論文

トール集合における補集合、 t -ノルム、 t -コノルムおよび応用について†

宮本 定明*

この論文では、Dubois と Prade によって提案されたトール集合について、その補集合、 t -ノルムおよびコノルムを考察する。また、トール集合の応用について2つの例を挙げる。すなわち、次のことを示す。1. トール集合 T の補集合を $N(T)$ とするとき、 $N(N(T))=T$ となる補集合を定義する(これは Dubois, Prade が提案した補集合の定義とは異なる)。2. この補集合を用いて、トール集合上の t -ノルムと t -コノルムを定義する。また、ミンコフスキーノルムの形の t -ノルムについて考察する。3. トール集合上の t -ノルムと t -コノルムとファジィ集合上の t -ノルムと t -コノルムとが、トール集合とファジィ集合との間の1-1写像によって完全に対応していることを示す。4. 一つの応用として、意思決定問題に t -ノルムの最小化を利用することを考える。ミンコフスキーノルムの形の t -ノルムが凸関数となるため、比較的最適化しやすいからである。5. トールグラフにもとづく階層的クラスタリングの意義について述べる。

キーワード：トール集合、補集合、 t -ノルム、ミンコフスキーノルム、最適化、凸関数、トールグラフ

1. はじめに

トール集合(toll sets) [1]は Dubois と Prade が IFSA'91 において提案した概念である。席上、彼等の発表に対して、この概念が理論的にどのような意義をもつのかを知るには、補集合について考察しなければならない旨の指摘があった。

ここでは、まず、トール集合について簡単に紹介し、その補集合について考える。さらに、ファジィ集合における t -ノルム、 t -コノルムの概念をトール集合上で考察し、ファジィ集合とトール集合におけるこれらの概念の相互関連について調べる。この際、生成関数を用いた議論を行なう。トール集合の応用について考えるため、まず、トール集合上の t -ノルムを用いて、トール集合による意思決定の定式化を行ない、評価関数の凸性について考える。さらに、トール関係をグラフとして

みたトールグラフのクラスタリングへの応用について示唆する。

これらによって、トール集合の意義を論じることが、この報告の目的である。

2. トール集合

トール集合は比較的新しい概念であり、邦訳が定まっていない。したがって、ここでは、単にトール集合ということにする(直訳すれば、“料金集合”となる)。ここでは、Dubois, Prade [1]にしたがってこの概念について簡単に紹介する。

半区間 $[0, +\infty)$ に無限遠点 $+\infty$ を付加し、 $[0, +\infty) \cup +\infty$ を $[0, +\infty]$ と書く。 X を普遍集合とするとき、 X のトール集合 T は $[0, +\infty]$ に値をとるメンバーシップ関数 $\psi_T(x)$ によって特徴づけられる。ここで、 $\psi_T(x)$ は x が集合 T のメンバーシップを得るために支払うコスト、という意味をもっている。Dubois, Prade [1] は次の例を挙げている。 T が *young* の意味を表し、 x が *John* であるとする。このとき、 $\psi_{\text{young}}(\text{John})$ は *John* が *young* と呼ばれるために支払わなければならない

† Complements, t -norms, t -conorms, and Applications of Toll Sets

Sadaaki MIYAMOTO

* 徳島大学工学部知能情報工学科

Department of Information Science and Intelligent Systems, Faculty of Engineering, University of Tokushima

いクラブ会員費のようなものを表している。 $\psi_T(x)=0$ ならば T に属するために費用を払う必要はなく、 $\psi_T(x)=+\infty$ ならば、いくら払っても T に属することはできない。このように、トール集合はコストあるいはペナルティによって解釈される。この点が、適切さの度合いにより解釈されるファジィ集合との根本的な相違点である。

2つのトール集合 S, T に対して、包含関係は

$$S \subseteq T \Leftrightarrow \psi_S(x) \geq \psi_T(x), \quad \forall x \in X$$

