ファジィしきい値関数の定義とその応用[†]

—— 拡張された無限多値論理系におけるスイッチング関数の推論・制御への応用 ——

山本 喜則*

第一に、人の推論の仕方を考察し、ファジィ推論が必ずしも陽に現れていない複数の規則を前提にして行われていることを述べる。第二に、通常の AND, OR, NOT に算術演算を加えた論理系を導入する。この論理系において、単調性を満たす無限多値関数を考え、ファジィ（無限多値）しきい値関数を定義する。第三に、人の推論において単調性を仮定し、ファジィしきい値関数を用いて推論の規則表を表現する。次にこれを用いて近似推論を行う方法を述べる。第四にこの推論方法を制御に応用し、いくつかの事例について Max-Min 重心法によるファジィ制御と比較・検討を行う。理論展開の中で、ファジィしきい値関数は多値しきい値関数を特殊な場合として含むこと、よって、任意の多値しきい値関数の表現式が簡単に得られることが示される。

キーワード：無限多値論理、しきい値関数、拡張スイッチング関数、規則表、ファジィ制御、ファジィしきい値関数制御

1. はじめに

ファジィ集合を基礎とする推論¹⁾、ファジィ推論には、現在までのところ大きく分けて直接法と間接法があり、更に直接法は Max-Min 重心法と、後件部に線形関数を用いる方法に分けられると言われている²⁾。特に、Max-Min 重心法は制御に数多く利用されている(1989年4月～1990年1月までの日本ファジィ学会誌におけるすべての論文・紹介記事のうち、明かにこの方法に基づくと考えられる推論・制御は21件、約66%であった)。

一方で、直接法での、より制御に向けた合成規則の検討^{3),4)}も続いており、ファジィ推論法は必ずしも確定してはいないことを伺わせる。

さて、無限多値論理はファジィ論理と強いつながりを持つが、それに基づく推論の研究はそれほど多くはない(最近では例えば^{5),6),7)}。更に、無限多値論理に基づく近似推論を実際に制御へ応用した事例はほとんどないと言ってよいであろう。

多値論理においては、 p 値($p \geq 3$)に基づく回路が2値のそれと比べて有効かどうかを検討することは大きなテーマであるが、高次元の多値は安定性などの面から対象になりにくい。よって、この立場の延長として無限多値を考えることはない。実際、多値論理に基づく回路システムは日本でも、かなり以前に提案された^{8),9)}。以来、多くの提案があるが^{10),11)}、一方で2値のそれと比べて明確な利点を持ち得ないならば作るまでもないという指摘がある¹²⁾。同様に、純粋に理論的興味から検討した理論も、それが一般の p 値で成立するならば、改めて無限多値を論ずることはほとんどない。すなわち、多値論理においては研究の方向がファジィ論理のそれとはかなり異なると言えよう¹⁾。

[†] Definition of Fuzzy Threshold Function and Its Application — An application of new switching functions defined on an extended infinite multiple-valued logic to approximate reasoning and process control
Yoshinori YAMAMOTO

* 高崎経済大学 経営学科
Dept. of Business Administration, Takasaki City University of Economics

一時期、スイッチング関数の考え方を無限多値に拡張したファジィ論理関数が研究され^{13)~15)}、ハザードの検出などに応用された。しかし、既存のファジィ論理演算の枠組みの中では、期待されるほどのあいまいさは扱えないことが指摘されている¹⁶⁾。著者は、以前3値論理で定義したある特殊な関数¹⁷⁾を無限多値に拡張したが¹⁸⁾、その関数が扱えるあいまいさには限界があることも併せて述べた。AND, OR, NOT のみに基づく論理関数では、小さな関数集合しか表現できないのである。

記号論理における推論は、2値論理関数と密接な関連があるのに、現在までに提案されているファジィ推論は既存のファジィ論理関数とはつながりを持っていない。文献19)に、ある拡張した論理演算(連続論理の一つ)に基づくファジィスイッチング関数の記述があるが、推論との関係など、その応用可能性を含めた検討が必要と考える。

本論文は第一に、人の推論におけるその規則のあり方を考察する。ここでは、推論は陽に現れていない知識も実は前提にして行われているのではないかという指摘がなされる。よって、第二にすべての規則の全体、規則表を考える。通常の AND, OR, NOT に算術演算を加えた論理演算を導入し、規則表を無限多値の立場から検討して、それを表す無限多値関数を定義する。ここで人の推論において単調性を仮定し、単調性の前提の下では、限られた無限多値関数で規則表を表現できることを述べる。第三に、単調性を満たす無限多値関数、ファジィしきい値関数を定義し、式表現などいくつかの性質を明らかにする。第四に、ファジィしきい値関数を用いた推論の仕組みを述べる。第五に、ファジィしきい値関数を用いた近似推論を制御に応用する方法を述べる。幾つかの事例について計算機シミュレーションを行い、Max-Min 重心法によるファジィ制御と比較検討する。

なお、ファジィしきい値関数についての理論展開の中で、ファジィしきい値関数は多値しきい値関数をその特殊な場合として含むことを示す。結果として、任意の多値しきい値関数は常に式表現できることが示される。

2. 規則と関数

2.1 推論における見えない規則

「トマトが赤いならば、トマトは熟している」「このトマトは少し赤い」「よって、このトマトは少し熟している」という Zadeh のよく知られた近似推論の例がある。

この推論をするとき、人は「赤い」以外のトマトの状態を知っている。例えば、「あおい」「黄色い」などの状態があるだろう。そして、「あおいならば熟していない」という知識を(ひょっとしたら、更に「黄色いならば少し熟している」という知識も)持っている。ここでは「赤くない」は「あおい」と等価であり、前件部ファジィ集合の定義域は「あおい」から「赤い」までであることが暗黙のうちに了承されている(簡単のために、「非常に……」という場合は除く)。更に、「あおい」から「赤い」にその赤さが増えるに従って熟し度合が対応して増していくという知識を、実は知っていて使っている。もし、熟している真っ赤なトマトしか食べたことのない恵まれた子供に、上の推論はできるであろうか？

