|||||
連 載
|||||

ファジィ測度論入門〔VII〕[†]

室伏 俊明* 菅野 道夫*

6. ファジィ積分

連載第1回(本誌 Vol.2, No.2)でも述べたように、ファジィ測度に関してさまざまな積分形が提案されている。今回はそれらを概観し、特に第1回であり説明しなかった t -コノルム積分と、その拡張である t -コノルム・ファジィ積分[1]を中心に解説する。なおこの連載では、ファジィ測度に関する積分一般をファジィ積分と総称している。

菅野[2]は、ファジィ測度と同時にファジィ測度による積分(菅野積分)も提案した。しかし、ファジィ測度が確率測度の拡張なのに対し、菅野積分は Lebesgue 積分の拡張ではない。この点が問題視され、さまざまなファジィ積分が提案されることとなった。

それは λ -ファジィ測度に関する積分から始まった。 λ -ファジィ測度とは、加法性に似た性質

$$E \cap F = \emptyset \Rightarrow g_{\lambda}(E \cup F) = g_{\lambda}(E) + g_{\lambda}(F) + \lambda g_{\lambda}(E)g_{\lambda}(F)$$

をもつファジィ測度 g_{λ} である[3]。 λ は $-1 < \lambda < \infty$ なるパラメータで、 $\lambda = 0$ のとき g_{λ} は確率測度になる。Kruse[4]は、 g_{λ} に関する積分で $\lambda = 0$ のときに Lebesgue 積分に一致するような積分を定義した。Weber[5]は λ -ファジィ測度を一般化した $\perp$ -分解可能測度 m を定義し、この測度に関する積分を定義した。 λ -ファジィ測度に関する Weber の積分は、Kruse の積分によく似ていたが、それを含むものではなかった。そこでその後、

Weber は彼の積分を Kruse の積分を含むものに一般化した[6]。菅野・室伏[7]や市橋・田中・浅居[9]も、分解可能測度を擬加法的測度(pseudo-additive measure)と呼び、積分を研究していた。その後、室伏・菅野[1]は Weber の積分を代数的に整理し直し、分解可能測度に関する t -コノルム積分を提案した。この積分は Weber の積分のほとんどを含む。そして、彼らはこの積分を一般のファジィ測度に関する t -コノルム・ファジィ積分へと拡張した。この積分は、 t -コノルム積分を含むばかりでなく、菅野積分と Choquet 積分をもその特殊形として含む。

以下、 (Ω, S) を可測空間とする。便宜上 6.1-6.3 節で扱うファジィ測度 μ は正規、すなわち、 $\mu(\Omega) = 1$ であるものだけとし、被積分関数の値域も単位区間 $[0, 1]$ に限るとする。

6.1 節では菅野積分と Choquet 積分、6.2 節で t -コノルム積分、6.3 節で t -コノルム・ファジィ積分を解説する。6.4 節ではリスクに対する態度を表す分解可能測度について述べる。最後の 6.5 節では、ランダム集合から導入されるファジィ測度に関する積分についてコメントする。

6.1. 菅野積分と Choquet 積分

菅野積分

[定義 6.1.1] 可測関数 $f: \Omega \rightarrow [0, 1]$ の μ に関する菅野積分は次のように定義される。

$$\int f(\omega) \circ \mu(\cdot) \triangleq \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge \mu(\{\omega | f(\omega) > \alpha\})]. \quad (1)$$

単関数 $f: \Omega \rightarrow [0, 1]$ は一般に

[†] An Introduction to Fuzzy Measure Theory (VII)
Toshiaki MUROFUSHI and Michio SUGENO

* 東京工業大学大学院 総合理工学研究科 システム科学専攻
Dept. of Systems Science, Tokyo Institute of Technology

$$f(\omega) = \bigvee_{i=1}^n [a_i \wedge 1_{A_i}(\omega)] \quad (2)$$

$$(0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq 1, A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n)$$

の形に表すことができる。このとき、 f の μ に関する菅野積分は、

$$\int f \circ \mu = \bigvee_{i=1}^n [a_i \wedge \mu(A_i)] \quad (3)$$

で表される。(2)式の右辺の定義関数を測度に置き換えた形をしていることに注意されたい。

ファジィ測度 μ が 2^{Ω} 上の可能性測度のときには、

$$\int f \circ \mu = \sup_{\omega \in \Omega} [f(\omega) \wedge \mu(\{\omega\})] \quad (4)$$

と表せることが知られている[9]。

Choquet 積分

Choquet 積分については前々回(本誌 Vol.3, No.4)に説明したが、他のファジィ積分との比較のため、簡単に概略を述べておく。

$f: \Omega \rightarrow [0, 1]$ の Choquet 積分は、次式で定義される。

$$\begin{aligned} (C) \int f(\omega) d\mu \\ \triangleq \int_0^1 \mu(\{\omega \mid f(\omega) > \alpha\}) d\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

右辺は通常の積分である。単関数 $f: \Omega \rightarrow [0, 1]$ は一般に

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) 1_{A_i}(\omega), \quad (6)$$

$$(0 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq 1, A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n)$$

と表すことができ、この f の Choquet 積分は

$$(C) \int f d\mu = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \mu(A_i) \quad (7)$$

である。

Choquet 積分と菅野積分はよく似ている。まず、ともに定義式((1)式と(5)式)に $\mu(\{\omega \mid f(\omega) > \alpha\})$ が現れている。また、単関数の積分

は、単関数の表現式((2)式と(6)式)の定義関数を測度に置き換えた形((3)式と(7)式)で与えられる。そして、(2)式と(6)式では、ともに $\{a_i\}$ が単調非減少列、 $\{A_i\}$ が単調非増加列になっている。