とファジィ集合とは逆の不等号によって定義される。この意味は明らかであろう。

合併と共通部分は次のように定義される。まず、合併は $\min$ によって

$$\psi_{S \cup T}(x) = \min[\psi_S(x), \psi_T(x)] \quad (1)$$

と定める。なぜなら、 S, T をクラブと考えれば、それらのどちらかに属するためには会員費の少ない方を支払えばよいからである。

共通部分については幾つかの選択肢があるが、

$$\max[\psi_S(x), \psi_T(x)] \leq \psi_{S \cap T}(x) \leq \psi_S(x) + \psi_T(x) \quad (2)$$

を満たさなければならない。 $\psi_{S \cap T}(x)$ が左辺に一致するときは、両方の会費の高い方だけ支払えばよい、という最大限の値引きの場合を表し、右辺に一致するときは、全く値引きがなく、両方の会費の合計を支払わなければならない。

$[0, +\infty]$ で定義され $[0, 1]$ に値をとる 1-1 写像 $f(y) = e^{-y}$ を用いれば、ファジィ集合とトール集合との関連が明らかになる。ただし、 $f(+\infty) = 0$ と定義する。すなわち、トール集合 $\psi_T(x)$ に対してファジィ集合 $f(\psi_T(x))$ を対応させることができる。トール集合の合併は $\max$ によるファジィ集合の合併に対応し、トール集合の共通部分を $\max$ で定義するならば、 $\min$ によるファジィ集合の共通部分がこれに対応する。もし、トール集合の共通部分を $+$ で定義するならば、ファジィ集合の代数積がこれに対応する。逆に、ファジィ集合 $\mu_A(x)$ にはトール集合 $f^{-1}(\mu_A(x))$ を対応させることができる ($f^{-1}(z) = -\log z$)。この対応におい

て、トール集合の $+\infty$ にはファジィ集合のグレード 0 が対応し、トール集合の 0 にはファジィ集合のグレード 1 が対応するのは明らかである。

Dubois, Prade[1] は T の補集合 $\bar{T}$ は

$$\min[\psi_T(x), \psi_{\bar{T}}(x)] = 0 \quad (3)$$

$$\psi_T(x) = 0 \Rightarrow \psi_{\bar{T}}(x) > 0 \quad (4)$$

の2つの条件を満たすべきであると述べ、

$$\psi_{\bar{T}}(x) = \begin{cases} +\infty & (\psi_T(x) = 0) \\ 0 & (\psi_T(x) > 0) \end{cases}$$

を挙げている。この定義を上関数 f でファジィ集合に写すと、ファジィ論理における否定[2,3]の定義の一つに一致する。

Dubois, Prade[1] はこのようにトール集合を導入した後、トール測度とトール論理について述べているが、ここでは省略する。

3. トール集合における補集合について

補集合について考察する前に、ファジィ集合とトール集合とを相互に対応させる写像 f は $f(y) = e^{-y}$ に限られるものではないことに注意しておこう。以下では、ファジィ集合とトール集合とを互に対応させる写像 f は $[0, +\infty]$ で定義され、 $[0, 1]$ に値をとる連続な狭義単調減少関数で、 $f(0) = 1$, $f(+\infty) = 0$ を満たす任意の関数であると仮定する。この条件をみたす関数は、さきに述べたような形でトール集合とファジィ集合とを互に対応させることができる。

Dubois, Prade[1] による補集合は、ファジィ集合で一般に用いられている

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (5)$$

の形とは全く異なっている。なぜなら、仮に(3)、(4)をファジィ集合に対する補集合の性質であるかのようにみなした場合、(5)は(4)を満たすが(3)は満たさないからである。それでは、トール集合において、ファジィ集合の補集合のように(4)を満たすが(3)は満たさない演算を考える必要はないであろうか。また、どのような目的があれば、考