一つのルールの前件部、後件部におけるファジィ集合の定義域、台は通常全体集合の一部である。すなわち、このルールは既にその台以外を定義域とするファジィ集合の存在、従ってそれを用いたルールの存在を暗に仮定していると言えよう。

以上の簡単な考察は、次のようにまとめられる。これを我々は、以下の議論に対する一つの前提としよう。

前提 a : 現実のファジィ推論は複数のルールについての知識を前提にして成り立っている。

A, B をファジィラベルとすると、例えば見かけ上、ルール: $A \rightarrow B$ のみを用いて推論する場合でも、他の知識、A でない $\rightarrow B$ でない、とか、少し $A \rightarrow$ 少し B などの知識を持っていることが暗黙のうちに仮定されている。

前提 a を認めると、次のことが言える：人が近似推論を行う場合の知識は、すべての知識、また

はその一部が記された集まりとして、考えるべきである。すなわち、ルールはその集まり、ルール表として考えるべきであろう。以下では、我々はこの立場に立って議論する。

2.2 ルール表から導かれる関数表

ある尺度についての数値の集合を kX ($k=1, 2, \dots, n$)、 Y とする。 kX ($k \in \{1, \dots, n\}$) を全体集合とする全てのファジィ集合を kA_i ($i=1, 2, \dots, m_k$) とし、 $k=1, \dots, n$ について考える。同様に、 Y を全体集合とする全てのファジィ集合を C_i ($i=1, 2, \dots, m_0$) とする。ただし、 kA_i ($i=1, \dots, m_k$) の重心はすべて異なるものとする。同様に、 $C_1, C_2, \dots, C_{m_0}$ の重心もすべて異なるものとする。全ての実数の集合を R とする。

kX 上のファジィ集合 kA_i ($i=1, \dots, m_k$) を、その重心値の小さい順に並び変えた結果を、 ${}^kA_i'$ ($i=1, \dots, m_k$) とする。次の集合関数 ${}^k\xi$ を考える：

$${}^kA_i' \xrightarrow{{}^k\xi} {}^ka_i \quad ({}^ka_i \in R) \quad (1)$$

ファジィ集合 ${}^kA_i'$ ($i=1, \dots, m_k$) に写像 ${}^k\xi$ を施して、集合 ${}^kS = \{{}^ka_1, \dots, {}^ka_{m_k}\}$ を生成する。ただし、 ${}^ka_1 < {}^ka_2 < \dots < {}^ka_{m_k}$ とする。

$k=1, 2, \dots, n$ に対して、上のようにして集合 ${}^1S, {}^2S, \dots, {}^nS$ を生成する。同様にして、ファジィ集合 C_i ($i=1, 2, \dots, m_0$) から集合 ${}^0S = \{{}^0a_1, \dots, {}^0a_{m_0}\}$ を生成する。

上のファジィ集合によるあるファジィ規則

$${}^1A_{i_1} \text{ かつ } {}^2A_{i_2} \cdots \cdots {}^nA_{i_n} \text{ ならば } C_{i_0} \quad (2)$$

に対して、次のように出力値が定まる関数 f を考える。

$$f({}^1a_{i_1}, {}^2a_{i_2}, \dots, {}^na_{i_n}) = {}^0a_{i_0} \quad (3)$$

但し、 $i_1, i_2, \dots, i_n, i_0$ は、ファジィ集合を重心値の大小によって並び変えた後の番号であるとする。

このようにして、全ての可能な規則に対して関数 f の出力値を定め、不完全定義関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の関数表を導く。

(例 1) 集合 1X を全体集合とするファジィ集合

を、 ${}^1A_1 \triangleq$ 「背が低い」、 ${}^1A_2 \triangleq$ 「背が高い」とする。集合 2X を全体集合とするファジィ集合を、 ${}^2A_1 \triangleq$ 「体重が軽い」、 ${}^2A_2 \triangleq$ 「体重が普通」、 ${}^2A_3 \triangleq$ 「体重が重い」とする。本例では式(1)を簡単に、 ${}^k\xi({}^kA_i') = i-1$ と考えよう。すなわち、 ${}^1A_1, {}^1A_2$ より、集合 ${}^1S = \{0, 1\}$ を得、 ${}^2A_1, {}^2A_2, {}^2A_3$ より ${}^2S = \{0, 1, 2\}$ を得る。更に、 Y を全体集合とするファジィ集合を、 $C_1 \triangleq$ 「歩くのが遅い」、 $C_2 \triangleq$ 「歩くのは普通」、 $C_3 \triangleq$ 「歩くのが速い」とする。式(1)より、集合 ${}^0S = \{0, 1, 2\}$ を得る。ここで、背の高さと体重に対する歩く速さの規則を考えよう。上で与えられたファジィ集合だけで可能な規則は、6通り存在する。これを例えば表1のように決めてみる。

表1 背の高さ、体重と歩く速さについての規則表

身長 \ 体重	軽い	普通	重い
低い	普通	遅い	遅い
高い	速い	速い	普通

表2 規則表より導かれた不完全定義関数 f

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2
0	1	0	0
1	2	2	1

表1の規則表より、式(3)のようにして導かれる不完全定義関数 $f(x_1, x_2)$ は表2のようになる。

一つの全体集合上で、たとえば、ファジィ数：「5位の数」と「ほぼ5位の数」のように、異なるファジィ集合であるが重心は一致する場合が存在する。しかしこのような場合、上の方法から分かるように関数 f は導けない。

