解説

フラクタルとその応用[†]

高安 秀樹*

1. はじめに

自然は複雑である。しかし、人間は複雑なものをそのまま理解することはできない。脳細胞は有限なので何らかの形で情報量を縮約しなければならないからである。複雑なものも小さな部分にまで分割すれば、そこには簡単な規則が存在するという考え方が、これまで長い間科学の発展を支えてきた。例えば、微分学は複雑な曲線も無限に拡大すれば直線になることに基づいており、素粒子論は多様なこの世の中を構成する物質が、実はほんの数種類であることを明かにしつつある。

このような科学の流れは、大きな成果を現在も産み出し続けているが、最近、その適用限界が問題となり、それにともなって新しいものの見方が登場してきた。フラクタル、カオス、そして、ファジィはそのような新しいものの見方の代表であるということができる。

それでは、まず、従来の科学の方法のどこに問題があるのかを考えてみよう。そもそも、複雑なものを小さな部分に分割すると複雑でなくなるということはいつでも本当だろうか？ この問いに対して反例を与えるのがフラクタルである^{1,2)}。次章で紹介するように、フラクタル図形はどんなに小さな部分も全体と相似であり、無限に拡大しても元と同じだけの複雑さを持っている。部分に分解しても全体と同じなのでは分解するメリットが全くないわけである。

次の疑問は、部分に分解してそこでは単純になったとしても、そのような部分の解析結果が、最終的に私達が興味のあるマクロなスケールにおいて意味を持つかどうかである。最近のカオスの研究によれば³⁾、単純な微分方程式であっても1次式以外の非線形項があるだけで、誤差が時間と共に指数関数的に増大し、マクロな時間スケールの予測が原理的に不可能となりうるということが明らかになっている。せっかく小さな単純な部分に分解できても、そこでの無限小の誤差がマクロな系の性質に大きな影響を与えてしまうのでは、やはり部分に分解するメリットがなくなることになる。

単純な系ではある性質を満たすか満たさないかは、yes or noで2値化することができると期待されるが、複雑な系で、しかも問題となる”性質”も複雑なバックグラウンドを持つような場合には、単純にyes or noの分類ができなくなることが起こりうる。このような可能性を学問の礎としているのが、言うまでもなく、ファジィである。ある意味で、ファジィは複雑な系の性質をミクロにまで分解するのを放棄し、マクロなレベルだけで複雑な系を解析しようとする方法であると言うことができる。

無数の構成要素からなる複雑な系の全体としての性質を考えると、要素ひとつひとつの細かな動きには目をつぶり、ある程度の大きさの集団の振る舞いに注目する見方を、物理学では粗視化と呼んでいる。粗視化の重要性は、ウィルソンのノーベル賞の受賞対象となった繰り込み群の理論によってはっきりとした。繰り込み群の考え方は、集団の振る舞いが、その集団の大きさを変えると共にどう変わっていくか、あるいは、粗視化の度合いを変えたときに物事の見え方がどう変化して

[†] Fractals and the Application

* Hideki TAKAYASU

神戸大学 理学部地球科学科

Dept. of Earth Sciences, Faculty of Science, Kobe University

いくつかを定量的に捕えようというものである⁴⁾。人間がいかなる観測をしても完全な情報は得られないわけであるから、私達は原理的にピントの合わないメガネを通してしか自然を見ることはできない。それではどうしたらピントをよりよく合わせることができるのかを問題にするのが従来の発想であるが、ピントの合っていないメガネでも幾つかかけ比べてみれば、結構いろいろなことがわかる、というのが繰り込み群の発想である。実際、繰り込み群の方法を適用することにより、それまでは見通しの悪かった相転移現象の研究は飛躍的に進歩した。

このように見かけ上は関係がない繰り込み群の理論とファジィ理論とは、その基本となる発想の中に類似性があると言えよう。また、繰り込み群はフラクタルとは独立に生まれてきたが、両者は非常に密接な関係を持っている。一言で言えば、フラクタルとは、粗視化の度合いを変えても見え方が変化しないようなもののことだからである。さらに、後で見るようにフラクタルとカオスも切っても切れない関係にある。自然の複雑さに挑む新しい科学は、分野の壁を越えて連係しながら発展しているのである。

