\max \inf[\mathbf{C}\mathbf{x}]_{1-k_0}$ と等価になる。

3.5 従来のファジィ数理計画問題の分類

従来の種々のファジィ数理計画問題を上述の三つのモデルにより分類すると、表2のようになる

[6,7,8] (ただし、表2の分類では、(25)、(26)式の様相測度以外に Gödel 含意に基づく様相測度[6,8]を用いている)。表2の“FMP 問題”は、ファジィ数理計画問題の略である。表2に示すように、従来のファジィ数理計画問題のほとんどが、機会制約条件計画問題と同様な考え方にに基づき定式化されていたことがわかる。より詳しい分類は文献[6,7,8]を参考されたい。

表2 従来のファジィ数理計画問題の分類

制約化モデル	フレキシブル計画問題[22,23], ファジィ目標計画問題[24,25,26], 田中らの FMP 問題[27,28], Dubois の FMP問題[29], 乾口らの FMP問題[30,31]
様相性最適化モデル	フレキシブル計画問題[32,33], 坂和らの FMP問題[34]
満足水準最大化モデル	Orlovski の FMP問題[35,36], 坂和と矢野の FMP問題[37], Dubois の FMP問題[29], ロバスト計画問題[38], Tanaka らの FMP問題[39], Ramik と Rimanek の FMP問題[40], Luhandjula の FMP問題[41]

4. 確率計画問題とファジィ数理計画問題の等価条件

前章では、機会制約条件計画問題と同様な考え方にに基づき様相制約条件計画問題を定式化し、従来のファジィ数理計画問題のほとんどがこの枠組みで解釈できることを述べた。本章では、確率計画問題をフレキシブル計画問題の考え方にに基づき定式化した問題と、ファジィ数理計画問題を必然性測度最大化に基づき定式化した問題が、ある特別な場合に等価になることを述べる。

4.1 確率計画問題に対するフレキシブル計画問題

次の確率線形計画問題を考える。

$$\max \{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in F\} \quad (43)$$

$$F = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\} \quad (44)$$

ただし、 $\mathbf{c}$ は n 変量正規分布 $N(\gamma, \Sigma)$ に従う確

率変数, A は $m \times n$ 行列, $\mathbf{b}$ は m 次元列ベクトルである. すなわち, (43)式の問題では, 目的関数の係数だけが確率変数になっている.

機会制約条件計画問題の目的関数の扱い方に従い, (43)式を定式化することができる. ここでは, 確率最大化モデルと満足水準最大化モデルを同時に考慮した次の問題[42,43]を考える.

$$\text{v-max } \{ (p, f) \mid \text{Prob}(\mathbf{c}\mathbf{x} \geq f) \geq p \geq 0.5, \mathbf{x} \in F \} \quad (45)$$

ただし, (45)式の問題が凸計画問題となるために, $p \geq 0.5$ なる制約条件が付け加えられている. 多変量正規分布に従う係数をもつ確率計画問題では, 一般にこの条件が加えられる[11,12].

この問題の目的関数 p, f に, それぞれ, ファジィ目標 G_p, G_f を与え, フレキシブル計画問題[7, 9,44]として定式化すると, 次のようになる.

$$\max \{ \min(\mu_{G_p}(\text{Prob}(\mathbf{c}\mathbf{x} \geq f)), \mu_{G_f}(f)) \mid \mathbf{x} \in F \} \quad (46)$$

ただし, $p \geq 0.5$ のため, $\mu_{G_p}(r) = 0, \forall r < 0.5$ と仮定する.

さらに, (46)式を等価変形すると,

$$\max \{ h \mid \gamma\mathbf{x} - \Phi^{-1}(\mu_{G_p}^*(h))\sqrt{\mathbf{x}^t \Sigma \mathbf{x}} \geq \mu_{G_f}^*(h), 0 \leq h \leq 1, \mathbf{x} \in F \} \quad (47)$$

となる[10]. ただし, μ_{G_p}, μ_{G_f} は上半連続な非減少関数と仮定している. また,

$$\mu_{G_p}^*(h) = \inf \{ r \mid \mu_{G_p}(r) \geq h \} \quad (48)$$

$$\mu_{G_f}^*(h) = \inf \{ r \mid \mu_{G_f}(r) \geq h \} \quad (49)$$

と定義される.