更に、ファジィ規則表において必ずしもすべての規則が定義されていないことがある。このときは、なんらかの予想に基づいて未定義の規則を定めるものとする。しかも、ファジィ推論規則は必ずしも式(2)のように表されているとは限らない。

そのような場合、上の方法で不完全定義関数を導くには少し考察が必要である。そこで、本論文では以下の議論のためにもう一つの前提を置く。

前提 b：ここで対象とする近似推論の規則は、式(2)の形式で表されている。

次章で、表 2 のように得られた不完全定義関数がある無限多値論理系で検討する。

3. ファジィしきい値関数

3.1 拡張した無限多値演算系とファジィしきい値関数

次の演算を定める。ここで、 $x_1 \in [a_1, b_1]$, $x_2 \in [a_2, b_2]$ (a_1, b_1, a_2, b_2 は実定数、 $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$)

論理和 $\vee$: $x_1 \vee x_2 = \max \{x_1, x_2\}$,

論理積 $\wedge$: $x_1 \wedge x_2 = \min \{x_1, x_2\}$

否定 $\neg$: $x_1 = a + b - x_1$ (+ : 算術和、- : 算術差)

算術和 + : $x_1 + x_2$

算術積 $\cdot$: $x_1 \cdot x_2$ (4)

演算の優先順序は、算術積、否定、論理積、論理和、算術和の順とする。ただし、演算の順序はかっかが優先する。なお、算術積の記号は省略することがある。

[定義 1] 全ての実数の集合を R とする。 R の部分閉区間 R_i の値をとる変数 x_i ($i=1, 2, \dots, n$)、定数 ($\in R$)、及び式 (4) の演算の有限回の組合せによる式が表現する R^n から R への連続写像を、 n 変数無限多値関数という。

$\vee$, $\wedge$, $\neg$, $+$, $\cdot$ と変数の有限回の組合せでできる R^n から R への連続写像は、ファジィ論理関数の一つの拡張として文献 19) に定義されている。上の定義は、定数が R の任意の値であるという点で、それを更に拡張したものである。よって、定義 1 の関数は、拡張ファジィ論理関数と呼ぶこともできよう (以上の演算に基づく基本公式については文献 19) 参照)。

[定義 2] f は定義 1 の無限多値関数であるとする。 $A, A' \in R^n$ は第 i 成分のみが異なるとする。 f が、このような任意の A, A' に対して次式：

$$A \leq A' \text{ ならば } f(A) \leq f(A') \quad (5) \\ (\geq)$$

を満たすとき、 f は変数 x_i に関して単調増加 (減少) であるという。すべての変数について単調増加か単調減少であるとき、 f はunate であるという。更に、すべての変数について単調増加であるとき、 f は単調であるという。

さて、2.2 のようにしてファジィ規則表から導かれた不完全定義関数を g とする。 g を、上記の拡張した多値演算系で考えよう。すなわち、定義 1 のある無限多値関数 f が g に対して、 $g(X) = t$ ($X = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, t は実数) ならば $f(X) = t$ を満たすとき、 f は (g の) ファジィ規則表から導かれた無限多値関数であるという。

ここで、人の推論のあり方について、議論の更にもう一つの前提を置こう。

前提 c：対象とするファジィ規則表から導かれた無限多値関数はunate である。

以下、我々は前提 a、b と c を満たす場合のみを考えることにする。

(例 2) 表 2 の不完全定義関数 f を、式 (4) の演算系で考える。 f は例えば、

$$f(x_1, x_2) = 0 \vee 2 \wedge (2x_1 - x_2 + 1) \\ x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 2]$$

と表せる無限多値関数と考えることができる。このとき、 f は x_1 に関して単調増加、 x_2 に関して単調減少である。なお、表 2 の出力を与える無限多値関数は他にも (実は、無限個) 存在する。たとえば、 $g(x_1, x_2) = 0 \vee 2 \wedge (4x_1 - 2x_2 + 1)$ が考えられるが、 $f(0.3, 0) = 1.6$ に対して、 $g(0.3, 0) = 2$ 。すなわち、 $f \neq g$ である。

次のような特別な無限多値関数を考えよう。

[定義 3] f を定義 1 の n 変数無限多値関数とする。 f の定義域は $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ ($x_i \in R_i \subseteq R$, $i=1, \dots, n$)、値域は $R_0 \subseteq R$ であるとする。 f の関数値が、ある実定数 $w_1, \dots, w_n$, $t_1, \dots, t_m$ (m : 自然数、 $t_1 \leq \dots \leq t_m$) に対して、式 (7) のように定まるとき、 f は重み $w_1, \dots, w_n$, しきい値 $t_1, \dots, t_m$ を持つ無

NII-Electronic Library Service

で定義されるファジィしきい値関数を考える。 f_0 と f_1 は下に凸、 f_1 と f_2 は上に凸(図2参照)。よって、定理1により、

$$f = f_0 \vee f_1 \wedge f = 0 \vee (WX + 1) \wedge 2 \\ = 0 \vee 2 \wedge (2x_1 - x_2 + 1)$$

これは表2の関数の一つの表現例である。

例3の関数 f は、式(9)より直ちに

$$f(x_1, x_2) = f_0 \vee f_1 \wedge f_2 \vee f_3 \wedge f_4 \\ = -1 \vee (2WX + 1) \wedge 1 \vee WX \wedge 2 \\ = -1 \vee 1 \wedge (2x_1 + 1.2x_2 + 1) \vee 2 \\ \wedge (x_1 + 0.6x_2)$$

