論文

n 人協力ゲームにおけるファジィ決定に基づく解の概念[†]

西崎 一郎^{*1} 坂和 正敏^{*2}

本論文では、 n 人協力ゲームにおいて提携の満足度という概念を導入し、この満足度をファジィ集合で表現する。その結果、ゲームはプレイヤー全体の集合 N と利得に対する満足度を表すファジィ集合のメンバシップ関数 μ と利得の総和 G の 3 つの要素 (N, μ, G) で表現される。ゲーム (N, μ, G) において、Bellman と Zadeh のファジィ決定を用いて、このゲームに適した解を提案する。さらに、従来のゲーム (N, v) における特性関数 v を用いてメンバシップ関数を構成する。このことは、ゲーム (N, v) をゲーム (N, μ, G) に拡張することを意味する。メンバシップ関数が、線形の場合と、非線形な関数として正接双曲線型のメンバシップ関数のみの場合のそれぞれについて線形計画問題として定式化し、提案した解の計算方法を示す。また、線形、正接双曲線型を含み、指数型、逆正接双曲線型、区分的線形型の 5 つのタイプのメンバシップ関数を各提携に対して任意に割り当てた場合について考察する。この問題は非線形性をもつが、2 分法と線形計画法併用することによって解の計算方法を示す。最後に、数値例を示し関連する解である仁と比較し、提案した解の性質について検討する。

キーワード： n 人協力ファジィゲーム、ファジィ決定、満足度、線形計画問題

1. はじめに

近年、あいまい環境のもとでゲーム理論における諸概念が考察されている。

n 人協力ゲームにおいて、提携へのプレイヤーの参加率を $\{0, 1\}$ (0 または 1) から $[0, 1]$ (0 と 1 の間の任意の実数) に拡張したファジィ提携を取り扱うゲーム^{1)~5)}、2 人ゲームにおいて、利得がファジィ数で表現されるゲーム⁶⁾、相手の戦略がファジィ集合によって表現されるゲーム⁷⁾など、それぞれの意味でのファジィゲームがファジィ理論を応用して研究されている。本論文では、 n 人協力ゲー

ムにおいて、各提携に対して割り当てられる利得に関する満足度という概念を導入し、これをファジィ集合で表現する。これによって、従来研究されてきたファジィゲームとは異なる枠組みでのファジィゲームについて考察する。

従来の特性関数型 n 人協力ゲームは、プレイヤー全体の集合 N と特性関数 v によって特徴づけられ、ゲームは (N, v) のペアによって表現されている。特性関数 v は、 N の部分集合である提携 S に対してある実数を与える実数値関数である。各提携 S には、提携値を表す特性関数値 $v(S)$ が割り当てられており、その解釈は提携 S が S 以外のプレイヤーまたは提携の行動とは独立に獲得できる値である。これは、ある意味で各提携に対して最低限満足できる値を用いてゲームの状況を記述していることになる。

本論文では、利得ベクトルに対する各提携の満

[†] A Solution Concept Based on Fuzzy Decisions in n -Person Cooperative Games

Ichiro NISHIZAKI and Masatoshi SAKAWA

^{*1} 京都大学 経済研究所

Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University

^{*2} 広島大学 工学部

Faculty of Engineering, Hiroshima University

足の度合いを表すファジィ集合により、ファジィ満足度の概念を導入する。この概念は目標の達成度合いに対する満足度と解釈できる。すなわち、最低限達成すべき目標値をファジィ満足度の最低のレベルとし、達成できれば充分満足できる目標値をファジィ満足度の最高のレベルと考え、それらの間を連続に満足度の度合いを定義するメンバシップ関数を導入することによって、利得に対する満足度を表現する。ここで考えている満足度や目標といった概念は、利得を十分に評価された後の効用と考えるよりも、金銭や時間などの実社会における現実の値と考えることによって、解釈がより容易になり、実際的な応用を考えた場合、むしろ扱い易い問題設定となる。特性関数によるゲームの表現と満足度を表すファジィ集合のメンバシップ関数によるゲームの表現の違いは、各提携が最低限達成すべき目標を1点 $v(S)$ として表現することと、最低のレベルから最高のレベルまでをファジィ目標として関数で表現することの違いである。このようにファジィ満足度の概念が導入されたゲームは、プレイヤー全体の集合 N とメンバシップ関数 μ と利得の総和を G とするとき、3つの要素 (N, μ, G) によって表現される。我々は、ゲームを (N, μ, G) で表すことによって、各提携の特徴をより詳しく表現できると考える。

