論文

ファジィ構造モデリングにおける 推移的結合問題の特殊解[†]

若林 高明* 大内 東*

ファジィ推移的結合問題とは、共通な推移的ファジィ関係を有する二つファジィ行列 A, B で表されるサブシステムを結合して一つのシステム構造行列 M を形成する問題である。この問題は、ファジィ構造モデリングにおける重要な問題である。通常、この問題の一般解を求めることは困難である。本論文では、ファジィ推移的結合問題が容易に求められる特殊解を持つことを示す。次に、 $B=1$ の特殊な場合である推移的拡大に言及する。更に、ファジィ推移的結合の有効な応用としてのファジィ構造モデリングにおける具象化について述べる。

キーワード：ファジィ推移的結合、特殊解、ファジィ構造モデリング

1. はじめに

ISM (Interpretive Structural Modeling)¹⁾は Warfield によって開発されたシステム構造化技法の一つである。ISM ではシステム構成要素集合とその上の反射的かつ推移的二項関係(擬順序関係)に着目し、要素間の一対比較によって求められる要素間の従属関係から全体の構造を把握しようとする。要素間の二項関係の有無を従属関係の曖昧さを許容し、ファジィ化したファジィ構造モデリングも種々考案されているが²⁾³⁾、著者らはより柔軟な構造モデリングの実現を目的として、従来のファジィ構造モデリングにはない機能を付加した FISM/Fuzzy を開発中である。本論文で述べるファジィ推移的結合もその一つである。FISM/Fuzzy 過程は具象化、構造化、描画の三つの過程からなる。このうちの具象化過程において重要な部分を占めるのがファジィ推移的結合問題である。著者らは文献 4)においてこの問題の解法を提案した。本論文では、ファジィ推移的結合問題の解についての新知見及びその有効な応用としての FISM/Fuzzy における具象化について述べる。

2. 諸定義・諸記号

本論文で使用する諸定義、諸記号を述べる。

定義 2.1 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$: システム構成要素集合である。

定義 2.2 $S_1, S_2, \dots, S_m$: 互いに排反なシステム構成要素集合の部分集合である。 $S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_m = S$ である。

定義 2.3 $N = \{1, 2, \dots, n\}$: S に対応する添字の集合である。

定義 2.4 ファジィ関係 R : 直積空間 $S \times S$ 上のファジィ集合である。メンバシップ関数 μ_R によって特性づけられる。FISM/Fuzzy で扱うファジィ関係は反射的かつ推移的であること(ファジィ擬順序関係)を前提とする。

定義 2.5 ファジィ行列 M : ファジィ関係 R を表現する行列である。各要素 m_{ij} は順序対 $(i, j) \in N \times N$ の R への帰属度を示す。

$$0 \leq m_{ij} \leq 1, \quad \forall (i, j)$$

定義 2.6 ファジィベクトル x, y : 各成分 x_i, y_i が

[†] Particular Solutions to a Transitive Coupling Problem in Fuzzy Structural Modeling
Taka-aki WAKABAYASHI and Azuma OHUCHI

* 北海道大学 工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University

閉区間 $[0,1]$ 内の値を取る列ベクトルである。 $\mathbf{x}^T$, $\mathbf{y}^T$ は行ベクトルを表す。

定義 2.7 二つのファジィ行列 A, B の大小関係を以下のように定義する。

$$A \leq (<) B \stackrel{\text{def}}{\iff} a_{ij} \leq (<) b_{ij}, \forall (i, j)$$

定義 2.8 ファジィ行列 M に対して反射性及び推移性を以下のように定義する。

- 反射性: $m_{ij}=1, \forall i$
- 推移性: $m_{ij}=\max_k [\min(m_{ik}, m_{kj})], \forall (i, j)$

定義 2.9 ファジィ行列 A, B に対し以下の演算を定義する。

- $a_{ij}b_{pq}=\min(a_{ij}, b_{pq})$
- $a_{ij}+b_{pq}=\max(a_{ij}, b_{pq})$
- $(A+B)_{ij}=\max(a_{ij}, b_{ij})=a_{ij}+b_{ij}$
- $(AB)_{ij}=\max_k [\min(a_{ik}, b_{kj})]=\sum_k a_{ik}b_{kj}$
- $(A \odot B)_{ij}=\min_k (a_{ik} \alpha b_{kj})=\prod_k (a_{ik} \alpha b_{kj})$

$$\text{ここで, } a \alpha b = \begin{cases} 1 & : a \leq b \\ b & : a > b \end{cases}$$