[系1] 定義3のファジィしきい値関数は、変数 $x_1, \dots, x_n$ に関してunateである。しかも、

$$w_i > (<) 0 \iff f \text{ は } x_i \text{ に関して単調増加(減少)} \\ w_i = 0 \iff x_i \text{ は冗長。}$$

(証明) 一般に、定義1のファジィ関数 g_1, g_2 が単調増加(減少)ならば、 $g_1 \vee g_2, g_1 \wedge g_2$ は単調増加(減少)である。 $f_0, f_1, \dots, f_m$ は WX に関してすべて単調であるので、 f は WX に関して単調である。 $w_i > 0$ のとき、 x_i が非減少(非増加)であると WX は非減少(非増加)である。従って f の値は非減少(非増加)である。逆に、 f が x_i に関して単調増加(減少)であるとする。このとき x_i が非減少(非増加)であると f の値は非減少(非増加)である。 f は WX に関して単調であり、 R から R への1対1の写像なので WX は非減少(非増加)である。 WX は x_i についての1次式であるから、このとき、 x_i の係数、すなわち w_i は正(負)である。 $w_i = 0$ のときも同様に示し得る。

3.3 多値しきい値関数との関係

[定義4]²⁰⁾ $V_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ ($p \geq 2$)とする。 V_p^n から V_p への写像 f の値が、実定数 $w_1, \dots, w_n, T_1, \dots, T_{p-1}$ ($T_1 \leq \dots \leq T_{p-1}$)により、式(10)のように定まるとき、 f は重み $w_1, \dots, w_n$ 、しきい値 $T_1, \dots, T_{p-1}$ を持つ p 値しきい値関数であると言う。

図2 表2の f と WX の関係

ここに、 WX は $W = (w_1, \dots, w_n)$ と $X = (x_1, \dots, x_n) \in V_p^n$ の内積である。

$$f(X) = \begin{cases} 0 & (WX < T_1 \text{ のとき}) \\ \dots\dots\dots \\ i & (T_i \leq WX < T_{i+1} \text{ のとき, } i=1, \dots, p-2) \\ \dots\dots\dots \\ p-1 & (T_{p-1} \leq WX \text{ のとき}) \end{cases} \quad (10)$$

[定理2] ファジィしきい値関数は多値(p 値)しきい値関数を、その特殊な場合として含む。

(証明) 定義4の p 値しきい値関数 f において、 $f(X) = i$ ($i=0, 1, \dots, p-2$)であるような X と、 W との内積 WX のうち、最大値は必ず存在する。これを u_i とする。すなわち、

$$u_i = \max \{ WX \mid f(X) = i, X \in V_p^n \} \\ (i=0, 1, \dots, p-2). \quad (11)$$

上の定義より明かに、 $u_i < T_{i+1}$ である。次のような WX の1次関数 $g_i(WX)$ を定める。

$$g_i(WX) = \frac{1}{T_{i+1} - u_i} WX + i - \frac{u_i}{T_{i+1} - u_i}, \\ WX \in [0, p-1] \quad (12)$$

g_i は、 $g_i(u_i) = i$ 、 $g_i(T_{i+1}) = i+1$ を満たしている。 $R_k = [0, p-1]$ ($k=1, \dots, n$)とすると、 $g_i(WX)$ を用いて、 $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ を定義域とし、 $R_0 = [0, p-1]$ を値域とする次のような n 変数ファジィしきい値関数 $g(X)$ を定める。

$$g(X) = \begin{cases} 0 & (WX \leq u_0 \text{ のとき}) \\ g_0(WX) & (u_0 \leq WX \leq T_1 \text{ のとき}) \\ 1 & (T_1 \leq WX \leq u_1 \text{ のとき}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ i & (T_i \leq WX \leq u_i \text{ のとき}) \\ g_i(WX) & (u_i \leq WX \leq T_{i+1} \text{ のとき}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ g_{p-2}(WX) & (u_{p-2} \leq WX \leq T_{p-1} \text{ のとき}) \\ p-1 & (T_{p-1} \leq WX \text{ のとき}) \end{cases} \quad (13)$$

このような $g(X)$ は $g_i(WX)$ が与えられれば一意に定まり、しかも定義 3 を満たしている。また作り方より明かなように、定義域が V_p^n のとき p 値しきい値関数の定義 4 を満たす。よって、定理が成り立つ。

すべての 2 値しきい値関数は、AND, OR, NOT, 変数の有限回の組合せによる論理式で表せるが、3 値以上のしきい値関数は必ずしも表せない(変数が少なくても論理式表現できるものはごく僅かである²⁰⁾)。次の系は、多値しきい値関数の式表現の一般的方法を与えている。

[系 2] p 値($p \geq 2$)しきい値関数は、論理和 $\vee$ 、論理積 $\wedge$ 、否定 $\neg$ 、算術四則、 p 値をとる変数、定数 $0 \sim p-1$ の有限回の組合せによる式(拡張された論理式)で必ず表現できる。ただし、式は必ずしも一意には定まらない。

(証明) ある p 値しきい値関数 f が与えられたとき、定理 2 のようにして、 f を特殊な場合として含むファジィしきい値関数 g を求め得る。定理 1 により、任意のファジィしきい値関数は式 (9) のように拡張された論理式で表せる。よって、その定義域を $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ に制限した式は、 p 値しきい値関数 f を表している。

定理 2 において、1 次関数 g_i の求め方は他にも存在する。例えば、 $u_i = 1/2(\max\{WX \mid f(X) = i, X \in V_p^n\} + T_{i+1})$ と定めた u_i から得た g_i は、明らかに定理 1 のそれと異なる。よって、式表現は一意ではない。