2. フラクタルとは

フラクタルという言葉は、1975年にマンデルブロが作った造語である。専門が細分化されている現在では珍しく、マンデルブロは数学、工学、物理学、経済学、そして生理学など様々な分野の仕事を手掛けてきた。その豊富な経験の中から生まれてきたのが、フラクタルである。彼が初めてフラクタルの元となるアイデアを思い付いたのは、株価変動の解析をしているときだったという。テレビや新聞のニュースで株価変動のチャートを目にすることはよくあるが、彼は、時間軸のスケールを変えてプロットしても株価は同じように変動していることを発見した。観測するスケールを変えても同じように見えるということは、複雑さの中にもある種の対称性が潜んでいることであり、

変動を解析する上で大きな手掛かりとなりうる。そこで、株価以外にも、観測スケールを変えても同じように見えるものをいろいろな分野から探しだし、フラクタルという新しい概念にまとめあげていったわけである。

百聞は一見にしかず、であるから、まず典型的なフラクタル図形の例を示そう。図1は、シルピンスキーのギャスケットとよばれている基本的なフラクタル図形である。この図は、図2のように、初めに与えられた正3角形の各辺の中点を結んでできる上下逆向きの正3角形をくり抜くという操作を順次残った正3角形に繰り返し施すことによって得られる。大小様々な穴が無数に空いた大変複雑な図形であるが、作り方からも明らかなように、どんなに小さな部分も全体と相似な構造になっており、部分を見ても全体と同じだけの複雑さを持っている。このように部分と全体が相似になっている性質を自己相似性とよぶ。自己相似性を有するものの中には直線や平面のように自明なものもあるが、そのような例を除外すると、一般に自己相似図形は非常に複雑な構造を持つことが知

図1 シルピンスキーのギャスケット

図2 正3角形の真ん中をくり抜いていく

られている。拡大しても縮小しても見え方が変わらないということを数学的に表現すると、例えば、相関関数や分布関数を $f(x)$ としたときに、次のような関数関係が成り立つことである。

$$f(ax) \approx f(x) \quad (1)$$

ここで、 $\approx$ は比例関係を表し、 $a > 0$ は拡大縮小の倍率を表す。簡単な議論によって a を連続的に変化させても (1) 式を満たすような関数は、べき関数、

$$f(x) \approx x^D \quad (2)$$

に限られることが示される⁵⁾。つまり、フラクタルとはべき関数によって特徴付けられるような形や現象であるといつてよい。(2) 式において現われた指数 D が、拡大縮小対称性を特徴付ける定数である。(2) 式において特に x が長さを表す量である場合、指数 D をフラクタル次元とよぶことが多い。次元とよぶのは、この指数が通常の次元を拡張したものであることに起因しているのであるが、それは次のような例を考えることによって理解できるだろう。例えば、宇宙の質量の分布を特徴付けようとしたとき、宇宙のどこか 1 点を原点として、仮想的に半径 x の球を考え、その球の中の総質量を $f(x)$ とする方法が使われる。 $f(x)$ は、質量が空間的に一様に分布していれば x^3 に比例し、平面的に分布していれば x^2 、直線的に分布していれば x^1 に比例する。ここでの指数が空間分布の次元と一致していることは明かであろう。実際のデータから $f(x)$ の関数型を見積ると、およそ $x^{1.2}$ に比例することが確かめられている。このことから、宇宙の質量分布のフラクタル次元はおよそ 1.2 であることが結論されるわけである。ちなみにシルピンスキーのギャスケットの場合には、端の点を原点とすると半径を 2 倍したときに質量が 3 倍になることから、フラクタル次元は $\log 3 / \log 2 = 1.58 \dots$ となる。

フラクタルは幾何学的な概念であると思われがちであるが、形だけでなく、時間的な変動や様々な物理量の分布がフラクタルということもある。

例えば、ある時間変動のパワースペクトルが振動数のべき乗に比例しているとか、ある量の分布関数がべき分布になっているというように、現象がべき乗則によって特徴付けられるときにはフラクタル性を持っているということができるのである。