- $(\bar{A})_{ij}=1-a_{ij}$

定義 2.10 ファジィ可到達行列: 以下の条件を満たすファジィ行列 M をファジィ可到達行列という。

$$M = M + I \quad (2.1)$$

$$M^2 = M \quad (2.2)$$

ここで, I は単位行列である。本文中ではファジィ可到達行列であることを単に可到達であるということにする。

3. ファジィ推移的結合

3.1 問題の定式化

共通のファジィ関係を有し, ファジィ行列 A, B で定義される二つのサブシステムを結合し, ファジィ行列 M で定義される一つのシステムを形成する問題をファジィ推移的結合という。⁴⁾ファジィ推移的結合は, FISM/Fuzzy において重要な部

分を占める。システムの具象化を行うにあたり, システム構成要素が多い場合は, 構成要素集合を幾つかの部分集合に分割して構造化を行い, 後でその結果を結合してシステム全体のファジィ構造行列を形成することによって効率的な具象化が可能となる。

ファジィ推移的結合の目的は, 以下のようなファジィ行列 M が可到達行列となるように, M の未知の部分埋めることである。

$$M = \begin{bmatrix} A & X \\ Y & B \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ここで, A と B は既知のファジィ行列である。 A と B は同じ次数である必要はない。 s, t をそれぞれ A, B の次数とする。このとき, 相互連関行列 X, Y はそれぞれ $s \times t$ 型, $t \times s$ 型のファジィ行列となる。

3.2 含意行列

M が可到達行列であるための条件より M の部分行列は以下の条件を満たさなければならない

$$A^2 + XY = A \quad (3.2)$$

$$AX + XB = X \quad (3.3)$$

$$YA + BY = Y \quad (3.4)$$

$$YX + B^2 = B \quad (3.5)$$

A は反射的であるから $A^2 \geq A$ となる。これと (3.2) 式より, $A^2 = A$ を得る。よって, A は可到達行列でなければならない。同様に, B も可到達行列でなければならない。また, A の反射性より, $AX \geq X$ を得るが, これと (3.3) 式より $AX = X$ を得る。同様にして, (3.2)-(3.5) 式の条件は以下で置き換えられる。

$$XY \leq A \quad (3.6)$$

$$AX = X \quad (3.7)$$

$$XB = X \quad (3.8)$$

$$YA = Y \quad (3.9)$$

$$BY = Y \quad (3.10)$$

$$YX \leq B \quad (3.11)$$

以上の条件より, 未知要素間の含意関係を表す自己含意方程式及び相互含意不等式が得られる。そ

これらの導出を以下の補題に示す。ここで、 X の列を縦に並べたベクトルを $\mathbf{x}$, Y の行を横に並べたベクトルを $\mathbf{y}^T$ とする。

補題 3.1 $P\mathbf{x}=\mathbf{x}$ であるための必要十分条件は $AX=X$ かつ $XB=X$ が成り立つことである。ここで、 P は X の自己含意行列であり、Kronecker 積 $B^T \otimes A$, 即ち、図 3.1 に示されるブロック行列である。 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j^T)$ で添字づけられる P の (i,j) ブロックは

$$P^{ij} = \delta_{ij}A + \bar{\delta}_{ij}b_{ji}A \quad (3.12)$$

と書き表せる。ここで、 $\mathbf{x}_i$ は X の第 i 列、 δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、 $\bar{\delta}_{ij}$ はその補数である。

[証明] 付録参照。

補題 3.2 $P^T\mathbf{y}=\mathbf{y}$ であるための必要十分条件は $YA=Y$ かつ $BY=Y$ が成り立つことである。ここで、 P^T は Y の自己含意行列である。

証明：補題 3.1 と同様に証明される。

	$\mathbf{x}_1^T$	$\mathbf{x}_2^T$	$\cdots$	$\mathbf{x}_t^T$
$\mathbf{x}_1$	A	$b_{21}A$	$\cdots$	$b_{t1}A$
$\mathbf{x}_2$	$b_{12}A$	A	$\cdots$	$b_{t2}A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\mathbf{x}_t$	$b_{1t}A$	$b_{2t}A$	$\cdots$	A

図3.1 自己含意行列

補題 3.3 $\mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot F$ であるための必要十分条件は $XY \leq A$ かつ $YX \leq B$ が成り立つことである。ここで、 F は $(\mathbf{x}, \mathbf{y}^T)$ で添字づけられる X から Y への相互含意行列である。 F を図 3.2 に示す。 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ で添字づけられる F の (i,j) ブロックは

$$F^{ij} = \delta_{ij}A + \bar{\delta}_{ij}(b_{ij}I + \bar{I}) \quad (3.13)$$

となる。ここで、 $\mathbf{y}_j$ は Y の第 j 行である。

[証明] 付録参照。

補題 3.4 $\mathbf{x}^T \leq \mathbf{y}^T \odot F^T$ であるための必要十分条件は $XY \leq A$ かつ $YX \leq B$ が成り立つことで