(例 5) 重み $w_1=1$, $w_2=-1$ 、しきい値 $T_1=-1$, $T_2=1$, $T_3=2$ を持つ 4 値しきい値関数 f を考え

る。真理値表(記述省略)から、 $u_0 = \max\{WX \mid f(X) = 0, X \in V_4^2\} = -2$ 。同様にして、 $u_1 = 0$, $u_2 = 1 (= T_2)$ 。従って(図 3 参照)

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & (WX \leq -2 \text{ のとき}) \\ g_0(WX) & (-2 \leq WX \leq -1 \text{ のとき}) \\ 1 & (-1 \leq WX \leq 0 \text{ のとき}) \\ g_1(WX) & (0 \leq WX \leq 1 \text{ のとき}) \\ g_2(WX) & (1 \leq WX \leq 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (2 \leq WX \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここに、 $WX = x_1 - x_2$, $g_0(WX) = WX + 2 = x_1 - x_2 + 2$, $g_1(WX) = WX + 1 = x_1 - x_2 + 1$, $g_2(WX) = g_1(WX)$ 。

結局、 $g(X) = 0 \vee g_0 \wedge 1 \vee g_1 \wedge 3 = 0 \vee 1 \wedge (x_1 - x_2 + 2) \vee 3 \wedge (x_1 - x_2 + 1)$ 。 $X \in \{0, 1, 2, 3\}^n$ のとき、 $g(X)$ は 4 値しきい値関数 $f(X)$ を表す。

4. ファジィしきい値関数を用いた推論

4.1 どのようにして推論を行うか

複数の条件付きファジィ命題を一つの無限多値しきい値関数で表す方法を 2 章、3 章で述べた。しかし一つの関数では非線形性を持つ規則の集まりを表現しきれない。例 1 を再びとり上げよう。

表 2 の規則の前件部は、「背の高さ」と「体重の軽重」である。背の高さは、 $x_1=1$ のときが最も高く、 $x_1=0$ のときが最も低い。ところが、これが現実にはいくらなのかは決っていない。すなわち、現実の対象とする背の高さの範囲を $[a, b]$ とすると、 $[a, b]$ が $[0, 1]$ にどのように対応するかは自由に決めることができる。そこで、 $[a, b]$ から $[0, 1]$ へ

図 3 例 5 の 4 値しきい値関数を含むファジィしきい値関数

の写像を λ とすると、 λ は個々の場合毎にどのようなにも決めることができる。必ずしも線形写像である必要はないが、単調増加または減少の 1 変数関数とするのが自然であろう。

以上のことは、「体重」についても同様である。更に、このときの関数の出力を z とすると、 z が現実のいくらの値に相当するのかも問題である。すなわち、出力 z の値域 $[0, 2]$ から現実の歩く速さの集合への写像を ψ とすると、 ψ についても上と同様なことが言える。

これらの関数 λ 、 ψ をゲイン関数と呼ぶ。以上を図的に説明すると図 4 のようになる。ここでは推論のための現実の crisp な入力情報を、 ${}^0x_1, \dots, {}^0x_n$ 、そのときの現実の crisp な推論結果を 0z とする。式で表せば、次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^0z &= \psi(z) = \psi(f(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \psi(f(\lambda_1({}^0x_1), \dots, \lambda_n({}^0x_n))) \end{aligned} \quad (14)$$

(例 6) 例 1 において、背の高さについての現実の全体集合を、 $[145, 195]$ 、体重の現実の全体集合を、 $[40, 150]$ とする。また、結論の現実の歩く速さの全体集合を、 $[40, 100]$ とする。次のようにゲイン関数を定める(右辺は通常の数学式、図 5 参照)。ここで、 λ_2 は約 63 kg が $x_2 = 1$ (i.e. 「体重が普通」) になるよう設定している。

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1({}^0x_1) = 0.02{}^0x_1 - 2.9 \\ x_2 &= \lambda_2({}^0x_2) = 2(({}^0x_2 - 150)/110)3 + 2 \\ {}^0z &= \psi(z) = 30z + 40 \end{aligned}$$

規則表を表すファジィしきい値関数は、 $[0, 1] \times [0, 2]$ を定義域、 $[0, 2]$ を値域として、例 1 より、

$$z = f(x_1, x_2) = 0 \vee 2 \wedge (2x_1 - x_2 + 1)$$

図 4 推論の基本ブロック図

そこで、身長が 175、体重が 100 のときの推論結果を求める。

$$x_1 = \lambda_1(175) = 0.6, \lambda_2(100) \doteq 1.81$$

よって、 $z = f(x_1, x_2) = 0 \vee 2 \wedge (2 \cdot 0.6 - 1.81 + 1) = 0.39$ 、 ${}^0z = \psi(0.39) = 51.7$ (m/分)。

式 (14) により、 ${}^0z = 40 \vee 100 \wedge (1.2{}^0x_1 - 60(({}^0x_2 - 150)/110)^3 - 164)$ 。これより 0z を直接求めることもできる。

4.2 事実がファジィ集合で与えられる場合の推論

4.1 の式 (14) は、ファジィ集合における要素どうしの演算を行っていると考えられる。よって、入力の実事が 0x_i ではなくファジィ集合 A_i で与えられたときは、拡張原理に基づいて次のようにする。ここで、 A_i の全体集合を X_i とし、結論のファジィ集合を C とする。

式 (14) において、入力がファジィ集合

$$A_i = \int_{X_i} \mu_{A_i}({}^0x_i) / {}^0x_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

で与えられるとき、結論のファジィ集合 C のメンバーシップ値を次のように求める：

$$\mu_C({}^0z) = \max_{{}^0X \in S^{-1}({}^0z)} \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu_{A_i}({}^0x_i) \right\} \quad (15)$$