新しく定義されたゲーム (N, μ, G) に対し、Bellman と Zadeh⁸⁾ のファジィ決定を用いることによって、 (N, μ, G) で表現されたゲームに適した解を提案する。さらに、従来のゲーム (N, v) における特性関数 v を用いてメンバシップ関数を構成する。これは、ゲーム (N, v) をゲーム (N, μ, G) に拡張することを意味する。メンバシップ関数が、線形型の場合⁹⁾と、非線形な関数として正接双曲線型のメンバシップ関数のみの場合¹⁰⁾のそれぞれについて線形計画問題として定式化し^{11), 12)}、提案した解の計算方法を示す。また、線形型、正接双曲線型を含み、指数型、逆正接双曲線型、区分的線形型の5つのタイプのメンバシップ関数を各提携に対して任意に割り当てた場合についても考察す

る。この問題は、本来、非線形計画問題であるが、筆者らの方法、すなわち、二分法と線形計画法を併用することによって比較的容易に解の計算ができることを示す¹³⁾。最後に、数値例を示す。ここではすべて線形型のメンバシップ関数で構成された場合を取り上げ、関連する解である仁^{14)~17)}と比較し、提案した解の性質について検討する。

2. ファジィ満足度を考慮したゲームとその解

従来の特性関数型 n 人協力ゲームは、プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ と特性関数 v で表現される。 N の部分集合 S を提携とすると、特性関数 v は各提携 S に対して提携値を表す実数値を割り当てる実数値関数である。この提携値 $v(S)$ は提携 S が S 以外のプレイヤーまたは提携の行動に依存せずに獲得できる値である。

本論文では、この特性関数 v とは異なる観点からゲームを特徴づける関数を用いてゲームを記述する。提携値 $v(S)$ は前述したように S 以外のプレイヤーまたは提携の行動に依存せずに獲得できる値、言い換えれば、提携 S にとって最低限満足できる値であった。これに対して、我々は特性関数の代わりに、満足度を表すファジィ集合を用いて、すなわち、最低限満足できる値から十分に満足できる値までを満足度の度合いに従って0から1までの実数値を対応づけるメンバシップ関数を用いてゲームを記述する。

一方、従来の特性関数型 n 人ゲームでは、 n 人のプレイヤー全員の利得の和が、 n 人のプレイヤーが協力して獲得できる値 $v(N)$ に等しい場合、全体合理性を満たすという。本論文で取り扱う n 人協力ゲームは、この全体合理性を満たすゲームである。ここでは、 n 人で協力して獲得できる値を G とし、それが n 人のプレイヤーの利得の和に等しいとする。上述のメンバシップ関数 μ と利得の和 G に、プレイヤーの集合 N を加えた3つの要素 (N, μ, G) によって、新たにゲームが記述される。

[定義1](満足度を表すファジィ集合)

N をプレイヤーの集合、 N の部分集合である S を提携とする。提携 S が利得ベクトル x に対して満足度の度合いを表すファジィ集合を $\tilde{S}$ とする。すべての考えられる利得ベクトルの全体の集合を X とする。そのとき、提携 S の満足度の度合いを表すファジィ集合 $\tilde{S}$ は

$$\mu_{\tilde{S}}: x_S \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

なるメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{S}}(x_S)$ によって特徴づけられた集合であり、メンバシップ関数 $\mu_{\tilde{S}}(x_S)$ は、 $\tilde{S}$ における x_S のメンバシップ値を表す。このメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{S}}(x_S)$ は提携 S の利得ベクトル x に対する満足度を表現するメンバシップ関数である。