なお、菅野積分と Choquet 積分の積分値の間には次のような関係もある[10]。

$$\left| (C) \int f d\mu - \int f \circ \mu \right| \leq 1/4$$

6.2. t-コノルム積分

分解可能測度

ファジィ測度は単調性だけしか仮定しないので、加法性を持つ確率測度に比べると、極めて一般的な集合関数である。そしてこの一般性が、ファジィ測度に豊かな表現能力をもたらしている。

しかし、この一般性は「 Ω が有限集合の場合でも、すべての部分集合について測度の値を定めるのは困難である」という問題を生じさせる。 Ω が有限集合の場合、確率測度は $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ なる関数 $p: \Omega \rightarrow [0, 1]$ と等価であり、 p から出発して加法性により、すべての部分集合 E の確率を

$$P(E) \triangleq \sum_{\omega \in E} p(\omega) \quad (8)$$

と容易に定めることができる。これに対し、一般のファジィ測度には上の p に対応するものがない。また、一般のファジィ測度は一般的すぎて数学的に理論展開しにくい。

そこで、提案されたのが菅野による λ -ファジィ測度であり、 λ -ファジィ測度を一般化した $\perp$ -分解可能測度である。(以下で扱う t -コノルムについては付録1を参照されたい。)

[定義 6.2.1] $\perp$ を t -コノルムとすると、

$$\text{DM 1 } m(\emptyset) = 0, \quad m(\Omega) = 1,$$

$$\text{DM 2 } A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) \perp m(B)$$

を満たす集合関数 $m: S \rightarrow [0, 1]$ を $(\perp)$ -**分解可能測度**(decomposable measure)という。さらに

$$\text{DM 3 } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j \Rightarrow$$

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \perp_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

を満たすとき、 σ -($\perp$ -)分解可能測度という。

DM 2 は分解可能公理と呼ばれる。この公理により、 Ω が有限集合のとき、(8)式に対応する式

$$m(E) = \bigcup_{\omega \in E} m(\{\omega\}) \quad (9)$$

が成立する。

さて、容易にわかるように、分解可能測度はファジィ測度である。通常の加法的な測度は σ - $\dot{+}$ -分解可能測度であり、可能性測度は σ - $\vee$ -分解可能測度である ($\dot{+}$ は限界和)。

$\perp$ が生成関数 ψ をもつとき (すなわち、連続なアルキメデス型 t -コノルム系) のとき、 $\perp$ -分解可能測度 m は次の 3 タイプに分類できる [5]。

(S) $\psi \circ m$ が加法的な集合関数であり、

$$\psi \circ m(\Omega) = \infty.$$

(NSA) $\psi \circ m$ が加法的な集合関数であり、

$$\psi \circ m(\Omega) < \infty.$$

(NSP) (S) でも (NSA) でもない。

(S) と (NSA) の分解可能測度が数学的によい性質を持っている。本節では、(S)、(NSA) および $\vee$ -分解可能測度だけを扱う。

t -コノルム系

分解可能測度に関する積分を定義するために、代数構造を定義する

[定義 6.2.2] $\triangle, \perp$ および $\blacktriangle$ を連続な t -コノルムであり、写像 $\diamond : ([0,1], \triangle) \times ([0,1], \perp) \rightarrow ([0,1], \blacktriangle)$ が次の 4 条件を満たすとき、4 つ組 $(\triangle, \perp, \blacktriangle, \diamond)$ を t -コノルム系と呼ぶ。

TS 1 $\diamond$ は $(0,1] \times (0,1]$ 上で連続、

TS 2 $a \diamond x = 0 \Leftrightarrow a = 0$ または $x = 0$

TS 3 $x \perp y < 1$ のとき

$$a \diamond (x \perp y) = (a \diamond x) \blacktriangle (a \diamond y) \quad \forall a$$

TS 4 $a \triangle b < 1$ のとき

$$(a \triangle b) \diamond x = (a \diamond x) \blacktriangle (b \diamond x) \quad \forall x$$

$\triangle, \perp$ および $\blacktriangle$ が生成関数をもつとき、それら

をそれぞれ ϕ, ψ, ξ で表す。

さまざまな t -コノルム系のうち、trivial でない構造をもつのは、次の 2 つの型だけである [1]。

• アルキメデス型

$\triangle, \perp$ および $\blacktriangle$ がアルキメデス的であり、

$$a \diamond x = \xi^{(-1)}(\phi(a) \cdot \psi(x)) \quad \forall x, \forall a \quad (10)$$

• max 型

$$\triangle = \perp = \blacktriangle = \vee$$

アルキメデス型の t -コノルム系に対し、(10)式を与える ϕ, ψ, ξ の組 (ϕ, ψ, ξ) をその生成関数群と呼ぶ。

t -コノルム積分

[定義 6.2.3] m を、(S) または (NSA) の $\perp$ -分解可能測度、もしくは $\vee$ -分解可能測度とする。可測関数 $f : \Omega \rightarrow [0,1]$ の、 t -コノルム系 $T = (\triangle, \perp, \blacktriangle, \diamond)$ に基づく t -コノルム積分を次のように定義する。

(1) f が単関数

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{D_i}$$

(ただし、 $D_i \cap D_j = \emptyset$ for $i \neq j$) のとき、

$$(T) \int f \, dm \triangleq \bigtriangleup_{i=1}^n [a_i \diamond m(D_i)] \quad (11)$$

(2) f が単関数でないとき、

$$(T) \int f \, dm \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} (T) \int f_n \, dm$$

ただし、 $\{f_n\}$ は f に一様収束する単関数列である。

m が σ - $\perp$ -分解可能測度で、 t -コノルム系がアルキメデス型るとき、その生成関数群を (ϕ, ψ, ξ) とすると、 m に関する t -コノルム積分は、

$$(T) \int f \, dm = \xi^{(-1)} \left(\int \phi(f) \, d(\psi \circ m) \right)$$

と表される。右辺中の積分は通常の Lebesgue 積分である。特に $\blacktriangle = \perp$ (つまり $\xi = \psi$) ならば、これは (S) や (NSA) に関する Weber の積分に一致する。また、 $\blacktriangle = \perp = \vee$ かつ $\diamond = \wedge$ のとき、この積分は可能性測度に関する菅野積分に一致する。

$\blacktriangle = \perp = \vee$ かつ $\diamond = \cdot$ (代数積)のときは, Shilkret による積分[13]になる.