3. フラクタル解析

さて、次元が非整数の値にまで拡張されることはわかったとして、フラクタル次元の測り方についてもう少し詳しく説明しよう。フラクタル解析では、与えられたものや現象のフラクタル次元を粗視化の度合いを変えることによって見積る方法が最もポピュラーである。粗視化の度合いを変える方法にも幾つかの種類があるのだが、ここではその中でも一番良く使われているボックスカウンティング法について紹介する。

図 3 のように平面上に複雑な図形が与えられたとき、一辺が r の正方格子で覆い、その図形を一部分でも含む正方形の数 $N(r)$ を数える。次に、 r をいろいろと変えてみて $N(r)$ の r 依存性を調べる。 $N(r)$ がべき関数になれば、その形が自己相似性を有することがわかり、次式によって定義される指数 D がフラクタル次元を与えることになる。

$$D = -\frac{\log N(r)}{\log r} \quad (3)$$

図 3 ボックスカウンティング法

ここで右辺にマイナス符号が付くのは、 r が小さいほど $N(r)$ は大きくなるので、全体としての符号を正にするためである。このような粗視化によるフラクタル次元の定義は容易に高次元に拡張することができ、また、直線や平面などの整数値の次元を持つものに対しては従来どうりの正しい値を与えることがすぐに確かめられる。フラクタル次元は、非整数の値をとりうるが、空間の広がりを表す従来の直観的な“次元”を自然に拡張したものなのである。

実際にこのような解析法を自然界のものに適用した場合には、 r と $N(r)$ の値を両対数でプロットし、その勾配から D を決めることになる。プロットが直線上にきれいに並ぶ r の範囲には、無論、上限と下限があるが、通常 2 桁程度の範囲で直線性が確認されれば、その形はフラクタルであると言うことが多い。

1980 年代に入ってフラクタル探しの研究が様々な分野でブームになった。リアス式海岸は 1.2 次元、樹木の形は 1.5 次元、雲の輪郭は 1.3 次元、宇宙の星の分布は 1.2 次元、という具合である。表 1 にまとめたように非整数の次元によって特徴付けられるフラクタル構造は、私達の身の回りの至る所に存在しているわけである。

表 1 フラクタル次元の例

	次元
リアス式海岸	1.1–1.3
地表	2.1–2.3
川	1.4–1.8
川(主流だけ)	1.1–1.3
雲の表面	2.3
星の空間分布	1.2
樹木の枝	1.3–1.8
肺の表面	2.2
シリカゲルの表面	2.9
微粒子凝集体	2.5
放電パターン	1.6
墨流し	1.3
パーコレーション	1.9

4. フラクタルの生成メカニズム

フラクタル構造はどれも見かけは非常に複雑であるが、意外なほど簡単な方法によって作られることが多い。例えば、セルオートマトンとよばれるモデルのうちで最も単純な次のようなルールに従う系を考えてみる。1、または、 -1 の値をとる変数 $S_i(t)$ (i は 1 次元格子の座標、 t は離散的な時間) の時間発展が、

$$S_i(t+1) = S_{i-1}(t) \cdot S_i(t) \quad (4)$$

によって与えられるものとする。初期条件を 1 点だけ -1 で他では全て 1 とした時の時間発展を示したのが図 4 である。この時空パターンはシルピンスキーのギャスケットに他ならない。局所的な相互作用だけでこのようにあらゆるスケールのゆらぎを伴う構造が作られるのである。

図 4 オートマトンによるシルピンスキーのギャスケット

統計物理学の立場では、フラクタルが生じるメカニズムは、次のように大きく3つに分類できる⁶⁾。

1. 非線形フィードバック
2. 相転移
3. 非可逆過程

第一番目のフィードバックとは、自分から出た出力を自分の入力とするような系のことで、特に入力と出力の関係が線形でないようなものを非線形フィードバックという。フィードバックの典型的な例は、ビデオカメラをモニターの画面に向けてことによって簡単に作ることができる。カメラの倍率が小さいときには、容易に予想されるようにモニターの中にモニターが順次映った静的な画像が得られるが、倍率が1よりも大きくなると図5のような複雑なフラクタル図形が画面の中心から次々と湧き出てくるようになる。フィードバックは自分の中で情報をぐるぐると回しているだけのようにだが、その中に非線形な拡大操作が含まれると自明でない複雑な構造を産み出すのである。このように非線形なフィードバックによって生じる複雑な現象をカオスとよぶ。通常の力学系では、十分時間がたったときに行き着く軌道であるアトラクターは、点あるいはリミットサイクルといった整数次元の構造を持つが、カオスの場合にはアトラクターが一般にフラクタル構造を持ち、非整数次元によって特徴付けられることが知られている。逆は必ずしも真ではないのだが、単純に言えば、アトラクターが一般にフラクタル構造を持つような時間変動をカオスと言ってもいいわけ