ただし、

図 5 例 6 のゲイン関数

$${}^0X = ({}^0x_1, \dots, {}^0x_n)$$

$$S^{-1}({}^0z) = \{{}^0X \mid {}^0z = \psi(f(\lambda_1({}^0x_1), \dots, \lambda_n({}^0x_n)))\}$$

(例7) 簡単のために離散的なファジィ集合で考えよう。例6において、背の高さの全体集合を $X_1 = \{145, 150, 155, \dots, 195\}$ 、体重の全体集合を、 $X_2 = \{40, 50, 60, \dots, 150\}$ とする。事実のファジィ集合が次のように与えられたとする。

「背の高さは普通」 $\triangleq A_1'$

$$= \{0.5/170, 1.0/175, 0.5/180\}$$

「体重がちょっと重い」 $\triangleq A_2'$

$$= \{0.5/80, 0.8/90, 1.0/100, 0.8/110, 0.5/120\}$$

結論のファジィ集合 C を求める。

$$C = \{0.5 \wedge 0.5 / \psi(f(\lambda_1(170), \lambda_2(80))), \dots, 0.5 \wedge 0.5 / \psi(f(\lambda_1(180), \lambda_2(120)))\}$$

${}^0z = \psi(f(\lambda_1({}^0x_1), \lambda_2({}^0x_2)))$ の値は、例6の式で求める(但し、小数点以下四捨五入)。同じ 0z に対するメンバーシップ値の max をとって、

$$C = \{0.5/41, 0.5/43, 0.5/46, 0.5/47, 0.8/49, 0.5/50, 1.0/52, 0.5/53, 0.5/55, 0.8/56, 0.5/58, 0.5/61, 0.5/62, 0.5/67\}$$

5. 制御への応用

5.1 その方法と正規化

ある制御対象の状態に関する入力情報を、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 、制御対象の操作量を z とする。これら $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ の定義域、値域は、 $[-1, 1]$ または $[0, 1]$ であるとする。制御規則はファジィ集合を用いて、表4のように与えられている。

A_{ik} は通常よく用いられるファジィラベル: PB (positive big), PM (positive medium), PS (positive small), ZO (zero), NS (negative small), NM (negative medium), NB (negative big) 等のどれかを表す。ここでは可能なすべての規則が指定されているものとする(未指定のものがあるときは、周辺の規則から推定して決めるが、結果はそれに影響される)。前提 a、b と c に基づき、3章の方法で、この制御規則表に対応するファジィしきい値関数を一つ求める。得られたファジィしきい値

関数を $f(x_1, \dots, x_n)$ とする。 $R_i = [-1, 1]$ または、 $R_i = [0, 1]$ ($i=0, 1, \dots, n$) とすると最初の仮定により、 f は $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ から R_0 への写像である。これを正規なファジィしきい値関数という。

表4 ファジィ制御規則

No.	x_1	x_2		x_n	z
1	A_{11}	A_{12}		A_{1n}	C_1
2	A_{21}	A_{22}		A_{2n}	C_2
...					...
m	A_{m1}	A_{m2}		A_{mn}	C_m

現実の制御入力情報を 0x_i ($i=1, 2, \dots, n$)、現実の操作量を 0z とする。 0x_i の定義域を Q_i ($i=1, 2, \dots, n$)、 0z の値域を Q_0 とするとき、ゲイン関数

$$\lambda_i: Q_i \rightarrow R_i \ (i=1, 2, \dots, n), \quad \psi: R_0 \rightarrow Q_0$$

を定める。この処理を正規化という。 λ_i, ψ はファジィ制御における正規化ゲイン定数と同様、制御の能力に大きく関わる。

現実の制御入力情報から、現実の操作量を得る過程は4.1で述べた。

5.2 制御シミュレーションの実行

エアコン(クーラー)による室温の制御シミュレーションを、ファジィしきい値関数を用いる5.1の制御手法と、Mamdaniの推論法を用いるファジィ制御手法(max-min重心法)で実行し、比較・検討する。問題は次の通りである。

ある設定温度 p_0 が与えられたとする。ある時刻の室温を p_t とし、これを一定時間毎に測定する。設定温度からのずれ(偏差) ${}^0x_1 = p_t - p_0$ と、偏差の時間 t に対する変化率 ${}^0x_2 = dx/dt$ からエアコンの強さを自動調整して、設定温度に近付ける。

偏差の時間に対する変化率は、偏差の変化分で代用する。従って、 ${}^0x_2 = p_t - p_{t-1}$ である。制御器モデルは速度型で、操作量 z は操作の変化分を表している。5.1の手法による制御器モデルの基本ブロック図を、図6に示す。

入出力のゲイン関数 λ_1 、 λ_2 、 ψ は

$$\begin{aligned} x_i &= \lambda_1({}^0x_i) = {}^0x_i/k_i \quad (i=1,2) \\ {}^0z &= \psi(z) = k_3 \cdot z \end{aligned} \quad (16)$$

と簡単に定める。 k_i ($i=1,2,3$) は実行前に設定する。用いるファジィしきい値関数は、表5のファジィ制御規則表から導いた、重み-2, -1で

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & (WX \leq -2 \text{ のとき}) \\ 0.5 WX & (-2 \leq WX \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 & (2 \leq WX \text{ のとき}) \end{cases} \quad (17)$$

と定められる正規関数である。すなわち、

$$z = f(x_1, x_2) = -1 \vee 1 \wedge 0.5(-2x_1 - x_2) \quad (18)$$

図6 ファジィしきい値関数を用いた制御器モデル

表5で、PB、PM、… はそれぞれ前述したファジィ集合であるが、そのメンバーシップ値は問題ではない。各ファジィ集合のラベルと区間 $[-1, 1]$ の実数との対応は表から明らかなので省略する。