$(\triangle, \perp, \blacktriangle, \diamond)$ に基づく t -コノルム積分において, $([0,1], \triangle)$ は被積分関数のとる値の空間, $([0,1], \perp)$ は分解可能測度のとる値の空間, $([0,1], \blacktriangle)$ は積分値の空間である. したがって, $\blacktriangle = \triangle$ のとき, $a \diamond 1 = a \quad \forall a \in [0,1]$ とすれば, t -コノルム積分は被積分関数の期待値と解釈できる. また, $\blacktriangle = \perp$ のときには, $1 \diamond x = x \quad \forall x \in [0,1]$ であれば, t -コノルム積分は分解可能測度の拡張(集合の測度から関数の測度への拡張)と見なされる. 特にこのとき, 被積分関数をファジィ集合のメンバーシップ関数と見なせば, t -コノルム積分は分解可能測度のファジィ集合への拡張となる(例えば[11]).

上でみたように, m が(S)または(NSA)の σ -分解可能測度のとき, $\psi \circ m$ は通常の加法的な測度になり, m に関する t -コノルム積分は $\psi \circ m$ に関する Lebesgue 積分を $\xi^{(-1)}$ によって変換することによって得られる. したがって数学的観点からは, このような分解可能測度 m にあまり魅力はない.

しかし, リスク下での意思決定に分解可能測度を応用する興味深いアイデアが塚本[12]により提案されている. 6.4 節で, それを簡単に紹介する.

ここでは t -コノルムによって分解可能なファジィ測度を扱ったが, t -ノルムによって分解可能なファジィ測度に関しても同様の議論ができる(付録2参照).

6.3. t -コノルム・ファジィ積分

本節では, t -コノルム積分を, 必ずしも分解可能でない一般のファジィ測度に関する積分に拡張する. そのために, まず次の演算を定義する.

t -コノルムの減算

[定義 6.3.1] t -コノルム $\triangle$ に対して, 演算 $-_{\triangle}$ を

$$a -_{\triangle} b \triangleq \inf\{c \mid b \triangle c \geq a\}$$

と定義する.

$\triangle = \vee$ のときには,

$$a -_{\triangle} b = \begin{cases} a & a \geq b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

であり, $\triangle$ が生成関数 ξ を持てば,

$$a -_{\triangle} b = \xi^{(-1)}(0 \vee [\xi(a) - \xi(b)])$$

となる. また, $\triangle$ が連続ならば $a \geq b$ のとき,

$$(a -_{\triangle} b) \triangle b = a$$

である.

さて, $f: \Omega \rightarrow [0,1]$ が単関数ならば

$$f = \bigtriangleup_{i=1}^n a_i 1_{D_i}$$

(ただし, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ for $i \neq j$)と表すことができる. この f は上の演算 $-_{\triangle}$ を使って

$$f = \bigtriangleup_{i=1}^n (a_i -_{\triangle} a_{i-1}) 1_{A_i} \quad (12)$$

($a_0 = 0$, $A_i = \bigcup_{k=i}^n D_k$)とも表せる. (12)式は, $\triangle = \vee$ のとき(2)式に, $\triangle = \cdot$ のとき(6)式に一致することに注意されたい. これらの準備のもとに, t -コノルム・ファジィ積分を定義する.

積分の定義

[定義 6.3.2] μ を (Ω, S) 上のファジィ測度とする. 可測関数 $f: \Omega \rightarrow [0,1]$ の, t -コノルム系 $T = (\triangle, \perp, \blacktriangle, \diamond)$ に基づく t -コノルム・ファジィ積分は次のように定義される.

(1) f が(12)式で表される単関数のとき,

$$(T) \int f d\mu$$

$$\triangleq \bigtriangleup_{i=1}^n [(a_i - \triangle a_{i-1}) \diamond \mu(A_i)] \quad (13)$$

(2) f が単関数でないとき,

$$(T) \int f d\mu \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} (T) \int f_n d\mu$$

ただし, $\{f_n\}$ は f に一様収束する単関数列である.

t -コノルム積分と同様, $(\triangle, \perp, \blacktriangle, \diamond)$ に基づく t -コノルム・ファジィ積分において, $([0, 1], \triangle)$ は被積分関数のとる値の空間, $([0, 1], \perp)$ は分解可能測度のとる値の空間, $([0, 1], \blacktriangle)$ は積分値の空間である.

他のファジィ積分との関係

t -コノルム・ファジィ積分は, t -コノルム積分の一般化である. (13) 式は, t -コノルム系の性質を使うと

$$\bigtriangleup_{i=1}^n a_i \diamond [\mu(A_i) - \perp \mu(A_{i+1})]$$

(ただし, $A_{n+1} = \emptyset$) と変形できる. このことから, μ が (S) または (NSA) の $\perp$ -分解可能測度のとき, $D_i \triangleq A_i - A_{i+1}$ とおけば, t -コノルム積分 (11) 式に一致することがわかる.

t -コノルム・ファジィ積分は Choquet 積分の一般化でもある. T がアルキメデス型の場合には, 生成関数群 (ϕ, ψ, ξ) を用いて,

$$(T) \int f d\mu = \xi^{(-1)} \left((C) \int \phi(f) d(\psi \circ \mu) \right) \quad (14)$$

と表せる. 特に, $\triangle = \perp = \blacktriangle = \dot{+}$ で, $\diamond = \cdot$ ならば, これは Choquet 積分になる. (13) 式も, $\blacktriangle = \triangle = \dot{+}$ で $\diamond = \cdot$ のとき, 単関数の Choquet 積分 (7) 式に一致する.