提携 S の満足度を表すファジィ集合 $\tilde{S}$ は、 x_S とメンバシップ値 $\mu_{\tilde{S}}(x_S)$ の対として、

$$\tilde{S} = \{(x_S, \mu_{\tilde{S}}(x_S)) \mid x \in X\} \quad (2)$$

と表される。具体的に本論文では、利得ベクトルの全体の集合として、利得の総和が G で、非負の成分からなる集合、すなわち、

$$X = \{x \mid \sum_{i \in N} x_i = G, x_i \geq 0, i \in N\}$$

を考える。そして、利得ベクトル x に対する提携 S のスカラー評価として、

$$x_S = \sum_{i \in S} x_i \quad (4)$$

を考える。式(4)は利得ベクトル x に対して、提携 S に属するプレイヤーの利得の和を提携 S の利得ベクトル x に対する評価と考えていることを示す。

ゲーム (N, μ, G) における解を考察する前に、従来のゲーム (N, v) の解を振り返る。ゲーム (N, v) の解としていくつかの辞書式順序解が提案されているが¹⁶⁾、その中で基本となる解、仁(Nucleolus)がSchmeidler¹⁴⁾によって提案されている。仁は提携の余剰という概念が基礎となっている。提携の余剰は提携 S 独自で獲得できる値から、提携 S に属するプレイヤーの利得の和を引いた形、すなわち、

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i \quad (5)$$

で定義され、利得ベクトル x に対する提携 S の評価の1つの表現形式であると考えられる。そして、最大の余剰を示す提携の余剰を最小化することによって仁という解の概念は定義されている。これは次の式で表現される。

$$\min_{x \in X} \max_{S \subset N} e(S, x) \quad (6)$$

次に、新しく定義されたゲーム (N, μ, G) における解について考察する。我々は、ゲーム (N, v) における仁と関連する形式でゲーム (N, μ, G) に適した新しい解の概念を提案する。すなわち、最も小さい満足度を示す提携の満足度を最大にする利得ベクトルを解と考える。この解の概念は、BellmanとZadeh⁸⁾のファジィ決定に基づいて定式化できる。

[定義2](ファジィ満足度解)

プレイヤー全体の集合を N 、満足度を表すファジィ集合のメンバシップ関数を μ 、利得の総和を G としたゲーム (N, μ, G) に関して、利得ベクトル x に対する提携 S に関する評価を

$$x_S = \sum_{i \in S} x_i$$

とするとき、

$$\begin{aligned} \mu_D(x^*) &= \max_{x \in X} \min_{S \subset N} \mu_{\tilde{S}}(x_S) \\ &= \max_{x \in X} \min_{S \subset N} \mu_{\tilde{S}}\left(\sum_{i \in S} x_i\right) \end{aligned} \quad (7)$$

を満足する利得ベクトル x^* をゲーム (N, μ, G) のファジィ満足度解とする。

このように、式(6)と新しく定義した解を表す式(7)の類似がこれら2つの解の関連性を示している。

3. ゲーム (N, v) におけるファジィ満足度解

本節では、従来のゲーム (N, v) を提案したゲーム (N, μ, G) の表現形式に拡張することを考える。

G については利得の総和であるから、

$$G = v(N) \quad (8)$$

と考えられる。次に、メンバシップ関数 μ の構成について考える。 μ を利得ベクトル x と特性関数 v によって構成する。すなわち、

$$\mu_S(x_S) = \mu_S\left(\sum_{i \in S} x_i, v\right) \quad (9)$$

である。

3.1 線形で表されるメンバシップ関数

ここでは、最低限満足できる値から充分満足できる値の間は、線形の関数で表現され、最低限満足できる値以下は0、充分満足できる値以上は1であるような線形メンバシップ関数をもつゲームを考える。特性関数 v を用いてメンバシップ関数を同定する。 $v(S)$ を提携 S のメンバーが協力すれば少なくとも達成できる値とする。一方、 $v(N) - v(N - S)$ は S 以外の提携 $N - S$ が少なくとも達成できる値 $v(N - S)$ を利得の総和 $G = v(N)$ から引いた値であることから、提携 S が達成できれば十分に満足できる値であると解釈できる。従って、線形なメンバシップ関数は、