4.2 二次形式可能性分布をもつファジィ線形計画問題

次のファジィ線形計画問題を考える.

$$\max \{ \mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in F \} \quad (50)$$

ただし, $\mathbf{c}$ は二次形式可能性分布

$$\pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{c}) = L((\mathbf{c} - \boldsymbol{\delta})D^{-1}(\mathbf{c} - \boldsymbol{\delta})t) \quad (51)$$

で制限された可能性変数である. ただし, $\boldsymbol{\delta} =$

$(\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \dots, \boldsymbol{\delta}_n)$, D は $n \times n$ の対称正定値行列で, D^{-1} はその逆行列である. また, $L: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ は reference 関数 ($L(0) = 1$ なる非増加関数) である. このとき, 目的関数値 $\mathbf{c}\mathbf{x}$ は, 次の可能性分布

$$\pi_{\mathbf{c}\mathbf{x}}(r) = L((r - \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}) / \sqrt{\mathbf{x}^t D \mathbf{x}}) \quad (52)$$

に制限されることが証明されている[14].

目的関数値にファジィ目標 G を与え, ファジィ数理計画問題(50)式を必然性測度最大化モデルとして定式化すると, 次のようになる.

$$\max \{ N_{\mathbf{c}\mathbf{x}}(G) \mid \mathbf{x} \in F \} \quad (53)$$

文献[9]と同様な方法で等価変換すると,

$$\max \{ h \mid \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} - \sqrt{L^*(1-h)}\mathbf{x}^t D \mathbf{x} \geq \mu_G^*(h), 0 \leq h \leq 1, \mathbf{x} \in F \} \quad (54)$$

が得られる[10]. ただし, μ_G は G のメンバシップ関数で, 上半連続で非減少であると仮定している. また,

$$L^*(h) = \begin{cases} \sup \{ r \mid L(r) > h, r \geq 0 \} & ; h < 1 \\ -\infty & ; h = 1 \end{cases} \quad (55)$$

$$\mu_G^*(h) = \inf \{ r \mid \mu_G(r) \geq h \} \quad (56)$$

4.3 (47)式と(54)式の等価条件

(47)式と(54)式の問題は, 非常に似かよっている. 実際, 次の三つの式が成立すれば, これらの問題は全く同じ問題になる.

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\delta}, \Sigma = D \quad (57)$$

$$\Phi^{-1}(\mu_{G_p}^*(h)) = \sqrt{L^*(1-h)}, \forall h \in [0, 1] \quad (58)$$

$$\mu_{G_f}^*(h) = \mu_G^*(h), \forall h \in [0, 1] \quad (59)$$

そこで, この三つの式が成立するための必要十分条件を求めると, 次のようになる[10].

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\delta}, \Sigma = D \\ 1 - L(r^2) &\leq \mu_{G_p}(\Phi(r)), \forall r \geq 0 \\ 1 - L(r^2) &= \mu_{G_p}(\Phi(r)), \\ &\forall r \in Z^c \cap \{r \mid r \geq 0\} \\ \mu_{G_f}(r) &= \mu_G(r), \forall r \in R \end{aligned} \quad (60)$$

ただし, Z は $\mu_{G_P}(\Phi(r))$ が不連続となる $r \geq 0$ の集合で, Z^c はその補集合である. また, R は 1 次元実数空間である. 特に, μ_{G_P} が連続である場合には, (60) 式は次のような簡単な形になる.

$$\begin{aligned} \gamma &= \delta, \quad \Sigma = D \\ 1 - L(r^2) &= \mu_{G_P}(\Phi(r)), \quad \forall r \geq 0 \\ \mu_{G_P}(r) &= \mu_G(r), \quad \forall r \in R \end{aligned} \quad (61)$$

このように, (60) 式が成立するとき, 二次形式可能性分布をもつファジィ線形計画問題に対する必然性測度最大化モデルは, 多変量正規分布をもつ確率計画線形問題に対する確率最大化モデルと満足水準最適化モデルの中間的なモデル(フレキシブル計画問題)と一致する. (45) 式の $p \geq 0.5$ の条件を $p \leq 0.5$ とした場合, (60) 式と同様な条件のもとで(46)式は可能性測度最大化モデルと一致する[45]. このことより, 一般に, ファジィ線形計画問題の様相性最適化モデルは, 確率線形計画問題の確率最大化モデルと満足水準最適化モデルの中間的なモデルに近いものであると考えられる.

4.4 等価性の幾何学的考察

(60) 式が成立するとき, (47) 式の問題と(54)式の問題とが一致する. ここでは, この等価性の理由を幾何学的に考察する. 簡単のため, $n=2$ とし, L の厳密減少性を仮定する.