また, t -コノルム・ファジィ積分は菅野積分の一般化でもある. (13) 式は, $\blacktriangle = \triangle = \vee$ で $\diamond = \wedge$ のとき, 単関数の菅野積分 (3) 式に一致する. T が一般の max 型 のときには,

$$(T) \int f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \diamond \mu(\{\omega | f(\omega) > \alpha\})] \quad (15)$$

と表される. $\diamond$ が連続な t -ノルムのとき, この積分は Weber による菅野積分の変形版 [6, (12) 式] に一致する. 特に $\diamond = \wedge$ ならば, 菅野積分になる. これらの積分の関係を Venn 図にまとめると, 図 1 のようになる.

- 1: $\dot{+}$ -分解可能測度 (NSA) による積分 (Lebesgue 積分)
 2: $\vee$ -分解可能測度による積分
 3: $\{0, 1\}$ を値域とするファジィ測度による積分
 4: $\{0, 1\}$ を値域とする $\perp$ -分解可能測度による積分

図 1 ファジィ積分間関係

数学的性質

t -コノルム・ファジィ積分は次の性質をもつ.

- (単調性) $f(\omega) \leq g(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \Rightarrow$

$$(T) \int f d\mu \leq (T) \int g d\mu.$$

- (測度の拡張) $1 \diamond x = x \quad \forall x \in [0, 1]$ のとき,

$$(T) \int 1_A d\mu = \mu(A) \quad \forall A \in S.$$

- (期待値) $a \diamond 1 = a \quad \forall a \in [0, 1]$ のとき,

$$(T) \int a d\mu = a \quad \forall a \in [0, 1].$$

$$\begin{aligned} & \cdot f(\omega) < f(\omega') \Rightarrow g(\omega) \leq g(\omega') \\ & \forall \omega, \omega' \in \Omega \text{ ならば,} \\ & (T) \int (f \triangle g) d\mu = \left((T) \int f d\mu \right) \blacktriangle \left((T) \int g d\mu \right). \end{aligned}$$

コメント

さて、上で見たように、 t -コノルム・ファジィ積分は(14)式または(15)式で表される。(14)式は本質的に Choquet 積分であり、(15)式は菅野積分の変形といえる。したがって、数学的観点、特に積分論の観点からすれば、ファジィ積分のなかで真に本質的なものは Choquet 積分と菅野積分だけといえよう。

前回、ファジィ測度 μ が加法的な測度 m によって表現され、 μ に関する Choquet 積分が m に関する Lebesgue 積分によって表現されることを示した。これと同様に、 t -コノルム系 $T=(\triangle, \perp, \blacktriangle, \blacktriangleright)$ が与えられたとき、ファジィ測度 μ は $\perp$ -分解可能測度 m によって表現され、 μ に関する t -コノルム・ファジィ積分は m に関する t -コノルム積分によって表現される。詳しくは[1]を参照されたい。

6.4. リスクに対する態度を表す分解可能測度

本節の内容は、塚本による研究[12]をもとにしているが、だいぶ脚色している。

まず、 λ -加法 $\oplus_\lambda$ を使って説明する。 λ -加法については付録1を参照されたい。 λ -加法 $\{\oplus_\lambda\}$ はパラメータ λ をもつパラメータ族であり、 λ の変域は $(-1, \infty)$ である。 ξ_λ を $\oplus_\lambda$ の生成関数で $\xi_\lambda(1)=1$ なるものとする(詳細は付録1)。

(Ω, S, P) を任意の確率空間とすると、 $\xi_\lambda^{-1} \circ P$ は (Ω, S) 上の σ - $\oplus_\lambda$ -分解可能測度になる。 Ω 上の可測関数 f の $\xi_\lambda^{-1} \circ P$ に関する Choquet 積分を $E_\lambda(f)$ で表し、 λ -期待値と呼ぶことにする。

なお、ここで考える可測関数は、その値域を単位区間 $[0, 1]$ に限定せず、一般の実数値をとるとする。さて、任意に固定した可測関数 f に対して、

$E_\lambda(f)$ は λ の単調減少関数であり、

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1} E_\lambda(f) = \text{ess sup } f(\omega), \quad (16)$$

$$E_0(f) = E(f) \triangleq \int f dP, \quad (17)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda(f) = \text{ess inf } f(\omega) \quad (18)$$

となる(図2上部のグラフ参照)。ここで、 $\text{ess sup } f(\omega)$ は f の本質的上限と呼ばれ、

$$\begin{aligned} & \text{ess sup } f(\omega) \\ & \triangleq \inf \{x \mid P(\{\omega \mid f(\omega) \geq x\}) = 0\} \end{aligned}$$

で定義される。 $\text{ess inf } f(\omega)$ は、この双対概念

$$\text{ess inf } f(\omega) = -\text{ess sup } [-f(\omega)]$$

である。大雑把には、 $\text{ess sup } f(\omega)$ は f の最大値、 $\text{ess inf } f(\omega)$ は f の最小値と思えばよい。

(17)式の右辺は P に関する f の Lebesgue 積分、すなわち通常の期待値である。

さて、意思決定問題における代替案 f の評価が、ある固定された λ に関する、結果の価値の λ -期待値 $E_\lambda(f)$ で与えられると仮定しよう。つまり、

$$E_\lambda(f) \leq E_\lambda(g) \Leftrightarrow g \text{ は } f \text{ より選好される}$$

ということである。 f と $E(f)$ の間の選好関係を見ると、 $E_\lambda(E(f)) = E(f)$ と上の E_λ の性質から、この λ は意思決定者のリスクに対する態度と解釈できる。すなわち、 λ が負のとき $E_\lambda(f) > E(f)$ なのでリスク志向型であり、 -1 に近づくにつれてその傾向が大きくなる。逆に、 λ が正のとき $E_\lambda(f) < E(f)$ なのでリスク回避型になり、値が大きくなるにつれてその傾向が大きくなる。 $\lambda = 0$ のときは、リスク中立型である(図2)。