$$\mu_S\left(\sum_{i \in S} x_i, v\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) \\ 1 - \frac{v(N) - v(N - S) - \sum_{i \in S} x_i}{v(N) - v(N - S) - v(S)} & \text{if } v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i \leq v(N) - v(N - S) \\ 1 & \text{if } v(N - S) \leq \sum_{i \in S} x_i \end{cases} \quad (10)$$

である(図1)。

このファジィ集合に対してファジィ決定を用いたゲームの解[定義2](ファジィ満足度解)を適用すれば、

$$\mu_D(x^*) = \max_{x \in X} \min_{S \subset N} \left(\frac{\sum_{i \in S} x_i - v(S)}{v(N) - v(N - S) - v(S)} \right) \quad (11)$$

図1 線形型メンバシップ関数

を満たす利得ベクトル x^* がファジィ満足度解になる。そして、この解は Zimmermann⁹⁾の結果を応用することによって、次の線形計画問題の形式で定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \lambda \\ & \text{subject to} \\ & \lambda \leq 1 - \frac{v(N) - v(N - S) - \sum_{i \in S} x_i}{v(N) - v(N - S) - v(S)}, \quad \forall S \subset N \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v(N) \\ & x_i \geq 0, \quad \forall i \in N \end{aligned} \quad (12)$$

この線形計画問題を解くことによって容易に提案した解を計算することができる。

次に、ファジィ満足度解といかなる提携によっても拒否されない利得ベクトルの集合であるコア¹⁵⁾との関係について考察する。

[命題1]

ゲーム (N, v) においてコアが空であれば、メンバシップ関数が式(10)で定義されたファジィ満足度解 x^* に対して最低のメンバシップ値を示す提携のメンバシップ値は0となり、その結果、

$$\mu_D(x^*) = 0$$

となる。

[証明]

コアは

$$\begin{aligned} & v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leq 0, \quad \forall S \subset N \\ & v(N) = \sum_{i \in N} x_i \end{aligned} \quad (13)$$

を満たす利得ベクトル x の集合である。ゲーム (N, v) においてコアが存在しないということは、任意の利得ベクトル x に対して、

$$v(S) - \sum_{i \in S} x_i > 0 \quad (14)$$

となるような、ある提携 S が存在することである。式(14)と式(10)より、任意の利得ベクトル x に対して、

$$\mu_S\left(\sum_{i \in S} x_i, v\right) = 0$$

となる提携が少なくとも1つ存在し、

$$\mu_D(x^*) = 0$$

となる。

[証明終]

ゲーム (N, v) にコアが存在しない場合、式(10)でメンバシップ関数を定義したときのファジィ満足度解では、満足の度合いが0となるような提携が存在する。すなわち、すべての提携がある程度満足できるような(満足度が0でない)利得ベクトルは存在しない。このことは、ある提携がどのような利得ベクトルに対しても、全く満足していないことを表しており、コアのないゲームは少なくとも1つの提携にとって、満足すべき利得ベクトルがないゲームであると言い換えることができる。

3.2 非線形で表されるメンバシップ関数

線形のメンバシップ関数では、特に、メンバシップ関数値が0または1のところで極端な変化がありすぎるという場合に非線形なメンバシップ関数を考慮しなければならない。その代表的な形として正接双曲線型のメンバシップ関数を考える(図2)。

b_s と α_s をパラメタとしてメンバシップ関数は、

$$\mu_S\left(\sum_{i \in S} x_i, v\right) = \frac{1}{2} \tanh\left(\left(\sum_{i \in S} x_i - b_s\right) \alpha_s\right) + \frac{1}{2} \quad (15)$$