ある。ここで、 F^T は $(\mathbf{y}, \mathbf{x}^T)$ で添字づけられる Y から X への相互含意行列である。

[証明] 補題 3.3 と同様に証明される。

	$\mathbf{y}_1^T$	$\mathbf{y}_2^T$	$\cdots$	$\mathbf{y}_t^T$
$\mathbf{x}_1$	A	$b_{21}I + \bar{I}$	$\cdots$	$b_{t1}I + \bar{I}$
$\mathbf{x}_2$	$b_{12}I + \bar{I}$	A	$\cdots$	$b_{t2}I + \bar{I}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\mathbf{x}_t$	$b_{1t}I + \bar{I}$	$b_{2t}I + \bar{I}$	$\cdots$	A

図3.2 相互含意行列

以上の補題より、(3.6)-(3.11)式の条件は、(3.14)-(3.16) ((3.17))式と等価であることがわかる。

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y} = P^T\mathbf{y} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot F \quad (3.16)$$

または

$$\mathbf{x}^T \leq \mathbf{y}^T \odot F^T \quad (3.17)$$

ここで、(3.14)式は X の、(3.15)式は Y の自己含意方程式である。また、(3.16)式は X から Y への、(3.17)式は Y から X への相互含意不等式である。結局、推移的結合問題を解くことは、(3.14)-(3.16) ((3.17))式を同時に満たす組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を求めることに帰着される。

P^2 を実際に計算することにより、 P は可到達行列であることが示される。 P^T もまた可到達行列である。 P は既知の A, B から以下のアルゴリズムにより生成される。

{自己含意行列 P の生成}

1. B の転置行列 B^T を求める。
2. B^T の対角要素に A を代入する。
3. B^T の非対角要素にはその要素と A との積を代入する。

F も P と同様に以下のアルゴリズムにより A と B から生成される。

{相互含意行列 F の生成}

1. B の転置行列 B^T を求める。

2. B^T の対角要素に A を代入する.
3. B^T の非対角要素にはその要素に I を乗じたものと $\bar{I}$ との和を代入する.

3.3 ファジィ推移的結合の特殊解

(3.14)-(3.16) ((3.17))式の自明な解は, すべての未知数が0となるものである. 文献4)において提案した一般解を求める方法では, 例えば, 自己含意行列がすべて非ゼロ要素からなる場合は一般解を求めることは困難であった. しかし, 条件を満たすある種の解は容易に求めることができる. 今後はその解を特殊解という. 以下では特殊解に関する幾つかの補題及び定理を述べる. 文中の P は自己含意行列とする.

以下の補題は固有ファジィ集合方程式⁵⁾である (3.14)式の解に関するものである.

補題 3.5 x を以下のような各要素からなるベクトルとする.

$$x_i = \sum_{j \neq i} p_{ij}, \quad \forall i \quad (3.18)$$

このとき x は (3.14) 式の解である.
[証明] 付録参照.

(3.15)式に関しても同様の補題が成り立つ.

補題 3.6 y を以下のような各要素からなるベクトルとする.

$$y_j = \sum_{i \neq j} p_{ij}, \quad \forall j \quad (3.19)$$

このとき y は (3.15) 式の解である.
[証明] 補題 3.5 の証明と同様.

更に, 補題 3.5, 3.6 のものとは異なる (3.14), (3.15) 式の解に関する補題を述べる.

補題 3.7 x を以下のような各要素からなるベクトルとする.

$$x_i = \prod_j p_{ij}, \quad \forall i \quad (3.20)$$

このとき x は (3.14) 式の解である.

[証明] 付録参照.

補題 3.8 y を以下のような各要素からなるベクトルとする.

$$y_j = \prod_i p_{ij}, \quad \forall j \quad (3.21)$$

このとき, y は (3.15) 式の解である.

[証明] の証明と同様.

以下の補題は推移的結合問題の解に関するものである.

補題 3.9 x を (3.14) 式の任意の解とし, y を以下のような各要素からなるベクトルとする.

$$y_j = \prod_i p_{ij}, \quad \forall j \quad (3.22)$$

このとき, 組 (x, y) は推移的結合問題の解である.
[証明] 付録参照.

補題 3.10 y を (3.15) 式の任意の解とし, x を以下のような各要素からなるベクトルとする.

$$x_i = \prod_j p_{ij}, \quad \forall i \quad (3.23)$$

このとき, 組 (x, y) は推移的結合問題の解である.
[証明] 付録参照.

以上の結果をまとめると次の定理が得られる. この定理は推移的結合問題の三種類の特殊解に関するものである.