ある。

第2の分類の典型的な例は、磁性体の相転移に見ることができる。低温の時には磁性を示す物体であっても、温度を上げていくとキュリー点を境にして、全く磁性を示さなくなることがよく知られている。ミクロに見れば、磁性を示す状態は各原子のスピンの方向がそろっている秩序状態であるが、温度が高くなるにつれて熱的なゆらぎでスピンの方向がバラバラな無秩序状態となる。スピンのそろった塊をクラスターとよぶことにすると、ちょうどキュリー点では、大小様々なクラスターが入り交じったフラクタル状態となる。そして、クラスター1個1個も非整数次元によって特徴付けられるような複雑な形になっているのである。この場合には、フラクタルは秩序状態と無秩序状態の境界に存在するということもできる。

3番目の非可逆過程とは、あらわに時間の矢が存在する現象で、破壊や凝集などが典型的である。ひび割れや微粒子の凝集体がフラクタル性を持っていることは、理論的にも実験的にもよく確かめられている。例として、ススのように微粒子がふわっと凝集した構造のフラクタル性を解明するために始められたコンピュータモデルを紹介しよう⁷⁾。まず、原点に種となる粒子を固定しておく。次に、粘着性を有する有限の大きさの粒子を周囲から放ち、種の粒子に付着するまでランダムウォークさせる。種の粒子に付着したならば、その場所に固定し、また、別の粒子を放ち、同じようにして付着を繰り返していく。図6は、このようにして作られた数千個の粒子からなる凝集体の構造であり、フラクタル次元は、およそ、1.7と見積られている。

非可逆な系では自動的にフラクタル的な状態に収束する傾向があることが明かにされつつあり、関心を集めている。例えば、大気中の塵やエアロゾル等の微粒子の大きさの分布はべき分布にしたがっていることが知られているが⁸⁾、これらの粒子は粘着性を持っており、一つ一つの粒子は衝突によって凝集を起こし、どんどんと成長している。粒子の凝集体の個々の形は図5のようなフラク

図5 ビデオフィードバックによるフラクタル

ル形状をとるのであるが、粒子を一つ一つ付着させるのではなく、たくさんの粒子を一斉にランダムウォークによって凝集させると凝集体の大きさの分布もフラクタル的になるのである。ただし、この時には、外部から一定の割合で粒子が注入されていることが系を定常的にするためには必要不可欠である。粒子の注入の効果と凝集による効果とが釣り合い、フラクタル的な定常状態が実現するわけである。このような注入の効果と凝集の効果とを考慮したあるモデルでは、いかなる初期状態から出発しても、必ずべき分布の成り立つフラクタル的定常状態に収束することが証明されている⁹⁾。フラクタル状態は非常に強い安定性を持っているわけである。

5. フラクタルの応用

フラクタル構造は、通常のユークリッド幾何学的な構造とは様々な点において根本的に異なる性質を持ち、しばしば私達の直観を混乱させることがある。例えば、図1のシルピンスキーのギャスケットは、理想的には面積は0で、穴の周囲の長さの和は無限大である。また、フラクタル次元が2と3の間にあるような曲面は表面積が無限大となる。マンデルブロが指摘をするまでは、このような事実は数学的な架空の話で、なんら現実の世界では意味を持たないだろうと思われていた。しかし、実は、生物は何千万年も前からフラクタルを積極的に応用していた。動物の肺の表面はフラクタル的になっていることが知られているが、これは限られた体積で表面積をできるだけ稼ぎ、表面での化学反応の効率を高めるためには極めて合理的な解決策なのである。フラクタルは自然界にはごくありふれたものであり、それを奇妙と感じるならば、そのように感じる私達の感覚が間違っているのである。