リスク志向型を表す λ の領域は $(-1, 0)$ 、リスク回避型の領域は $(0, \infty)$ で、リスク回避型の領域の方が広く、アンバランスに見える。しかし、

$$s: \lambda \mapsto -\lambda/(1+\lambda)$$

という対応によって、2つの領域は対称と見なせるのである。第1に $\xi_\lambda^{-1} \circ P$ と $\xi_{s(\lambda)}^{-1} \circ P$ は互いに双対的なファジィ測度になっている：

$$\xi_{s(\lambda)}^{-1} \circ P(A) = 1 - \xi_{\lambda}^{-1} \circ P(A^c). \quad (19)$$

第2に、期待値に関しては

$$E_{\lambda}(f) = -E_{s(\lambda)}(-f) \quad (20)$$

の関係がある。したがって、 λ と $s(\lambda)$ は、リスクに関して対称な態度と見なすことができる。なお、塚本[12]は λ を、 $1/2$ を中心として対称な変域をもつ別のパラメータ h に変換し、さらに h の値をファジィ化している。

ここでは塚本[12]に従い、パラメータ族として λ -加法を取り上げた。しかし、 λ -加法に限らず、次の条件を満たす生成関数 ψ_p をもつパラメータ族ならば何でもよい。

パラメータ p の変域を (α, β) とするとき、

$$\text{AR 1: } \psi_p(1) = 1 \quad \forall p \in (\alpha, \beta)$$

$$\text{AR 2: ある } \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ に対して,}$$

$$\psi_{\gamma}(x) = x \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{AR 3: } x \in [0, 1] \text{ を任意に固定するとき, } \psi_p(x) \text{ は } p \text{ の単調関数(単調非増加または単調非減少)}.$$

図2 λ の解釈

$$\text{AR 4: } \begin{cases} \lim_{p \rightarrow \alpha} \psi_p(x) = [x], \\ \lim_{p \rightarrow \beta} \psi_p(x) = 1 - [1 - x] \end{cases}$$

または、

$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow \alpha} \psi_p(x) = 1 - [1 - x], \\ \lim_{p \rightarrow \beta} \psi_p(x) = [x]. \end{cases}$$

$[x]$ は x を超えない最大の整数 (Gauss の記号) である。なお、さらに次の AR 5 も満たせば、 λ -加法の場合と同じように、リスク志向型とリスク回避型を対称的に扱える。

$$\text{AR 5: 連続で単調減少な全単射 } s: (\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta) \text{ が存在して,}$$

$$\psi_{s(p)}(x) = 1 - \psi_p(1 - x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

例えば、Yager 族

$$x \boxdot^p y = \min[(x^p + y^p)^{(1/p)}, 1]$$

(付録1参照) は条件 AR 1-4 を満たす (AR 5 は満たさないが、 p と $1/p$ を対称点と考えてもよい)。

塚本[12]は、ファジィ積分として Choquet 積分でなく菅野積分を用いていた。これは、当時ファジィ積分には菅野積分だけしかなかったためであろう。他のファジィ積分は(16-18)のようなよい性質をもたない。t-コノルム積分は(16-18)のいずれも満たさないし、菅野積分は(16)式と(18)式を満たすが(17)式は満たさない。さらに菅野積分には、被積分関数の値域が $[0, 1]$ でなければならないという問題もある。

なお連載第1回でも述べたように、代替案の評価を非加法的主観確率(一般のファジィ測度)に関する Choquet 積分で行なうことは、すでに数人の研究者によってなされている[14-17]。

6.5. ランダム集合に関する積分

最後に、ランダム集合に関する積分について考えてみよう。ランダム集合は集合値の確率変数であり、連載第3回(本誌 Vol.3, No.2)で説明した。ここでは次の例で考える。

[例 6.5.1] ある装置にある特定の負荷をかけたところ、故障した。この装置は n 個の部品 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ からなり、そのうち少なくとも 1 箇所が故障したものとする。 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ とおき、すべての故障箇所からなる集合を ω_0^* とおく。任意の $E \subset \Omega$ に対して $\omega_0^* = E$ である確からしさが $p(E)$ で与えられるものとする。このとき、 p が 2^Ω 上の確率関数、すなわち

$$\sum_{E \subset \Omega} p(E) = 1$$

であるとする。すると ω_0^* はランダム集合になる。少なくとも 1 箇所は故障しているので、 $p(\emptyset) = 0$ である。このランダム集合は 2 通りの方法でファジィ測度として表せる。一つは、 $E \subset \Omega$ に対して、すべての故障箇所が E に含まれる確率を与えるファジィ測度

$$g_*(E) = \sum_{F \subset E} p(F),$$

である。もう一つは、 E が少なくとも一つの故障箇所を含む確率を与えるファジィ測度

$$g^*(E) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} p(F),$$

である。数学的には、 g_* は belief 関数、 g^* は plausibility 関数である。

ここで、部品 ω が故障したときの修理期間を $f(\omega)$ 日として、修理期間の期待値を求めてみよう。この期待値は積分と解釈できる。部品ごとに並行して修理が行えたとすると、全修理期間は全故障部品の修理期間のうちの最も長い日数になる。簡単のため $f(\omega_1) \leq f(\omega_2) \leq \dots \leq f(\omega_n)$ とし、 $A_i \triangleq \{\omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n\}$ 、 $A_{n+1} \triangleq \emptyset$ とおくと、

$$\begin{aligned} & \sum_{E \subset \Omega} \left(\max_{\omega \in E} f(\omega) \right) p(E) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\omega_i) \left(\sum_{E \cap A_i \neq \emptyset} p(E) - \sum_{E \cap A_{i+1} \neq \emptyset} p(E) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\omega_i) [g^*(A_i) - g^*(A_{i+1})] \\ &= (C) \int f dg^* \end{aligned} \quad (21)$$