定理 3.1 (3.24), (3.25) 式, (3.26), (3.27) 式, 及び (3.28), (3.29) 式で表される要素をもつ組 (x, y) は (3.14)-(3.16) ((3.17)) 式の解である.

max-min 解

$$x_i = \sum_{j \neq i} p_{ij}, \quad \forall i \quad (3.24)$$

$$y_j = \prod_i p_{ij}, \quad \forall j \quad (3.25)$$

min-max 解

$$x_i = \prod_j p_{ij}, \quad \forall i \quad (3.26)$$

$$y_j = \sum_{i \neq j} p_{ij}, \quad \forall j \quad (3.27)$$

min-min 解

$$x_i = \prod_j p_{ij}, \quad \forall i \quad (3.28)$$

$$y_j = \prod_i p_{ij}, \quad \forall j \quad (3.29)$$

max-max 解が存在しないのは(3.16)式及び(3.17)式が $\mathbf{x}$ または $\mathbf{y}$ の要素のうち一方の値が総じて大きいならば、他方の値は総じて小さくなるという性質に起因する。

推移的結合を実際に適用した場合、max-min 解、min-max 解、min-min 解のうちどれを選択するかは、既知行列 A と B に対応するサブシステム S_1 , S_2 の要素の相互間に階層構造を認めるかどうかによる。例えば、従属関係が“優先する”のとき、 S_1 の要素の S_2 の要素に対する優先度が総じて高い場合は、最も適切な解は max-min 解であり、 S_1 の要素と S_2 の要素の関係の度合いが総じて低い場合は min-min 解である(図 3.3 参照)。構成要素の部分集合が多数の場合は部分集合間の従属関係による順位付けを行って全体の階層構造を決定する。

3.4 推移的拡大

本節では、推移的結合の特殊な場合である推移的拡大について言及する。推移的拡大とは $B=1$ の場合であり、システムに後から一つだけ構成要素

図3.3 max-min, min-max, min-min 解のイメージ(太い矢印は相対的に強い関係、細い矢印は弱い関係を表す)

素を付加する場合に相当する。このとき、 X は列ベクトル $\mathbf{x}$, Y は行ベクトル $\mathbf{y}^T$ である。この場合を推移的拡大という。この場合の制約式は以下のようになる。

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T \leq A \quad (3.30)$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (3.31)$$

$$A^T\mathbf{y} = \mathbf{y} \quad (3.32)$$

補題 3.3 または 3.4 により、(3.30)式は(3.33)式または(3.34)の形に展開できる。

$$\mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot A \quad (3.33)$$

$$\mathbf{x}^T \leq \mathbf{y}^T \odot A^T \quad (3.34)$$

従って、この場合は自己含意行列 P と相互含意行列 F は共に A に等しい。特殊解は(3.24)–(3.29)式の p_{ij} を a_{ij} に置き換えて推移的結合の場合と同様に求められる。

4. FISM/Fuzzy 過程

FISM/Fuzzy 過程について概略を述べる。同過程は具象化、構造化、描画の三つの過程からなる。

1. 具象化過程

対象となる問題の構成要素集合 S を決定し、構成要素間の一対比較を行って、ファジィ構造行列を求める。即ち、構成要素集合上のファジィ擬順序関係を決定する。

2. 構造化過程

ファジィ構造行列を α レベル分解によって二値行列に変換し、その推移的簡約を求める。

3. 描画過程

構造化の結果を α レベルごとの有向グラフで表示する。

5. ファジィ具象化への応用

本章では、FISM/Fuzzy における推移的結合を用いたファジィ具象化過程の詳細を述べる。

前処理 構成要素集合 S を決定し、これを互いに排反な部分集合 $S_1, S_2, \dots, S_m$ に分割する。このステップは FISM/Fuzzy セッション参加者が KJ 法等を用いて行う。その際、各部分集合にタイトルを付け、部分集合間の従属関係による順位付けを行う。但し、他のどの部分集合とも関係の度合いが小さいと考えられるものについては順位付けの対象から外す。この過程が円滑に行われるためには、要素間の従属関係を意識した要素の抽出、要素集合の分割が非常に重要である。

第一フェーズ それぞれの構成要素の部分集合に対し、部分具象化を行う。各部分集合から二つの要素を選んで一対比較を行って得られた 2×2 型行列に推移的拡大を用いて逐次的に要素を付加してゆき、各部分構造行列を得る。この際、初期の段階で機械的に部分構造行列を決定してしまうと後で同じ値が構造行列中に多く現れることになる。このため、特に 2×2 型から 3×3 型への拡大は柔軟かつ慎重に行う必要がある。