える必然性が生じるであろうか。

一般にファジィ集合の補集合については様々な提案があり、どれが最も良い演算であるかという結論は出ていないと思われる[2]。また、標準的な(5)式の補集合演算も様々に一般化されている[4]。竹内、千谷[3]によるファジィ論理においても二種類の否定演算が用いられ、その一つは(5)のファジィ集合演算に相当する形をもっている。このように、一般的な立場から考えた場合、トール集合についても様々な形の否定演算を考察する必要がある、Dubois, Prade が示したものに限定することはできないと思われる。

ところで、(5)の演算の大きな特徴は、2回補集合をとるとともに戻ることである。すなわち、一般に補集合演算を N と書くとき、 $N(N(A))=A$ が成立する。この性質は、二重否定の法則と呼ばれ[2]、ファジィ集合におけるド・モルガン律のような双対性に関する議論を行なう際よく用いられ、 t -ノルムから t -コノルムを導く(あるいはその逆)のような場合有用である。

本稿では、トール集合において、ファジィ集合における t -ノルムに相当する演算を考え、その意義について調べることを一つの目的とする。したがって、上述のことを考慮すれば、ファジィ集合での補集合のように、二重否定の法則を満たす演算を考える必要性が生じる。このような補集合は一般に条件(3)を満たさない。また、Dubois, Prade が提案したものとは異ならなければならない。

ファジィ集合の場合でも、補集合の定義は一通りではなく、一般的に生成関数による議論を行なうことがある[4]。そこで、トール集合における補集合の生成関数を先と同じ N で表し、次式で定義する。

(Na) $N : [0, +\infty] \rightarrow [0, \infty]$ の狭義単調減少関数、

(Nb) $N(N(x))=x, \quad x \in (0, +\infty)$

(Nc) $N(0)=+\infty$

(Nd) $N(+\infty)=0$

このような関数の例として、次の2つが挙げられる。

例1 λ を正数パラメータとして

$$N(y) = \frac{\lambda}{y}, \quad y \in (0, +\infty)$$

$$N(0) = +\infty, \quad N(+\infty) = 0$$

と定義すれば上の(Na)-(Nd)を満たす。

例2 ファジィ集合とトール集合との対応を利用するため、トール集合を f でファジィ集合にうつし、ファジィ集合の補集合をとった後、 f^{-1} でトール集合にもどす。すなわち、

$$N(y) = f^{-1}(1 - f(y))$$

これが(Na)-(Nd)を満たすことは付録に示す。

中島[2]は、ファジィ集合の補集合が満たすべき要件として、

(N1) T がクリスプ集合ならば、 $N(T)$ は通常の補集合

(N2) $S \subseteq T$ ならば $N(T) \subseteq N(S)$

の2つを挙げている。(Na)-(Nd)が満たされればトール集合についても(N1), (N2)が成立するのは明らかである。また、先に述べた二重否定の法則

(N3) $N(N(T)) = T$

も成立つ。

さらに、いま、合併を $\min$, 共通部分を $\max$ で定義するならば、ド・モルガンの法則

(N4) $N(S \cap T) = N(S) \cup N(T),$

$$N(S \cup T) = N(S) \cap N(T)$$

が満たされるのは(Na)の狭義単調性からわかる。

4. トール集合における t -ノルムと t -コノルム

ファジィ集合において AND と OR を一般化した t -ノルムと t -コノルムが提案されたように[4,5]、トール集合においても、 t -ノルムと t -コノルムに相当する演算を定義することができる。また、3. で考察した補集合はトール集合における t -ノルムと t -コノルムの双対性を考える際に役立つ。ここでは、これらについて述べよう。

まず、ファジィ集合における t -ノルムおよび t -

コノルムとトール集合におけるそれらを区別するため、トール集合については、 tt -ノルムと tt -コノルムという用語を使うことにする(tt -ノルムとは、 t -norm on toll sets の略語)。そこで、 tt -ノルム $tt(a, b)$ を $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$ で定義され、 $[0, +\infty]$ に値をとる関数で、次の (tt 1)-(tt 4) を満たすものとして定義する。