となる。

次に、部品 ω が故障したときの修理費用を $h(\omega)$ 円として、修理費用の期待値を求めよう。この期待値も積分と解釈できる。全修理費用は故障箇所の修理費用の合計であるとする、

$$\begin{aligned} & \sum_{E \subset \Omega} \left(\sum_{\omega \in E} h(\omega) \right) p(E) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} h(\omega) \left(\sum_{E \ni \omega} p(E) \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} h(\omega) g^*({\omega}) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。

さて、(21)式は f の g^* に関する Choquet 積分である。しかし(22)式は、 h の g^* に関する積分と見たとき、今まで出てきたどのファジィ積分とも違う。(21)式も(22)式も積分と呼ぶにふさわしい量を与えている。しかし、 g^* に関する積分としては形式も積分値も異なる。 g^* に関する積分が、なぜ 2 種類もあるのだろうか。

結論を述べると、この例において考えられる積分は、 g^* に関する積分ではなく、 p に関する積分なのである。この例での積分は常に

$$\sum_{E \subset \Omega} f(E) p(E)$$

で与えられる。 f は 2^Ω 上の実数値関数であり、これが被積分関数である。この積分は、 Ω 上のファジィ積分ではなく、 2^Ω 上の Lebesgue 積分

$$\int_{2^\Omega} f dP \quad (23)$$

なのである。ただし、 P は

$$P(A) = \sum_{E \in A} p(E) \quad \forall A \subset 2^\Omega$$

で定まる 2^Ω のべき集合上の測度である。上の例では、 2^Ω 上の被積分関数 f が Ω 上の関数 f によって定まったため、 Ω 上の積分のように見えるだけである。実際、修理期間を与える関数 $f: 2^\Omega \rightarrow R$ は

$$f(E) = \max_{\omega \in E} f(\omega)$$

であり、修理費用を与える関数 $h: 2^\Omega \rightarrow R$ は

$$h(E) = \sum_{\omega \in E} h(\omega),$$

である。このように、 Ω 上の関数 f からから 2^Ω 上の関数 h への構成の仕方が違うと、 Ω 上での積分としては(21), (22)式のように異なったものが得られるのである。

とにかく、 Ω 上での表され方がなんであれ、ランダム集合に関する積分は(23)式であることに注意されたい。

注. 本題からそれるが、(21)式は形式的に、前回で説明した Choquet 積分の表現になっていることを指摘しておく。

6章のおわりに

今回はファジィ測度に関する積分を概観した。最後に注意しておきたいのは、「積分は現実との関わりの中で議論されなければならない」という点である。 λ -ファジィ測度をとってみても、それに対してどのファジィ積分がふさわしいかは、その λ -ファジィ測度がどのような現実の中で得られたかによって変ってくる。 λ -加法という演算が本質的ならば t -コノルム積分がふさわしいが、それが6.4節の文脈の中で得られたものならば Choquet 積分がふさわしく、ランダム集合のファジィ測度表現として得られたものならば(23)式の Lebesgue 積分がふさわしい(付録3で、ランダム集合から λ -ファジィ測度を構成しうることを説明している)。文脈を取り違えたとおかしなことになる。現実を無視して形式だけで積分を議論しても始まらないのである。(例えば、Berres[18]が議論している積分は、彼がいうような belief 関数と plausibility 関数に関する積分と見るよりもむしろ、6.5節のランダム集合に関する積分と見るべきであろう。)

連載のおわりに

連載を終えるにあたり、2回も休載してしまいましたことを、読者の皆様ならびに学会誌編集委員会にお詫びいたします。

第2回(Vol.2, No.3)で、Ellsbergの壺の問題をDS理論で説明しましたが、厳密にいうとその壺の問題はDS理論では説明できません(準備中の著書で詳述します)。ただし、belief 関数と plausibility 関数の違いを説明する例としては、そんなには悪いものではないと思います。

この連載のかなりの部分は、数年前から菅野研究室で行っているファジィ測度入門ゼミと、システム科学専攻で行っている講義「ファジィ測度論」の内容をもとにしています。ゼミや講義に参加して質問や感想をくださった学生の皆さんに感謝します。

引用文献

- [1] T. MUROFUSHI and M. SUGENO, Fuzzy t -conorm integral with respect to fuzzy measures: generalization of Sugeno integral and Choquet integral, *Fuzzy Sets and Systems* **42** (1991) 57-71.
- [2] 菅野道夫, ファジィ測度とファジィ積分, 計測自動制御学会論文集 **8** (1972) 218-226.
- [3] 菅野道夫, Fuzzy 測度の構成と Fuzzy 積分によるパターンの類似度評価, 計測自動制御学会論文集 **9** (1973) 361-368.
- [4] R. Kruse, Fuzzy integral and conditional fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems* **10** (1983) 309-313.
- [5] S. Weber, $\perp$ -Decomposable measures and integrals for Archimedean t -conorms $\perp$, *J. Math. Anal. Appl.* **101** (1984) 114-138.
- [6] S. Weber, Two integrals and some modified versions — critical remarks, *Fuzzy Sets and Systems* **20** (1986) 97-105.
- [7] M. Sugeno and T. Murofushi, Pseudo-additive measures and integrals, *J. Math. Anal. Appl.* **122** (1987) 197-222.