第二フェーズ 得られた部分構造行列に推移的結合を行って、全体の構造行列を得る。部分集合間の順位付けに応じて max-min 解(上位から順に結合する場合)または min-max 解(下位から順に結合する場合)を用いて結合する。前処理の段階で他のどの部分集合とも関係の度合いが小さいと考えられたものについては順位を付けられたすべての部分構造行列の構造化が終了した後に min-min 解を用いて結合する。

6. 例題

本章ではファジィ具象化の例題として要素集合が

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} \quad (6.1)$$

で与えられるシステムの構造解析を行う。

前処理 S を互いに排反な部分集合に分割する。

$S_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ と $S_2 = \{s_4, s_5\}$ に分割され、従属関係による順位付けが $S_1 > S_2$ となったとする。

第一フェーズ s_1 と s_2 の一対比較によって、 S_1 の部分構造行列 A が以下のように得られたとする。推移的拡大を用いて未知要素の値を決定する。

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & .7 & x_1 \\ 2 & .2 & 1 & x_2 \\ 3 & y_1 & y_2 & 1 \end{array} \quad (6.2)$$

一対比較によって得られたとする。(3.31), (3.32), (3.33) 式のうち、 x_1 を含み、 x_1 が他の要素に影響を与える可能性のあるものは

$$x_1 + 0.7 x_2 = x_1 \quad (6.3)$$

$$0.2 x_1 + x_2 = x_2 \quad (6.4)$$

$$y_2 \leq (x_1 \alpha 0.7) (x_2 \alpha 1) \quad (6.5)$$

$x_1 = 0.9$ とすることによって、 $x_2 \geq 0.2$, $y_2 \leq 0.7$ が得られる。

ここでまず $x_2 = 0.4$ とすると

$$y_1 \leq (x_1 \alpha 1) (x_2 \alpha 0.2) \quad (6.6)$$

より $y_1 \leq 0.2$ を得る。

一方、 $y_2 = 0.6$ とすれば、(3.32) 式の

$$y_1 + 0.2 y_2 = y_1 \quad (6.7)$$

より $y_1 \geq 0.2$ が得られるので、 $y_1 \leq 0.2$ と併せて、 $y_1 = 0.2$ に決定する。以上のように決定した未知要素の値は (3.31), (3.32), (3.33) 式のすべての条件を満たしている。

結局、 A は以下ようになる。

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & .7 & .9 \\ 2 & .2 & 1 & .4 \\ 3 & .2 & .6 & 1 \end{array} \quad (6.8)$$

一方, B は

$$\begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 4 & 1 & .8 \\ 5 & .3 & 1 \end{array} \quad (6.9)$$

であるとする.

第二フェーズ 全体の構造行列 M は以下のようになる.

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & .7 & .9 & x_1 & x_4 \\ 2 & .2 & 1 & .4 & x_2 & x_5 \\ 3 & .2 & .6 & 1 & x_3 & x_6 \\ \hline 4 & y_1 & y_2 & y_3 & 1 & .8 \\ 5 & y_4 & y_5 & y_6 & .3 & 1 \end{array} \quad (6.10)$$

推移的結合によってこの行列の未知要素の値を決定する. この場合, 自己含意行列 P は以下の通りに生成される.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & .7 & .9 & .3 & .3 & .3 \\ .2 & 1 & .4 & .2 & .3 & .3 \\ .2 & .6 & 1 & .2 & .3 & .3 \\ .8 & .7 & .8 & 1 & .7 & .9 \\ .2 & .8 & .4 & .2 & 1 & .4 \\ .2 & .6 & .8 & .2 & .6 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

max-min 解, min-max 解, min-min 解はそれぞれ以下のようになる.

max-min 解

$$x^T = [.9, .4, .6, .9, .8, .8] \quad (6.12)$$

$$y^T = [.2, .6, .4, .2, .3, .3] \quad (6.13)$$

min-max 解

$$x^T = [.3, .2, .2, .7, .2, .2] \quad (6.14)$$

$$y^T = [.8, .8, .9, .3, .7, .9] \quad (6.15)$$

min-min 解

$$x^T = [.3, .2, .2, .7, .2, .2] \quad (6.16)$$

$$y^T = [.2, .6, .4, .2, .3, .3] \quad (6.17)$$

従属関係による順位付けが $S_1 > S_2$ であるから, 以上の解のうち, max-min 解が最も適切な解とな

る. max-min 解によって各未知要素の値を決定した M は以下のようになる.