ファジィ制御によるブロック図は省略する。ファジィ制御で用いた前件部のファジィ集合を図7に、後件部ファジィ集合を表6に示す。正規化入力ゲイン定数を k_1 、 k_2 、出力ゲイン定数を k_3 とし、実行時設定する。ファジィ制御のルールは、表5(a)の①~⑦を用いる。

以上の二つの方式の制御プログラムを Quick-BASIC (Ver.4.5、実行形式のファイル、MS-DOS 3.3 X) で書き、NEC 9801 VX 上でシミュレーションを実行した。

実操作変化量から得られる実操作値は、現実には限界があるので、プログラムでも限界値を設定している。現実の室温は、外乱(外気温)、エアコンの強さ、家の密閉性、断熱材の能力、吹き出し口の位置、…等によって次の時刻の室温が決まる。しかし、ここでは二つの手法の比較が目的なので、単に外気温、エアコンの強さ、現在の室温によって次の時刻の室温が定まるとして、簡単な漸化式で室温を算出した。

表5 ファジィ制御規則表
(a) $\Rightarrow$ (b)

X_2			
X_1	NB	ZO	PB
NB	PB	PB ①	PM
NM	PB	PM ②	ZO
ZO	PM ③	ZO ④	NM ⑤
PM	ZO	NM ⑥	NB
PB	NM	NB ⑦	NB

X_2			
X_1	-1	0	1
-1	1	1	.5
-.5	1	.5	0
0	.5	0	-.5
.5	0	-.5	-1
1	-.5	-1	-1

表6 後件部ファジィ集合(未記入は0)

z	-1	-.75	-.5	-.25	0	.25	.5	.75	1
ラベル									
PB								.5	1
PM						.5	1	.5	
ZO				.5	1	.5			
NM		.5	1	.5					
NB	1	.5

図7 前件部ファジィ集合

5.3 実験の評価

2組のパラメータ k_1, k_2, k_3 に対する実験結果を図8に示す。室温を点で示す。1単位時間とは、図で画面1列移動する時間である(実時間ではない)。図では定常誤差はほとんど現れていないが、目標値が外気温よりかなり低いと、実操作値の強さには上限を設けてあるので、現れることがある。

次に、 $k_1=0.1\sim 2.1$ (0.5きざみ)、 $k_2=0.1\sim 2.1$ (0.5きざみ)、 $k_3=0.2\sim 1.4$ (0.4きざみ)の時、100通りの組(k_1, k_2, k_3)に対してシミュレーションを行った結果を表7に示す。ここで、遅れ時間、行き過ぎ量、定常誤差の平均とは、100通りの単純平均である。

表8は、1組の制御情報から1つの実操作値を得るまでの実時間である。パラメータ値、入力情報が様々に変化してもこの時間はほとんど変わらない(小数点以下第2位四捨五入)。

この実験結果から次のことが知れる。

表7 100通りのシミュレーション結果

	ファジィ制御	5.1の方法
遅れ時間平均値	10.2	8.5
遅れ時間最大値	32.0	21.0
遅れ時間最小値	5.0	5.0
行過ぎ量平均値	1.886	1.978
行過ぎ量最大値	6.470	7.714
行過ぎ量最小値	-.560	-.068
定常誤差平均値	.102	.039
定常誤差最大値	1.950	.880
定常誤差最小値	.000	.000

外気温31℃ 設定温度25℃ 最強目盛-8

遅れ時間は単位時間、小数点以下第2位四捨五入

行過ぎ量(%)は小数点以下第4位四捨五入(負数はundershoot)

定常誤差は絶対値、小数点以下第4位四捨五入

表8 一つの実操作値を得るための実時間

ファジィ制御	110.4
5.1の方法	2.2

単位: msec

図8 室温の変化の様子

- a-1: ファジィしきい値関数を用いる方法は、ここでのファジィ制御よりかなり速い(約 50 倍)。
- a-2: ファジィしきい値関数を用いる方法は、ここでのファジィ制御より遅れ時間が小さい。
- a-3: 行過ぎ量はほぼ同じか、5-1 の方法が少し大きい(平均値で 0.092 %)。
- a-4: いずれの方法でも定常誤差は小さく安定しているが、ファジィしきい値関数を用いる方法はここでのファジィ制御の約 1/3 である。

また、ファジィしきい値関数を用いた場合、振動が速く収まる様子が観測された。

一方、ファジィしきい値関数を用いる方法は、その原理から次のような問題点が考えられる。

- b-1: 入力される情報によっては、振動が起りやすい。すなわち、滑らかな制御にならないことが考えられる。理由は、ファジィ制御は幾つものルールの答えを、いわば平均化した結論を出すのに対して、5.1 の方法は pin-point 方式であることによる。
- b-2: 正規化ゲイン関数の設定は単純であるが、手法が確立しているわけではない。
- b-3: 規則表から一つのファジィしきい値関数が得られないことが有り得る。

ただし、b-2 は同時に、人の経験・勘をここに生かせる為、長所にもなり得るであろう。b-3 は、現実にそのような例が見られる。例えば、創刊号から 1991 年, vol.3, No.1 までの本学会誌に公表された規則表 12 例のうち、単一のファジィしきい値関数で表せるもの 6 例、単一のファジィしきい値関数では表せないが unate なもの 3 例、unate でもないもの 3 例であった(単一のファジィしきい値関数で表せない 6 例のうち、5 例は特定の業種——電力、で他は医療エキスパートシステムに関するものである。また、表になっていないルールも多い)。2 章で述べたように、本論文は、「人が用いる規則は、実は unate である」とい

う暗黙の前提に立っている。よって、ファジィしきい値関数では表せないが、unate なファジィ関数では表せる規則表が存在するならば、それについての研究が必要になろう。これはファジィしきい値関数による unate な無限多値関数の合成問題である。