で表現される。ここで、 b_s はメンバシップ値が0.5をとる $\sum_{i \in S} x_i$ の値であり、 α_s は歪曲の度合いを表す

パラメタであるから $\sum_{i \in S} x_i$ が $v(S)$ のときのメンバシップ値を規定することで同定できる。例えば、 b_s を

$$b_s = \frac{v(S) + v(N) - v(N-S)}{2} \quad (16)$$

とし、 α_s を

$$\frac{1}{2} \tanh\left((v(S) - b_s) \alpha_s^{0.1}\right) + \frac{1}{2} = 0.1 \quad (17)$$

をみたす $\alpha_s^{0.1}$ と考えることもできる。

図2 正接双曲線型メンバシップ関数

これは、提携 S の満足の度合いを表すメンバシップ関数を提携 S に属するプレイヤーの利得の和が $v(S)$ であるときの満足の度合いを0.1で、それ以下では限りなく満足できない状況を表し、 $v(N) - v(N-S)$ のとき0.9であるとし、それ以上では限りなく満足できる状況を表しており、前半が凸で後半が凹であるようなメンバシップ関数を同定したことになる。

この場合、線形のメンバシップ関数のときと同様に Leberling¹⁰⁾に従って線形計画問題として解くことができる。もとの問題は次のように定式化できる。

maximize λ

subject to

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \tanh\left(\left(\sum_{i \in S} x_i - b_s\right) \alpha_s\right) + \frac{1}{2}, \quad \forall S \subset N$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v(N) \quad (18)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in N$$

ここで、

$$\theta = \tanh^{-1}(2\lambda - 1) \quad (19)$$

と置き、 $\tanh^{-1}(\cdot)$ が強意単調増加であることによって、等価な次の線形計画問題に変形できる。

maximize θ

subject to

$$\begin{aligned} \alpha_s \sum_{i \in S} x_i - \theta &\geq \alpha_s b_s, \quad \forall S \subset N \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= v(N) \\ x_i &\geq 0, \quad \forall i \in N \end{aligned} \quad (20)$$

この場合、メンバシップ値は0の値をとらないので、コアのないゲームに対しても満足度は低いが0でないメンバシップ値をもつ解が得られる。

3.3 混合型で表されるメンバシップ関数

3.1では線形メンバシップ関数、3.2では非線形なメンバシップ関数として正接双曲線型のメンバシップ関数を用いたときの解の計算方法を示してきた。ここでは、すでに示した線形、正接双曲線型を含み、そのほかに指数型、逆正接双曲線型、区分的線形型が各提携に対して自由に選択できる混合型メンバシップ関数を用いた場合について考察する¹³⁾。最初に、混合型メンバシップ関数の必要性について考える。例えば、鈴木・中山¹⁵⁾による水資源共同開発問題のような応用を考えた場合、プレイヤーは農業水利団体と水道事業者の2つのタイプのプレイヤーから構成されている。このような場合、農業水利団体からなる提携、水道事業者からなる提携とそれらの混合からなる提携を考えれば、メンバシップ関数のタイプが異なると考える方が合理的である。

従って、プレイヤー全体の集合 N がいくつかの異なるタイプからなるような場合には、1種類のメンバシップ関数だけでなく、いくつかの種類のメンバシップ関数を考慮すべきである。逆の状況、すなわち、同じタイプのプレイヤーからなるゲームを考えた場合は、むしろ、あるひとつのメンバシップ関数のタイプをゲームの状況に応じて

選択すべきである。

新たに、導入したメンバシップ関数について考察する。指数型は、

$$\begin{aligned} \mu_S \left(\sum_{i \in S} x_i, v \right) \\ = a_s \left(\exp \left(b_s \left(\frac{\sum_{i \in S} x_i - v(S)}{v(N) - v(N-S) - v(S)} \right) \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

であり、例えば、メンバシップ関数値が1のとき $v(N) - v(N-S)$ 、0のとき $v(S)$ とし、0.5であるときの値を決めることにより関数の形が同定される(図3)。