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & .7 & .9 & .9 & .9 \\ 2 & .2 & 1 & .4 & .4 & .8 \\ 3 & .2 & .6 & 1 & .6 & .8 \\ \hline 4 & .2 & .6 & .4 & 1 & .8 \\ 5 & .2 & .3 & .3 & .3 & 1 \end{array} \quad (6.18)$$

7. おわりに

本論文では, ファジィ推移的結合問題に特殊解が存在することを示し, それらが解であることの証明を行った. 既知行列 A, B に対して max-min 解, min-max 解, min-min 解の三種の特殊解が一意的に決定されるので効率的に推移的結合問題を解くことができる. モデル生成者はシステムの階層構造の有無によってこれらの中から適切な解を選ぶことができる. 更に, 推移的結合を応用した FISM/Fuzzy におけるファジィ具象化を提案した. 提案した方法では, 各部分構造行列及びその間の階層構造が決定すれば, 自動的にシステム全体のファジィ構造行列を生成することができる. この方法を用いることによって, マンパワーを要する要素間の一対比較の回数が低減され, 効率的なシステムの具象化を図ることができる. 以上のような点から, FISM/Fuzzy は人的要因を含む大規模なシステムの構造解析において有用であると思われる. FISM/Fuzzy に更に様々な機能を付加し, より柔軟なシステムの構造化を可能にすることが今後の課題である.

参考文献

- 1) J.N.Warfield: "Societal Systems-Planning, Policy and Complexity", John Wiley (1976)
- 2) R.K.Ragade: "Fuzzy Interpretive Structural Modeling", *J. of Cybern.*, Vol.6, pp189-211 (1976)

- 3) E.Tazaki and M.Amagasa: "Structural Modeling in a Class of Systems Using Fuzzy Sets Theory", *International Journal for Fuzzy Sets and Systems*, Vol 2. No.1, pp1-17(1979)
- 4) 若林, 大内: "ファジィシステム構造行列の推移的結合", 情報処理学会論文誌, 33巻5号, pp620-627(1992)
- 5) E.Sanchez: "Resolution of Eigen Fuzzy Sets Equations", *Fuzzy Sets and Systems* 1, pp69-74(1978)
- 6) 児玉, 須田: "システム制御のためのマトリクス理論", 計測自動制御学会(1978)
- 7) E.Sanchez: "Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations", *Information and Control* 30, pp38-48(1976)

付 録

補題3.1の証明

(I) 最初に以下が成り立つことを示す.

$$(AX=X) \wedge (XB=X) \Rightarrow P\mathbf{x}=\mathbf{x} \quad (\text{付.1})$$

$(AX=X) \wedge (XB=X)$ は $AXB=X$ と等価であることが直ちにわかる. $\mathbf{a}_j$ を A の第 j 行, $\mathbf{b}_i$ を B の第 i 列, $\mathbf{x}_k$ を X の第 k 列, $cs(X)$ を行列 X の列展開とする. $AXB=X$ を列展開すると以下の式を得る.

$$cs(AXB) = \begin{bmatrix} AX\mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ AX\mathbf{b}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} \quad (\text{付.2})$$

$AX\mathbf{b}_i$ に関して以下の変形を行う.

$$\begin{aligned} AX\mathbf{b}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{x}_t \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a}_s\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_s\mathbf{x}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ti} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{1i}\mathbf{a}_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{ti}\mathbf{a}_1\mathbf{x}_t \\ \vdots \\ b_{1i}\mathbf{a}_s\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{ti}\mathbf{a}_s\mathbf{x}_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{1i}\mathbf{a}_1 & \cdots & b_{ti}\mathbf{a}_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1i}\mathbf{a}_s & \cdots & b_{ti}\mathbf{a}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} \\ &= [b_{1i}A, \cdots, b_{ti}A] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} = (\mathbf{b}_i^T \otimes A) cs(X) \end{aligned}$$

故に

$$cs(AXB) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T A \\ \vdots \\ \mathbf{b}_t^T A \end{bmatrix} cs(X) = P\mathbf{x}$$

従って(3.14)式が得られる.

(II) 次に以下が成り立つことを示す.

$$(AX=X) \wedge (XB=X) \Leftrightarrow P\mathbf{x}=\mathbf{x} \quad (\text{付.3})$$

(II-a) (3.14)式より, すべての i について以下が成り立つ.

$$b_{1i}A\mathbf{x}_1 + \cdots + A\mathbf{x}_i + b_{ti}A\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_i \quad (\text{付.4})$$

よって, すべての i に対して $A\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_i$ が成り立つ. これより $AX \leq X$. 一方, A の反射性より, $AX \geq X$ であるから $AX=X$ を得る.

(II-b) 再び(3.14)式より, すべての k について以下が成り立つ.

$$b_{1i}x_{k1} + \cdots + a_{ii}(=b_{ii}=1)x_{ki} + b_{ti}x_{kt} = x_{ki} \quad (\text{付.5})$$

よって $XB \leq X$. 一方, B の反射性より, $XB \geq X$ であるから $XB=X$ を得る.