6. むすび

ファジィ論理体系を算術四則まで拡張し、その演算体系上でファジィしきい値関数を定義した。人が用いる推論のルール群は、基本的に unate であるという前提に立ち、通常ファジィ推論の規則表を一つのファジィしきい値関数で表現した。このファジィしきい値関数を用いて、近似推論を行う方法を述べた。更に、この方法を制御に応用する方法を述べ、実験例を通して、(Mamdani の) ファジィ制御法とファジィしきい値関数による方法との比較・検討を行った。

ファジィしきい値関数を用いる制御法は、max-min 重心法より大変に高速で、遅れ時間、定常誤差共に小さい。現実に、プリンターの制御やビデオカメラの A F 制御などではコストの面から能力の低いマイコンしか使えず、real time でのファジィ制御が困難なことがある(結局、off-board で実行している)。本論文の手法は、そのような場合に有効であろう。

理論展開の副産物として、任意の多値論理関数が、ここでの論理体系上で、必ず簡単な拡張された論理式で表現できることが明かになった。また、その論理式の求め方を示した。このことは、従来の min、max のみの論理体系では 3 値以上の場合、可能ではなかったことである。

今後の研究の一つとして、重みと入力の内積の代わりに、非線形式を用いたファジィしきい値関数が考えられる。類似のことは既に多値論理においては提案されている²¹⁾。しかしながら、今までのところ、必ずしも応用に有効であるという報告はない。その点から、理論的には可能であっても現実的に意味があるかどうかは何とも言えない。他に、表として表現されていないルールをどう扱

うか、更に全ての規則が定義されているが、導かれる無限多値関数が単一のファジィしきい値関数で表せない場合、及びunateでない場合についての検討は、ここでの方法の限界を知る上で大切なことと考える。

参 考 文 献

- 1) L.A.Zadeh: "Fuzzy logic," IEEE Computer, vol. 21, No.4, pp.83-93, 1988.
- 2) 菅野道夫: ファジィ制御, 日刊工業新聞社, 1988.
- 3) M.Mizumoto: "Comparison of various fuzzy reasoning method," Proc.the 2nd IFSA Congress, pp.2-7, 1987.
- 4) 水本雅晴: "ファジィ制御に対する改善法", ファジィシステムシンポジウム講演論文集, (I), pp. 153-158, 1987; (II), pp.91-96, 1988; (III), pp.499-504, 1989; (IV), pp. 9-13, 1990.
- 5) Z.Shen, L.Ding and M.Mukaidono: "Fuzzy resolution principle," Proc.IEEE 18th Int.Symp. Multiple-Valued Logic, pp.210-215, 1988.
- 6) L.Ding, Z.Shen and M.Mukaidono: "A new method for approximate reasoning," Proc. IEEE 19th Int.Symp. Multiple-Valued Logic, pp.179-185, 1989.
- 7) 丁, 向殿: "修正原理および「固定値」法に基づく新しい近似推論の提案", 電子情報通信学会論文誌, J74-D-I, 2, pp.117-123, 1991.
- 8) 後藤以紀: "論理数学方程式の継電気回路網理論への応用", 電気学会誌, vol.69, 1949.
- 9) 三根, 長谷川, 島田: "三進算術演算装置", 情報処理, 12, No.9, p.528, 1971.
- 10) S.L.Hurst: "Multiple-valued logic--Its status and its future," IEEE Trans, C-33, 12, pp.1160-1179, 1984.
- 11) 亀山充隆, 樋口龍雄: "多値論理システムとその応用", 電子通信学会誌, 68, 5, pp.515-521, 1985.
- 12) 長谷川利治: "3進算術演算装置の製作", 数理科学, No.200, pp.40-45, 1980.
- 13) A.Kandel: "On minimization of fuzzy functions," IEEE Trans., C-22, 9, p.826, 1973.
- 14) 向殿政男: "Fuzzy 論理における2,3の性質について", 電子通信学会論文誌, 58-D, 3, pp.150-157, 1975.
- 15) 向殿政男: "Fuzzy 論理関数の代数的構造とその最簡形式及び既約形式", 電子通信学会論文誌, 58-D, 12, pp.748-755, 1975.
- 16) 向殿政男: "Fuzzy 論理関数について", 数理科学, pp.21-26, No.191, 1979.
- 17) 山本, 藤田: "3値多数決関数", 電子通信学会論文誌, J63-D, 6, pp.493-500, 1980.
- 18) 山本, 藤田: "ファジー多数決関数", 電子情報通信学会論文誌, J73-D-I, 8, pp.673-682, 1990.
- 19) 水本雅晴: ファジィ論理とその応用, サイエンス社, 1988.
- 20) Y.Yamamoto and S.Fujita: "Relationship between P-valued majority functions and P-valued threshold functions," IEEE Trans., Comput., 37, 12, pp.1442-1445, 1988.
- 21) C.Moraga: "A monograph on ternary threshold logic," Computer Science and Multiple-Valued Logic, North-Holland, pp.329-368, 1984.

(1991年6月28日 受付)

[問い合わせ先]

〒370 群馬県高崎市上並榎1300
高崎経済大学 経営学科
山本 喜則
TEL: 0273-43-5417 (代)
FAX: 0273-43-4830

著 者 紹 介

山本 喜則 (やまもと よしのり)

高崎経済大学 経営学科

昭和46年3月東京教育大学理学部
応用数理学科卒業。昭和57年京都大
学工学博士。岡山理科大学助手、高崎
経済大学講師、助教授等を経て平成
4年高崎経済大学教授。おもに多値
論理に基づく特殊関数：多数決関数、
しきい値関数、誤り訂正可能な論理
関数および論理回路の故障検出など
の研究に従事。