- [8] H. Ichihashi, H. Tanaka, and K. Asai, Fuzzy integral based on pseudo-additions and multiplications, *J. Math. Anal. Appl.* **130** (1988) 354-364.
- [9] R.R. Yager, Aspects of possibilistic uncertainty, *Int. J. Man-Machine Studies* **12** (1980) 283-298.
- [10] T. Murofushi and M. Sugeno, An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems* **29** (1989) 201-227.
- [11] M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno, Fuzzy measure of fuzzy events defined by fuzzy integrals, *日本ファジィ学会誌* **3** (1991) 557-569.
- [12] Y. Tsukamoto, A measure theoretic approach to evaluation of fuzzy set defined on probability space, *Fuzzy Math.* **2**, no.3 (1982) 89-98.
- [13] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **74** (1971) 109-116.
- [14] I. Gilboa, Expected utility with purely subjective non-additive probabilities, *J. Math. Econom.* **16** (1987) 65-88.
- [15] P. Wakker, Continuous subjective expected utility with non-additive probabilities, *J. Math. Econom.* **18** (1989) 1-27.
- [16] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica* **57** (1989) 571-587.
- [17] P. Wakker, A behavioral foundation for fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems* **37** (1990) 327-350.
- [18] M. Berres, On a multiplication and a theory of integration for belief and plausibility functions, *J. Math. Anal. Appl.* **121** (1987) 487-505.
- [19] C.H. Ling, Representation of associative functions, *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965) 189-212.
- [20] R.R. Yager, On a general class of fuzzy connectives, *Fuzzy Sets and Systems* **4** (1980) 235-242.
- [21] 水本雅晴, ファジィ集合とファジィ推論, 第3回ファジィシステムシンポジウム講演論文集 (1987) 37-48.

- [22] D. Dubois and H. Prade, A class of fuzzy measures based on triangular norms, *Int. J. General Systems* **8** (1982) 43-61.

付録 1. t -コノルム

次の条件 TC 1-4 を満たす $[0, 1]$ 上の二項演算 $\perp$ を t -コノルム (t -conorm) という。

TC 1 (単位元 0) $x \perp 0 = 0 \perp x = x$,

TC 2 (可換性) $x \perp y = y \perp x$,

TC 3 (結合性) $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$,

TC 4 (単調性) $x \leq u, y \leq v$
 $\Rightarrow x \perp y \leq u \perp v$.

ファジィ理論でよく使われる論理和 (logical sum)

$$x \vee y = \max(x, y),$$

限界和 (bounded sum)

$$x \oplus y = \min(x + y, 1),$$

代数和 (algebraic sum)

$$x \dot{+} y \triangleq x + y - xy,$$

激烈和 (drastic sum)

$$x \vee y \triangleq \begin{cases} 1 & x > 0 \text{ and } y > 0 \\ x & y = 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

などは, t -コノルムである。また任意の t -コノルム $\perp$ に対して, 次式が成立する。

$$x \vee y \leq x \perp y \leq x \vee y \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

$0 < x < y < 1$ なる任意の x, y に対して,

$$y < \bigwedge_{i=1}^n x_i, \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$$

なる n が存在するとき, t -コノルム $\perp$ はアルキメデスの (Archimedean) であるという。ただし,

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i \triangleq x_1 \perp x_2 \perp \cdots \perp x_n$$

である。論理和はアルキメデスのでなく, 限界和と代数和, および激烈和はアルキメデスのである。 $0 < x \leq 1$ なる任意の x に対して,

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$$

なる n が存在するとき, $\perp$ はべき零 (nilpotent) であるという。べき零でないアルキメデスの t -コノ

ルムは厳密(strict)であるという. 限界和はべき零アルキメデスの t -コノルムであり, 代数和は厳密アルキメデスの t -コノルムである.

次の定理が成立することが知られている[19].

[定理 A] $\perp$ が連続なアルキメデスの t -コノルムであるための必要十分条件は, ある連続な狭義単調増加関数 $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ が存在して

$$x \perp y = \psi^{(-1)}(\psi(x) + \psi(y)) \quad (A 1) \\ \forall x, y \in [0, 1]$$

となることである. なお, ここで $\psi^{(-1)}$ は

$$\psi^{(-1)}(x) \triangleq \begin{cases} \psi^{-1}(x) & x \leq \psi(1) \\ 1 & x > \psi(1) \end{cases}$$

で定義される ψ の擬逆関数(pseudo-inverse)である. また, (A 1)式を満たす ψ が存在するとき, $\perp$ がべき零であることと $\psi(1) < \infty$ とは同値である.

連続なアルキメデスの t -コノルム $\perp$ に対して, (A 1)式を満たす連続な狭義単調増加関数 ψ を $\perp$ の(加法的)生成関数((additive) generator)という. ψ が $\perp$ の生成関数のとき, その正の定数倍 $a\psi$ ($a > 0$) も生成関数である. そして, 生成関数は正の定数倍の範囲で一意である.

論理和は連続な t -コノルムだがアルキメデスのではなく, したがって生成関数をもたない. 限界和の生成関数は $\psi(x) = x \quad \forall x \in [0, 1]$, 代数和の生成関数は $\psi(x) = \log(1-x) \quad \forall x \in [0, 1]$ である. 激烈和は連続でないので生成関数はない.

パラメータをもつ生成関数によって定まる t -コノルムの族をパラメータ族という. 菅野の λ -加法は, パラメータ λ をもつ関数

$$\xi_\lambda(x) = \log_{(1+\lambda)}(1+\lambda x)$$

によって生成される t -コノルム

$$x \oplus_\lambda y = \min(x + y + \lambda xy, 1)$$

のパラメータ族である. λ の変域は $(-1, \infty)$ である. λ -加法では, $\lambda = 0$ のとき限界和に, $\lambda \rightarrow -1$ のとき代数和に, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき極限として激烈和に一致する. 他にもさまざまなパラメータ族が

提案されており, λ -加法のようにパラメータの値によって典型的な t -コノルムの間を移り変わるようなパラメータ族がよく用いられる. 例えば, Yager 族[20]

$$x \boxplus^p y = \min[(x^p + y^p)^{(1/p)}, 1]$$

($0 < p$) も, $p = 1$ のとき限界和に, $p \rightarrow 0$ のとき極限として激烈和に, $p \rightarrow \infty$ のとき極限として論理和に一致する. 他のパラメータ族については例えば[21, 22]などを見られたい.