応用の分野でのフラクタル研究は、まだ10年に満たないほどの歴史しかないが、すでに非常に多くの分野に広がっている。一通り紹介するだけでも紙面を費やしてしまうほどなので、ここではご

図6 拡散律速凝集体(DLA)

く簡単に説明するだけに留めておく。アメリカの材料科学会では、フラクタルというセッションがあり、毎年100件以上の発表があるが、まず、その中でよく取り上げられる研究を紹介しよう¹⁰⁾。

スポンジのような多孔質物質はフラクタル構造を持つことが多いが、そのような物質の内部での流体の移動や拡散は通常の場合とはずいぶん異なるものとなる。このような問題は土壌中の汚染物質の拡散と密接な関係を持っている。砂などの隙間の部分の構造はスポンジに近いし、また、岩石中のひび割れの構造もフラクタルでよく近似できるからである。核廃棄物からは熱がでるのであまり完全に密封してはかえって熱がこもって大爆発を起こしかねない。熱はうまく逃がし、かつ、放射性物質は閉じ込めておくということはそう簡単なことではない。現在は、核廃棄物をコンクリートで固めて岩盤の中に埋めるという方法が有力だが、多孔質物質中の拡散現象を研究することによって、もっとよい方法が見つかる可能性もあるのである。

同じように地下の岩石中の輸送と関連した問題としては、地熱発電と石油の採掘への応用がある。地熱発電は、冷たい水を地下の熱い岩盤の中を通して熱エネルギーを吸収し、発電に使うものだが、難しいのは岩盤の中で水が通りやすいところは割れ目の入ったところだけであるという点である。地下はどこでも深く掘ればそれなりに温度が高くなっているのであるが、どこを掘っても地熱発電がうまくいくわけではなく、ちょうどうまく水が

循環するように割れ目の入ったところを探しださなければならないのである。地下の岩盤中に思い通りに人工的な割れ目を入れることができればいいのだが、割れ目はフラクタル的にランダムに広がっていくのでなかなか思い通りにコントロールすることはできない。そこを何とかしようという研究が始まっている。また、石油は岩石中にぽっかりとかたまって存在するわけではなく、ちょうどスポンジにしみこんだ水のように岩石中のひび割れの部分にしみこんでいる。どうすれば、より効率よく回収することができるか、というところにフラクタルの応用として共通する問題がある。

ゾル・ゲルなどのコロイドや、高分子の物性はいろいろな点でフラクタルと関連がある。典型的なのは、例えば豆腐やゼリーが固まるときのようにゾル・ゲル相転移の臨界点にあるような時で、ミクロな構造はフラクタル次元によって特徴付けられるようになる。また、DNA のように糸状の形態を持つ高分子は、熱的な揺らぎによってフラクタル構造を持つことが知られている。さらに、エアロゾルなどの大気中の微粒子は先にも紹介したようにベキ分布に従っている。このような高分子やコロイドの有するフラクタル性は、光の散乱などに大きな影響を与えることが知られている。

フラクタル的な面による電波や音の散乱も様々な応用の可能性を持って研究が進められている。面の表面がフラクタルになっていると、いろいろな波長の波を複雑に散乱させることになるので、可能性としては、あらゆる波長の波をうまく散らして反射波がほとんど戻ってこないようにできるかもしれない。米国空軍では、レーダーに映らない飛行機の開発のためにフラクタル理論が使われているといううわさもある。

ガラスやプラスチックのように結晶構造を持たないような固体の物性にもフラクタルは応用されている。これらの物質は、立体構造そのものはフラクタルではないのだが、分子同士の結合の仕方がフラクタル的なネットワークを形成しており、例えば、比熱の温度依存性などに通常の結晶構造とは異なるフラクタル特有の性質が現われること

が知られている。

化学反応のなかでも、触媒反応や燃焼などのように空間的に非一様に反応が起こるような場合には、しばしばフラクタルと密接な関係が生じてくる。例えば、燃焼の面はある場合にはフラクタル的な形状を持ち、また、平面上での触媒反応でも実際に反応が起こる領域がフラクタルになるようなこともある。