補題3.3の証明

(I) 最初に以下を示す.

$$(XY \leq A) \wedge (YX \leq B) \Rightarrow \mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \quad \textcircled{\alpha} F \quad (\text{付.6})$$

(I-a-i) $\textcircled{\alpha}$ 演算を用いれば, $XY \leq A$ は以下のよう書き換えられる.

$$Y \leq X^T \quad \textcircled{\alpha} A \quad (\text{付.7})$$

成分ごとに書けば,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{t1} & \cdots & y_{ts} \end{bmatrix} \\ & \leq \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{s1} & \cdots & x_{st} \end{bmatrix}^T \quad \textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{s1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1t} & \cdots & x_{st} \end{bmatrix} \quad \textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} (x_{11}\alpha a_{11}) \cdots (x_{s1}\alpha a_{s1}), \cdots, (x_{11}\alpha a_{1s}) \cdots (x_{s1}\alpha a_{ss}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{1t}\alpha a_{11}) \cdots (x_{st}\alpha a_{s1}), \cdots, (x_{1t}\alpha a_{1s}) \cdots (x_{st}\alpha a_{ss}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行ベクトル $\mathbf{x}^T$, $\mathbf{y}^T$ を用いれば, 上記の不等式は以下のように展開できる.

$$\mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot \begin{bmatrix} A & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & A & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & A \end{bmatrix} \quad (\text{付.8})$$

(I-a-ii), (I-a-i) と同様に $\odot$ 演算を用いて, $YX \leq B$ より, 以下の不等式が得られる.

$$Y \leq (X \odot B^T)^T \quad (\text{付.9})$$

成分ごとに書けば, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{t1} & \cdots & y_{ts} \end{bmatrix} \\ & \leq \left[\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{s1} & \cdots & x_{st} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{t1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1t} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix} \right]^T \\ & = \begin{bmatrix} (x_{11}\alpha b_{11}) \cdots (x_{1t}\alpha b_{1t}), \cdots, (x_{s1}\alpha b_{11}) \cdots (x_{st}\alpha b_{1t}) \\ \vdots \\ (x_{11}\alpha b_{t1}) \cdots (x_{1t}\alpha b_{tt}), \cdots, (x_{s1}\alpha b_{t1}) \cdots (x_{st}\alpha b_{tt}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

B の反射性により, この不等式は以下のように展開される.

$$\mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & b_{1t}I + \bar{I} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1t}I + \bar{I} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{付.10})$$

(I-b) 次に, (付.8)式と(付.10)式を共に満たす Y を求める. y_{ij} について, (付.8)式と(付.10)式の右辺の最小値をとると, 行列 A, B の反射性により, 以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} y_{ij} & \leq \{ (x_{11}\alpha 1) \cdots (x_{1i}\alpha a_{1j}) \cdots (x_{sj}\alpha a_{sj}) \cdots (x_{st}\alpha 1) \} \\ & \quad \cdot \{ (x_{11}\alpha 1) \cdots (x_{j1}\alpha b_{i1}) \cdots (x_{jt}\alpha b_{it}) \cdots (x_{st}\alpha 1) \} \\ & = (x_{11}\alpha 1) \cdots (x_{j1}\alpha b_{i1}) \cdots (x_{j,i-1}\alpha b_{i,i-1}) \\ & \quad \cdots (x_{s1}\alpha a_{s1}) \cdots (x_{si}\alpha a_{sj}) \\ & \quad \cdots (x_{j,i+1}\alpha b_{i,i+1}) \cdots (x_{jt}\alpha b_{it}) \cdots (x_{st}\alpha 1) \end{aligned}$$

すべての y_{ij} について同様の演算を行ったものを行列形式で書くと,

$$\mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot \begin{bmatrix} A & b_{21}I + \bar{I} \cdots b_{1t}I + \bar{I} \\ b_{21}I + \bar{I} & A & \cdots & b_{2t}I + \bar{I} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1t}I + \bar{I} & b_{2t}I + \bar{I} \cdots & A \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

が得られる.

(II)次に, 以下が成り立つことを示す.

$$(XY \leq A) \wedge (XY \leq B) \Leftrightarrow \mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot F \quad (\text{付.11})$$

(II-a)

$$XY \leq A \Leftrightarrow \mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot F \quad (\text{付.12})$$

が成り立つことを示す.

(付.12)式の条件より, 以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} x_{ik}y_{kj} & \leq x_{ik} \{ (x_{j1}\alpha b_{k1}) \cdots (x_{jt}\alpha b_{kt}) (x_{1k}\alpha a_{1j}) \\ & \quad \cdots (x_{ik}\alpha a_{ij}) \cdots (x_{sk}\alpha a_{sj}) \} \forall k \end{aligned} \quad (\text{付.13})$$

但し, 明らかに1となる項を除く.