図3 指数型メンバシップ関数

逆正接双曲線型は、

$$\begin{aligned} \mu_S \left(\sum_{i \in S} x_i, v \right) = \\ a_s \tan^{-1} \left(\left(\sum_{i \in S} x_i - b_s \right) \alpha_s \right) + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

であり、例えば、メンバシップ関数値が1のとき $v(N) - v(N-S)$ 、0のとき $v(S)$ とし、0.5であるときの値を決めることにより関数の形が同定される(図4)。区分的線形型の場合は、

$$\mu_S \left(\sum_{i \in S} x_i, v \right) = t_{ir} \sum_{i \in S} x_i + s_{ir} \quad (23)$$

であり、例えば、メンバシップ関数値が1のとき $v(N) - v(N-S)$ 、0のとき $v(S)$ とし、その他の折点の値を決めることにより関数の形が同定される(図5)。ここで、 t_{ir} 、 s_{ir} は r 番目の直線に対応するパラメタである。

各提携ごとにメンバシップ関数が同定された後は、非線形計画問題

maximize λ
subject to

$$\begin{aligned} \mu_S \left(\sum_{i \in S} x_i, v \right) &\leq \lambda, \quad \forall S \subset N \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= v(N) \\ x_i &\geq 0, \quad \forall i \in N \end{aligned} \quad (24)$$

の最適解がゲームの解となる。この場合、線形計画問題として定式化された3.1の線形型や3.2の正接双曲線型のメンバシップ関数の場合のように容易に解を計算できるわけではない。しかし、筆者らの方法¹³⁾を応用すれば近似解が得られる。

非線形のままでは解を求めることが困難なので線形計画法に基づいた計算方法を考察する。最初に、制約式の変換を行うが、特に、指数型、正接双曲線型、逆正接双曲線型の場合は、対数関数や正接双曲線関数、逆正接双曲線関数の強意単調増加性を利用し制約式を書き換える。すなわち、 $v_{\frac{1}{2}} = v(N) - v(N-S)$, $v_{\frac{3}{2}} = v(S)$ と置くと、

(1) 線形のとき、

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v_{\frac{1}{2}} - (1-\lambda)(v_{\frac{1}{2}} - v_{\frac{3}{2}})$$

(2) 指数型のとき、

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \frac{v_{\frac{1}{2}} - v_{\frac{3}{2}}}{b_s} \log \left(\frac{\lambda}{a_s} + 1 \right) - v_{\frac{3}{2}}$$

(3) 正接双曲線型型のとき、

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \frac{1}{a_s} \tanh^{-1}(2\lambda - 1) + b_s$$

(4) 逆正接双曲線型のとき、

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \frac{1}{a_s} \tanh \left(\frac{2\lambda - 1}{2a_s} \right) + b_s$$

(5) 区分的線形型のとき、

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \frac{\lambda - s_{ir}}{t_{ir}}$$

である。これらの制約式を用いて式(24)と等価な非線形計画問題は次のように表せる。

maximize λ

subject to

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v_{\frac{1}{2}} - (1-\lambda)(v_{\frac{1}{2}} - v_{\frac{3}{2}}), \quad \forall S \in T_1$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \frac{v_{\frac{1}{2}} - v_{\frac{3}{2}}}{b_s} \log \left(\frac{\lambda}{a_s} + 1 \right) - v_{\frac{3}{2}}, \quad \forall S \in T_2$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \frac{1}{a_s} \tanh^{-1}(2\lambda - 1) + b_s, \quad \forall S \in T_3$$

図4 逆正接双曲線型メンバシップ関数

図5 区分的線形型メンバシップ関数

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \frac{1}{a_s} \tanh \left(\frac{2\lambda - 1}{2a_s} \right) + b_s, \quad \forall S \in T_4$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \frac{\lambda - s_{ir}}{t_{ir}}, \quad \forall S \in T_5$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v(N)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in N \quad (25)$$