(60) ((57)) 式が成立するとき, n 変量正規分布の確率密度関数 g は次のようになる.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{c}) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det(D))^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{c} - \delta) D^{-1} (\mathbf{c} - \delta)^t \right\} \end{aligned} \quad (62)$$

ただし, $\det(D)$ は D の行列式である. このとき, L の厳密増加性より, (62) 式の g の等位線と(51)式の π_c の等位線は, レベルは異なるが一致する.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^* \mathbf{x} &= \inf_{\mathbf{c}} \{ \mathbf{c} \mathbf{x} \mid \pi_c(\mathbf{c}) \geq 1-h \} \\ &= \delta \mathbf{x} - \sqrt{L^*(1-h) \mathbf{x}^t D \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (63)$$

なる $\mathbf{c}^*$ は, $\mathbf{x} \geq 0$ より, 図 1 の孤 PQ 上にあり, 超平面 $\mathbf{c} \mathbf{x} = \mathbf{c}^* \mathbf{x}$ は, π_c のレベル $1-h$ の等位線の

$\mathbf{c}^*$ における接線となる. $\mathbf{c} \mathbf{x} \geq \mathbf{c}^* \mathbf{x}$ なる $\mathbf{c}$ の領域の確率 $p_h = \text{Prob}(\mathbf{c} \mathbf{x} \geq \mathbf{c}^* \mathbf{x})$ は, $\mathbf{c} \mathbf{x} = \mathbf{c}^* \mathbf{x}$ が孤 PQ 上で接点をもつ限り一定である. 実際, (63) 式より,

$$\begin{aligned} p_h &= \text{Prob} \left(\frac{\mathbf{c} \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t D \mathbf{x}}} \geq \frac{\mathbf{c}^* \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t D \mathbf{x}}} \right) \\ &= \text{Prob} \left(\frac{\mathbf{c} \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t D \mathbf{x}}} \geq \sqrt{L^*(1-h)} \right) \end{aligned} \quad (64)$$

となり, $(\mathbf{c} \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}) / \sqrt{\mathbf{x}^t D \mathbf{x}}$ は任意の $\mathbf{x}$ について標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので, p_h は一定になる. したがって, レベル $1-h$ と確率 p_h は一意に対応する. 任意の n についても同様である. この一意対応が(47)式の問題と(54)式の問題の等価性の理由であると考えられる.

図 1 π_c の等位線

5. おわりに

確率計画問題とファジィ数理計画問題との類似性について述べた. 3章で述べたように, 従来のファジィ数理計画問題のほとんどは, 機会制約条件計画問題と同様な考え方に基づき, 可能性, 必然性の概念を通して定式化されている. 一方, 分布問題や二段計画問題に対応するファジィ数理計画問題は, まだあまり研究されていない. この方

面の研究は残された課題の一つである。また、4章で述べたように、ファジィ線形計画問題の様相性最適化モデルが確率線形計画問題の確率最大化モデルと満足水準最大化モデルの中間的なモデルに近い。このことから、レベル $1-h$ と確率 p_h のおまかな対応関係を求め、より容易な従来のファジィ数理計画法[9,46]による確率計画問題の近似解法[45]などが考えられる。

本稿で述べた内容とは少し異なるが、現状での確率計画法とファジィ数理計画法の特徴(長短)を以下にまとめる(著者の偏見や誤解によるところがあるかもしれませんが、多少とも今後の研究の参考になれば幸いです)。

〔確率計画法〕

- S1 係数間の従属性(相互関係)を考慮できる。
- S2 確率線形計画問題の場合、期待値最大化モデル、分散最小化モデルでは、確率分布の型に関係なく、線形計画法、2次計画法で解くことができる。また、係数ベクトルが多変量正規分布に従うときには、確率最大化モデル、満足水準最大化モデルについても、2次計画法を適用して解を求めることができる。
- S3 係数の不明確さしか考慮していない。“だいたい大きい”などの漠然とした関係はあまり取り扱われていない(ファジィ関係やファジィ目標を導入して定式化することもできるが、まだあまり提案されていない)。
- S4 確率最大化モデル、満足水準最大化モデルの場合、確率分布の型に依存して解法を考案しなければならない。一般に解きにくい。

〔ファジィ数理計画法〕

- F1 係数間の相互関係があまり考慮されていない(4章のように、考慮することもできるが、まだ十分に研究されていない)。
- F2 係数間に相互関係がない場合、ファジィ線形計画問題では、可能性分布の型に関係なく、線形計画法を適用して解を求めることができる。係数間に相互関係がある場合でも、可能