付録 2. t -ノルムに関する分解可能測度

条件 TC 2-4 と次の条件 T 1 を満たす二項演算 $\top$ を t -ノルムという.

T 1 (単位元 1) $x \top 1 = 1 \top x = x$.

t -ノルムと t -コノルムは双対の関係にある.

$C: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を条件

N 1 $C(0) = 1, C(1) = 0$,

N 2 C は連続な狭義単調減少関数,

N 3 $C(C(x)) = x \quad \forall x \in [0, 1]$

を満たす関数とする(ファジィ理論ではこのような関数を否定演算と呼ぶ). 演算 $\circ$ と $\perp$ が

$$x \top y = C(C(x) \perp C(y)) \quad (A 2)$$

の関係にあるとき, $\top$ が t -ノルムならば $\perp$ は t -コノルムであり, 逆に $\perp$ が t -コノルムならば $\top$ は t -ノルムである. (A 2)式の関係にある t -ノルム $\top$ と t -コノルム $\perp$ は互いに C -双対であるという.

$C(x) = 1 - x \quad \forall x \in [0, 1]$ のときは単に双対であるという. ファジィ理論でよく使われる論理積(logical product)

$$x \wedge y = \min(x, y),$$

限界積(bounded product)

$$x \odot y = \max(x + y - 1, 0),$$

代数積(algebraic product)

$$x \cdot y,$$

激烈積(drastic product)

$$x \dot{\wedge} y \triangleq \begin{cases} 0 & x < 1 \text{ and } y < 1 \\ x & y = 1 \\ y & x = 1 \end{cases}$$

は, それぞれ, 論理和, 限界和, 代数和, 激烈和に双対な t -ノルムである.

t -ノルム $\top$ に基づく分解可能測度は式

$$A \cup B = \Omega \Rightarrow m(A \cap B) = m(A) \top m(B)$$

で特徴づけられる. ちょうど, t -コノルムに基づく分解可能測度と双対的に定義されている. 通常の加法的な測度 (確率測度) P の場合,

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

が成り立つので, $A \cup B = \Omega$ のとき

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - 1 \\ &= P(A) \odot P(B) \end{aligned}$$

となる. すなわち, P は限界積 $\odot$ に関する分解可能測度である. また, 必然性測度 N はつねに

$$N(A \cap B) = N(A) \wedge N(B)$$

が成り立つので, 論理積 $\wedge$ に関する分解可能測度である. なお, t -ノルムに基づく一般の分解可能測度に関しては [22] が詳しい.

$\perp$ を $\top$ と C -双対な t -コノルムとし,

$$m^c(A) = C(A^c) \quad \forall A \in \mathcal{S} \quad (\text{A } 3)$$

とおけば, m^c は $\perp$ -分解可能測度になる. 一般に 2 つのファジィ測度 m と m^c が (A 3) の関係にあるとき, C -双対であるという. ファジィ測度の通常の双対関係は, $C(x) = 1 - x \quad \forall x \in [0, 1]$ のときである.

さて, t -ノルムに基づく分解可能測度 m に関する積分は, t -コノルム系 $\mathbf{F}$ と 3 つの否定演算 C_Δ , $C_\perp$, C_Δ を使って次のように定めることができる.

$$C_\Delta \left((F) \int C_\Delta(f) dm^{c_\perp} \right).$$

$\mathbf{F} = (\vee, \vee, \vee, \wedge)$ のとき, $C_\Delta = C_\perp = C_\Delta$ ならば, 上の積分は m に関する菅野積分になる. なお, 1 つの t -コノルム系と 3 つの否定演算を定めることは, t -コノルム系と双対的な代数系 — t -ノルム系とでも呼ぶべきもの — を 1 つ定めることと同等である.

付録 3. ランダム集合から導かれる λ -ファジィ測度

6.5 節の例に次の仮定を加える. 「問題の負荷を与えたとき, 各部品の故障はそれ以外の部品の故障とは独立に生起する」. 負荷を加えたとき部品 ω が故障する事前確率を p_ω とする. いま, 問題の負荷によって少なくとも 1 箇所は故障している. よって $g^*(E)$ は, E が少なくとも一つの故障箇所を含む事象の事後確率である. そこで, $-\lambda \triangleq 1 - \prod_{\omega \in \Omega} (1 - p_\omega)$ とおけば, $-\lambda$ は少なくとも 1 箇所が故障する事前確率である. $[1 + \lambda g^*(E)]$ は E に故障が起こらないという事前確率である. よって, $E \cap F = \emptyset$ のとき

$$\begin{aligned} g^*(E \cup F) &= \{1 - [1 + \lambda g^*(E)] \cdot [1 + \lambda g^*(F)]\} / (-\lambda) \\ &= g^*(E) + g^*(F) + \lambda g^*(E) g^*(F) \end{aligned}$$

となる. なお, $-1 < \lambda < 0$ である. そして, 6.4 節で定めた関数 $s(\lambda) = -\lambda / (1 + \lambda)$ を使えば,

$$\begin{aligned} g_*(E \cup F) &= g_*(E) + g_*(F) + s(\lambda) g_*(E) g_*(F), \quad 0 < s(\lambda) < \infty \text{ でもある.} \end{aligned}$$

(1992 年 2 月 21 日 受 付)

[問い合わせ先]

〒227 横浜市緑区長津田町 4259

東京工業大学 大学院 総合理工学研究科
システム科学専攻

室伏 俊明, 菅野 道夫

☎: 045-922-1111 (内線) 2645, 2641

☎: 045-921-1485 (専攻事務室)

email murofusi@sys.titech.ac.jp

msugeno@sys.titech.ac.jp