ここで二つの場合に分けて考える.

(II-a-i) $x_{ik} \leq a_{ij}$ の場合.

$x_{ik}y_{kj} \leq x_{ik} \leq a_{ij}$ となることが直ちに分かる.

(II-a-ii) $x_{ik} > a_{ij}$ の場合.

仮定と α 演算の性質により, $x_{ik}\alpha a_{ij} = a_{ij}$ であるから, “(付.13)式の右辺” $\leq a_{ij}$ となる. よって $x_{ik}y_{kj} \leq a_{ij}$ となる.

以上の結果より, $x_{ik}y_{kj} \leq a_{ij}, \forall k$.

故に, $XY \leq A$.

(II-b)

$$XY \leq B \Leftrightarrow \mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T \odot F \quad (\text{付.14})$$

も (II-a) と同様に証明される.

補題3.5の証明

$\mathbf{x}$ を各要素が(3.18)式で定義されるファジィベクトルとする. P の反射性より以下の式を得る.

$$(P\mathbf{x})_i = \sum_{j \neq i} p_{ij}x_j + x_i \quad (\text{付.15})$$

右辺の $p_{ij}x_j$ の形の各項に対して, 以下の不等式が成り立つ.

$$p_{ij}x_j \leq p_{ij} \leq x_i (j \neq i) \quad (\text{付.16})$$

従って, $(P\mathbf{x})_i = x_i$. 以上の結果はすべての i に対して成り立つので $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ が得られる.

補題3.7の証明

$x, x_i = \prod_j p_{ij}, \forall i$ を (3.14) 式の x_k に関する式

$$x_k = \sum_i p_{ki} x_i \quad (\text{付.17})$$

の右辺に代入すると

$$\begin{aligned} \sum_i p_{ki} (\prod_j p_{ij}) \\ &= \sum_i p_{ki} (p_{i1} p_{i2} \cdots p_{in}) \\ &= \sum_i (p_{ki} p_{i1}) (p_{ki} p_{i2}) \cdots (p_{ki} p_{in}) \end{aligned}$$

(P の推移性により)

$$\begin{aligned} &\leq \sum_i p_{k1} p_{k2} \cdots p_{kn} \\ &= \sum_i \prod_j p_{kj} = \prod_j p_{kj} = x_k. \end{aligned}$$

よって

$$\sum_i p_{ki} x_i \leq x_k.$$

これはすべての k について成り立つので、

$$Px \leq x$$

一方、 P の反射性により

$$Px \geq x.$$

以上により

$$Px = x$$

を得る。

著者紹介

若林 高明 (わかばやし たかあき)

北海道大学大学院工学研究科情報工学専攻

'89年北海道大学理学部数学科卒業。'91年同大学大学院修士課程情報工学専攻修了。現在同博士課程在学中。システム工学の研究に従事。情報処理学会会員。

大内 東 (おおうち あづま)

北海道大学工学部情報工学科

'68年北海道大学工学部応用物理学科卒業。'74年同大学大学院博士課程電気工学専攻修了。同年、北海道大学工学部電気工学科助手。同助教授を経て現在、北海道大学工学部情報工学科教授。工学博士。システム情報工学、応用人工知能システム、医療システムの研究に従事。情報処理学会、電気学会、電子情報通信学会、計測自動制御学会、人工知能学会、日本OR学会、医療情報学会、病院管理学会、IEEE-SMC 各会員。

補題3.9の証明

自己含意行列 P , 相互含意行列 F 及び (3.14) 式を満たす任意の x に対して、

$$\prod_i p_{ij} \leq \prod_i (x_i \alpha f_{ij}), \quad \forall j$$

が成り立つ。なぜなら、 $x_i \alpha f_{ij} = f_{ij}$ または 1 であり、 $p_{ij} \leq f_{ij}$ と併せて、

$$p_{ij} \leq x_i \alpha f_{ij}, \quad \forall i$$

となるからである。このことと補題3.8より組 (x, y) は (3.14), (3.15), (3.16) 式の条件を満たしているので題意は示される。

補題3.10の証明

補題3.9の証明と同様にして、題意にあるような組 (x, y) が (3.14), (3.15), (3.17) 式の条件を満たしていることが示される。

(1993年1月23日 受 付)

(1993年7月8日 再受付)

[問い合わせ先]

〒060 札幌市北区北13条西8丁目
北海道大学工学部情報工学科
システム工学講座

若林 高明

☎: 011-716-2111(内)6498

☎: 011-757-3524