性分布が凸であれば、レベル集合の線形近似により、同様な方法で解けると考えられる。

F3 係数の不明確さと“だいたい大きい”などの漠然とした関係を同時に取り扱っている。

F4 可能性測度と必然性測度の二つを取り扱っている。これらを組み合わせることにより、意思決定者の微妙な不確実性に対する態度を定性的に表すことができる。

以上、‘解説’というよりも‘概説’になってしまったようである。ファジィ数理計画法の実用や応用を考えておられる読者は、文献[9,21,46,47,48]などを参考して頂きたい。ファジィブームのお蔭で、ファジィ数理計画法に対しても、何人かのオペレーションズ・リサーチ(OR)の研究者が目を向け始めているように思われる。従来の研究者に加えて、生粋のORワーカーがファジィ数理計画問題の解法の研究や各種計画問題への応用を行い、ファジィ数理計画法がより発展し、実用化されることを期待して、本稿を終わらせて頂きます。

参 考 文 献

1. A.V. Yazenin: Fuzzy and Stochastic Programming, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.22, 171-180 (1987).
2. R. Slowinski and J. Teghem: Fuzzy versus Stochastic Approaches to Multicriteria Linear Programming under Uncertainty, *Naval Research Logistics*, Vol.35, 673-695 (1988).
3. M. Roubens and J. Teghem: Comparison of Methodologies for Fuzzy and Stochastic Multi-Objective Programming, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.42, 119-132 (1991).
4. R. Slowinski and J. Teghem (eds.), *Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1990).
5. M. Inuiguchi, H. Ichihashi and Y.Kume: Modality Constrained Programming Problems: A Unified Approach to Fuzzy Mathematical Programming Problems in the Setting of Possibility Theory, *Information Sciences*

- (to appear).
6. 乾口：ファジィ数理計画問題の可能性理論に基づく体系的定式化法，大阪府立大学博士論文 (1991).
 7. M. Inuiguchi, H. Ichihashi and Y. Kume : Relationships between Modality Constrained Programming Problems and Various Fuzzy Mathematical Programming Problems, *Fuzzy Sets and Systems* (to appear).
 8. 乾口，久米：Gödel含意を導入した様相制約条件計画問題と種々のファジィ数理計画問題，システム制御情報学会論文誌，Vol.4, No.9, 382-392 (1991).
 9. 乾口：ファジィ数理計画，ファジィOR講習会テキスト，1-30 (1990).
 10. 乾口，久米：確率計画問題と可能性計画問題の等価条件について，システム制御情報学会論文誌，Vol.4, No.6, 255-257 (1991).
 11. 石井：確率論的最適化，伊理，今野編，数理計画法の応用<理論編>，産業図書，1-40(1982).
 12. I.M. Stancu-Minasian, *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1984).
 13. E. Sanchez : Solution of Fuzzy Equations with Extended Operations, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.12, 237-248 (1984).
 14. 田中，ファジィモデリングとその応用，朝倉書店 (1990).
 15. D. Dubois and H. Prade : The Mean Value of a Fuzzy Number, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 24, 279-300 (1987).
 16. D. Dubois and H. Prade : Properties of Measures of Information in Evidence and Possibility Theories, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.24, 161-182 (1987).
 17. 乾口，久米：ファジィ多目的計画問題に対する解の概念，日本ファジィ学会誌，Vol.2, No.1, 65-78 (1990).
 18. 乾口，久米：様相性目標計画問題，*Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.32, No.3, 326-351 (1989).
 19. D. Dubois and H. Prade : Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory, *Information Sciences*, Vol.30, 183-224 (1983).
 20. 乾口，市橋，田中：様相概念に基づくファジィ選好関係の拡張とその性質，Vol.24, No.7, 738-745 (1988).
 21. 坂和，ファジィ理論の基礎と応用，森北出版 (1989).
 22. 田中，奥田，浅居：Fuzzy 数理計画法，計測自動制御学会論文集，Vol.9, No.5, 607-613(1973).
 23. H.-J. Zimmermann : Description and Optimization of Fuzzy Systems, *International Journal of General Systems*, vol.2, 209-215 (1976).
 24. R. Narasimhan : Goal Programming in a Fuzzy Environment, *Decision Sciences*, Vol.11, 325-336 (1980).
 25. E.L. Hannan : Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 6, 235-248 (1981).
 26. E.L. Hannan : On Fuzzy Goal Programming, *Decision Sciences*, Vol.12, 522-531(1981).
 27. 田中，浅居：ファジィ関数による線形計画問題の定式化，システムと制御，Vol.25, 351-357 (1981).
 28. 田中，市橋，浅居：ファジィ関数によるファジィ線形計画問題の定式化—台形ファジィパラメータの場合，計測自動制御学会論文集，Vol.19, 928-930 (1983).
 29. D. Dubois : Linear Programming with Fuzzy Data, in J.C. Bezdek (ed.), *Analysis of Fuzzy Information, Vol.III : Applications in Engineering and Science*, CRC Press, Boca Raton, 241-263 (1987).
 30. 乾口，市橋，田中：多属性価値関数を用いたファジィ線形計画法，*Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.31, No.1, 121-142 (1988).
 31. M. Inuiguchi and H. Ichihashi : Relative Modalities and Their Use in Possibilistic Linear Programming, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 35, 303-323 (1990).
 32. M. Sakawa and H. Yano : An Interactive Fuzzy Decisionmaking Method Using Constraint Problems, *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol.SMC-16, 179-182 (1986).
 33. M.K. Luhandjula : Fuzzy Optimization : An Appraisal, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.30, 257-282 (1989).
 34. 坂和，矢野，高橋：ファジィ係数を含む多目的線形計画問題に対するファジィ目標を考慮した解