大きなスケールの応用としては、河川のフラクタル性の意義を解明しようとするような研究もある。自然の河川はフラクタル構造を持つが、人工的に護岸工事をしたり、水路を作るときには、むしろ、フラクタル性を持たないような構造にしている。水量が少ないときには人工的な構造は合理的なのだが、ある程度以上に水量が増えると途端に対応できなくなり、大きな被害がでることがある。自然の構造は曲がりくねったり分岐したりと無駄が多いようだが、そのおかげで大雨が降っても一時に一箇所に水を集中させることがなく、被害を分散させる効果を持っているようなのである。

コンピュータグラフィックスなどの情報処理関係では、フラクタルの応用は非常に進んでいる。そもそも、フラクタルが広く認められるきっかけとなったのは、マンデルブロの本の中にある地形のコンピュータグラフィックスが見事なできばえで、多くの人の注目を集めたからであると言える。今では、自然な地形や植物の形をコンピュータグラフィックスで表現するときには、フラクタル理論を応用した手法は欠くことのできないものになっている。

規則的なフラクタル図形はコンピュータを用いれば、縮小写像等によって簡単に描くことができるが、任意に与えられた風景写真などの画像情報を縮小写像の情報に分解することによって、情報量を 100 倍や場合によっては 1000 倍も圧縮しようというような研究も進んでいる¹¹⁾。これは、与えられた風景をフラクタル構造の和に分解し、各々のフラクタルを縮小写像によって構成しようというものである。例えば、図 1 のシルピンスキーのギャスケットの場合には、全体をスケールが $1/2$

のミニチュアに写像する3個の線形な縮小写像によって構成できる。線形な面から面への写像は6コのパラメータによって特徴付けられるので、シルピンスキーのギャスケットの画像全体をドットに分けて保存・輸送する代わりに18コの数値を保存・輸送すればよいのである。画像情報は非常に沢山のメモリを使うので、このような方法によって飛躍的に情報圧縮ができれば様々な分野に大きな影響を与えることと思われる。

ここで紹介した以外にも様々な応用研究が広い分野で現在進行中である。5年、あるいは、10年後には、フラクタルの応用研究の幾つかはいろいろな形で実用化しているのではないだろうか？

参 考 文 献

- 1) B.B. マンデルブロ、広中平祐訳、フラクタル幾何学 (日経サイエンス社、1984)
- T. ヴィテック、宮島佐介訳、フラクタル成長現象 (朝倉書店、1988)
- 2) 高安秀樹、フラクタル (朝倉書店、1986)

- 3) 津田一郎、日本ファジィ学会誌、4、pp.220-228.
- 4) 参考文献2のpp.131-137
- 5) H. Takayasu, Fractals in Physical Sciences, (Manchester Univ. Press, 1989)
- 6) 高安秀樹編、フラクタル科学 (朝倉書店、1987)
- 7) T. A. Witten Jr. and L. M. Sander, Phys. Rev. Lett., 47(1981), pp.1400-.
- 8) S. K. フリードランダー、早川一也、芳住邦雄訳、エアロゾルの科学 (産業図書1983)
- 9) H. Takayasu et al., J. Stat. Phys. 65(1991), pp. 725-.
- 10) 例えば、Material Research Society : Extended Abstracts-Fractal Aspects of Materials(1989)
- 11) M. Barnsley, Fractals Everywhere (Academic Press, San Diego, 1988)

(1992年7月25日 受付)

著 者 紹 介

高安 秀樹 (たかやす ひでき)

神戸大学 理学部地球科学科

1980年名古屋大学理学部物理学科卒業。1985年同大学院物理学専攻修了、理学博士。同年日本学術振興会特別研究員として京都大学理学部物理学教室に在籍。1986年神戸大学理学部地球科学科助手。1988年同助教授、現在に至る。その間、1988年より、米国エール大学応用数学科および米国ボストン大学物理学科に日本学術振興会海外特別研究員としてそれぞれ1年間づつ在籍。

[問い合わせ先]

〒675 神戸市灘区六甲台町
神戸大学 理学部地球科学科
高安 秀樹
TEL: 078-881-1212(内)4430
FAX: 078-882-1549