ここで、 T_1 は線形型のメンバシップ関数をもつ提携の集合、 T_2 は指数型のメンバシップ関数をもつ提携の集合、 T_3 は正接双曲線型のメンバシップ関数をもつ提携の集合、 T_4 は逆正接双曲線型のメンバシップ関数をもつ提携の集合、 T_5 は区分的線形型のメンバシップ関数をもつ提携の集合である。

この問題の制約式の λ の値を固定すればこの問題は線形となる。一方、 λ はメンバシップ関数値に対応する値であることから、 $0 \leq \lambda \leq 1$ である。最初は $\lambda = 0$ とおき、シンプレックス法の第一段を行い、実行可能解が存在すれば、 $\lambda = 1/2$ として、再びシンプレックス法の第一段を行う。このとき、実行可能解があれば $\lambda = 3/4$ 、なければ $\lambda = 1/4$ とする。このような二分法のアルゴリズムに

基づいて実行可能解をもつ最大の λ に収束させる。このときの解が近似解ではあるが、われわれが提案している解となる。

4. 数値例

この節では、ゲーム (N, v) に対して式 (10) で表したメンバシップ関数で利得ベクトルに対する満足度の度合いを表すファジィ集合を定義し、ゲーム (N, μ, G) を構成する。そして、提案した解を計算し、関連のある解である仁と比較する。

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ とし、各提携の提携値を

$$\begin{aligned} v(\phi) &= 0, \quad v(\{1\}) = 1, \quad v(\{2\}) = 2, \\ v(\{3\}) &= 2, \quad v(\{4\}) = 3, \quad v(\{1, 2\}) = 50, \\ v(\{1, 3\}) &= 55, \quad v(\{1, 4\}) = 70, \quad v(\{2, 3\}) = 60, \\ v(\{2, 4\}) &= 80, \quad v(\{3, 4\}) = 90, \\ v(\{1, 2, 3\}) &= 120, \quad v(\{1, 2, 4\}) = 130, \\ v(\{1, 3, 4\}) &= 150, \quad v(\{2, 3, 4\}) = 200, \\ v(\{1, 2, 3, 4\}) &= 300 \end{aligned}$$

とする。前節で示した線形計画問題より、解を計算すると表 1 の結果を得る。

このとき、メンバシップ値は $\mu_D(x^*) = 0.465$ となる。この解 x^* を各提携に示せば、どんなに満足度の低い提携でも、0.465 以上の満足度があることがわかる。一方、仁に対して、最低の満足度を示す提携の満足度を計算すると 0.451 となり、式 (10) で定義した満足度を表すファジィ集合を考えると、仁に比べて提案した解は各提携の利得ベクトルに対する満足度という意味ではよりよい結果を示している。満足度という点から考えるとメンバシップ値の差は 0.014 あるものの、表 1 から見てわかるように提案した解は仁に比べて各プレイヤーに配分された値の差が少し大きくなっているが比較的良好な傾向を示している。

5. おわりに

本論文では、利得ベクトルに対する各提携の満足度という観点から、ファジィ集合の概念を用いて n 人協力ゲームを定式化し、Bellman と Zadeh のファジィ決定を応用し、新しい解の概念を提案した。また、従来の特性関数型ゲームから満足度を示すメンバシップ関数を同定し、提案した解を線形計画問題として定式化した。実際に、提案した計算方法を用いて数値例を示し、解の性質について検討した。今後、提案した解に関連する研究が行われることを期待する。