- の概念に基づく対話型意思決定, 日本ファジィ学会誌, Vol.2, No.4, 114-124(1990).
35. S.A. Orlovsky : On Formalization of a General Fuzzy Mathematical Programming Problem, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.3, 311-321 (1980).
 36. S.A. Orlovski : Multiobjective Programming Problems with Fuzzy Parameters, *Control and Cybernetics*, Vol.13, 175-183 (1984).
 37. 坂和, 矢野 : ファジィパラメータを含む多目的非線形計画問題に対する対話型意思決定, 計測自動制御学会論文集, Vol.22, 162-167, (1986).
 38. C.V. Negoita : The Current Interest in Fuzzy Optimization, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.6, 261-269 (1981).
 39. H. Tanaka, H. Ichihashi and K. Asai : A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problem Based on Comparison of Fuzzy Numbers, *Control and Cybernetics*, Vol.13, 185-194 (1984).
 40. J. Ramik and J. Rimanek : Inequality Relation between Fuzzy Numbers and Its Use in Fuzzy Optimization, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.16, 123-138 (1985).
 41. M.K. Luhandjula : Satisfying Solution for a Possibilistic Linear Program, *Information Sciences*, Vol.40, 247-265(1986).
 42. A.M. Geoffrion : Stochastic Programming with Aspiration or Fractile Criteria, *Management Science*, Vol.13, No.9, 672-679 (1967).
 43. H. Ishi, T. Nishida and Y. Nanbu : A Generalized Chance Constraint Programming Problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.21, No.1, 124-145 (1978).
 44. H.-J. Zimmermann : Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1, 45-55 (1978).
 45. 乾口, 東口, 久米 : 確率計画問題に対するファジィ数理計画法によるアプローチ, 第34回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, 405-406(1990).
 46. 市橋, 乾口 : 可能性理論にもとづくファジィ多目的線形計画法, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 36, No.9, 440-444 (1991).
 47. 坂和, 線形システムの最適化<一目的から多目的へ>, 森北出版 (1984).
 48. 坂和, 非線形システムの最適化<一目的から多目的へ>, 森北出版 (1986).

(1991年10月30日 受付)

[問い合わせ先]

〒591 堺市百舌鳥梅町4丁804
大阪府立大学 工学部 経営工学科
乾口 雅弘
☎ : 0722-52-1161(内線)2374
FAX : 0722-59-3340

著者紹介

乾口 雅弘 (いぬいぐち まさひろ)

大阪府立大学 工学部経営工学科

1985年3月大阪府立大学工学部経営工学科卒業, 1987年3月大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程(経営工学専攻)修了。同年4月同大学経営工学科助手。現在に至る。博士(工学)。主として, 可能性理論, Dempster-Shafer 理論, ファジィ数理計画法, 意思決定法および近似的推論法に関する研究に従事。1991年度システム制御情報学会樺木記念賞奨励賞受賞。計測自動制御学会, 国際ファジィシステム学会, システム制御情報学会, 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 日本経営工学会, 日本ファジィ学会などの会員。