参 考 文 献

- 1) J.P. Aubin : Cooperative Fuzzy Game ; Math. of Operations Research, Vol. 6, No.1, pp. 1-13 (1981).
- 2) J.P. Aubin : Mathematical Methods of Game and Economic Theory ; North-Holland (1979).
- 3) D. Butnariu : Fuzzy Games ; A Description of the Concept ; Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, No. 3, pp. 181-192 (1978).
- 4) D. Butnariu : Stability and Shapley Value for an n-persons Fuzzy Game ; Fuzzy Sets and Systems, Vol. 4, No. 1, pp. 63-72 (1980).
- 5) 坂和, 西崎 : n 人協力ファジィゲームにおける辞書式順序解の概念 ; システムと制御, 28巻, 7号, pp.461-468 (1984).
- 6) L. Campos : Fuzzy Linear Programming Models to Solve Fuzzy Matrix Games ; Fuzzy Sets and Systems, Vol. 32, pp. 275-289 (1989).
- 7) J.J. Buckley : Multiple goal non-cooperative conflicts under uncertainty : A fuzzy set approach ; Fuzzy Sets and Systems, Vol. 13, pp.107-124 (1984).
- 8) R.E. Bellman and L.A. Zadeh : Decision making

表 1 計算結果

	player1	player2	player3	player4
提案した解	53.580	70.823	80.123	95.473
仁	55.375	71.875	80.625	92.125

- in a fuzzy environment ; Management Sci., 17, pp. 209-215 (1970).
- 9) H.J. Zimmermann : Description and optimization of fuzzy systems ; Int. J. Gen. Systems, 2, pp. 209-215 (1976).
- 10) H. Leberling : On finding compromise solutions in multicriteria problems using the fuzzy min-operator, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 6, pp. 105-118 (1981).
- 11) 坂和 : 線形システムの最適化 ; 森北出版 (1984).
- 12) 坂和 : ファジィ理論の基礎と応用 ; 森北出版 (1989).
- 13) M. Sakawa : Interactive Computer Program for Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives ; International Journal of Man-Machine Studies, Vol.18, No.5, pp.489-503 (1983).
- 14) D. Schmeidler : The Nucleolus of a Characteristic Function ; SIAM J. Appl. Math., Vol. 17, No. 6, pp. 1163-1170 (1969).
- 15) 鈴木, 中村 : 社会システム ; 共立出版 (1976).
- 16) 坂和, 多田, 西崎 : n 人協力ゲームにおける新しい解の概念とその応用 ; 電子通信学会論文誌 (A), J66-A, 12, pp.1251-1258 (1983).
- 17) 伊理, 今野編 : 数理計画法の応用<理論編> [第 4 章 ゲーム理論 ; 中村, 中山著], (1982).

(1991年 3 月15日 受付)

(1991年 9 月28日 再受付)

[問い合わせ先]

〒606-01 京都市左京区吉田本町
 京都大学 経済研究所
 西崎 一郎
 ☎ : 075-753-7125
 FAX : 075-753-7193

著者紹介

西崎 一郎 (にしざき いちろう)

京都大学 経済研究所

昭和57年 3 月神戸大学工学部システム工学科卒業, 昭和59年 3 月神戸大学大学院工学研究科修士課程(システム工学専攻)修了, 同年 4 月新日本製鐵(株)入社, 平成 2 年10月京都大学経済研究所助手となり現在に至る。主としてファジィ環境におけるゲーム理論、意思決定問題とその応用に関する研究に従事。システム制御情報学会、日本オペレーションズ・リサーチ学会、情報処理学会、日本ファジィ学会の各会員。

坂和 正敏 (さかわ まさとし)

広島大学 工学部第 2 類(電気系)計数管理工学講座

昭和45年 3 月京都大学工学部数理工学科卒業, 昭和50年 3 月京都大学大学院工学研究科博士課程(数理工学専攻)修了, 同年 4 月神戸大学工学部システム工学科助手、昭和56年 3 月同助教授、昭和62年 3 月岩手大学工学部数理情報学講座教授を経て、平成 2 年 4 月広島大学工学部第 2 類(電気系)計数管理工学講座教授となり現在に至る。大規模システム、多目的システム、ファジィシステムにおける意思決定手法とその応用に関する研究に従事。京都大学工学博士、日本 OR 学会、計測自動制御学会、システム制御情報学会、情報処理学会、国際ファジィシステム学会会員。著書「ファジィ理論の基礎と応用」、「経営数理システムの基礎」など多数。