(tt 1) [単調性] $a \leq c, b \leq d$ ならば

$$tt(a, b) \leq tt(c, d)$$

(tt 2) [交換律]

$$tt(a, b) = tt(b, a)$$

(tt 3) [結合律]

$$tt(a, tt(b, c)) = tt(tt(a, b), c)$$

(tt 4) [境界条件]

$$tt(+\infty, +\infty) = +\infty$$

$$tt(a, 0) = tt(0, a) = a$$

また、 tt -コノルム $st(a, b)$ を $tt(a, b)$ と同じ定義域、値域をもち、(tt 1)-(tt 3) と同じ単調性、交換律、結合律、および

(tt 5) [tt -コノルムの境界条件]

$$st(0, 0) = 0$$

$$st(a, +\infty) = st(+\infty, a) = a$$

を満たす関数と定義する。ファジィ集合における t -ノルム、コノルムについては単調性、交換律、結合律はそれぞれ (tt 1), (tt 2), (tt 3) と同じであるが、境界条件については tt -ノルム、コノルムとは異なることに注意しよう。

田中[4]ではファジィ集合における t -ノルムを生成関数から構成する方法が示されているが、 tt -ノルムについても生成関数を定義することができる。

いま、 g を $g: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ の狭義単調増加関数で $g(0) = 0, g(+\infty) = +\infty$, かつ、 $x \in (0, +\infty)$ に対して $g(x) \in (0, +\infty)$ を満たすとする。また、 $+\infty$ に関連する演算は

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) + a = +\infty, \quad \forall a \in [0, +\infty)$$

を仮定する。さらに g は

$$g(x+y) \geq g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in [0, +\infty] \quad (6)$$

を満たすものとする。

注意：最後の条件(6)は

$$\max[a, b] \leq tt(a, b) \leq a + b$$

が満たされるための仮定で、(tt 1)-(tt 4) には直接関係しない。

このとき、逆関数 $g^{-1}: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ が存在し、 $g^{-1}(0) = 0, g^{-1}(+\infty) = +\infty, \forall x \in (0, +\infty)$ に対して $g^{-1}(x) \in (0, +\infty)$ は明らかである。また、 g^{-1} は狭義単調増加となる。

例 3 上の性質を満たす関数のクラスとして、 $g(x) = \gamma x^n, \gamma > 0, n: \text{自然数}$, が挙げられる。

このとき、次の命題が得られる。

命題 1

$$tt(a, b) = g^{-1}(g(a) + g(b)) \quad (7)$$

は tt -ノルム(トール集合の t -ノルム)となる。

証明は付録に示す。

注意：田中[4]では、 t -ノルムではなく t -コノルムに対する生成関数から定義を行なう方法が示されているが、この場合 tt -コノルムの生成関数から始める方法はあまり簡単ではないように思われる。また、(7) で定義される tt -ノルムは 任意の実数 a について $tt(a, a) > a$ を満たす。

次に tt -ノルム、コノルムの例を挙げよう。

(i)

$$tt(a, b) = \max[a, b]$$

$$st(a, b) = \min[a, b]$$

(ii)

$$tt(a, b) = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$st(a, b) = (a^{-p} + b^{-p})^{-\frac{1}{p}}$$

ただし、 p は $1 \leq p < +\infty$ となる実数パラメータである。

これらの tt, st が (tt 1)-(tt 5) の条件を満たすことの証明は簡単であるので省略する。第一の例

は、トール集合の共通部分と合併が各々 tt -ノルムと st -ノルムであることを示している。ただし、この例では、共通部分については最大の値引きがあるものとしている。また、例(ii)で $p=1$ とするとき、 $tt(a,b)=a+b$, $st(a,b)=\frac{ab}{a+b}$ を得る。この tt -ノルムはトール集合の共通部分で値引きのないものを表している。さらに、(ii)で、 $p \rightarrow +\infty$ とすると、 $tt(a,b) \rightarrow \max[a,b]$, $st(a,b) \rightarrow \min[a,b]$ となるから、(ii)は極限において(i)の tt と st を表すこともできる。さらに、(ii)の $tt(a,b)$ は(2)式を満たすことがわかる。このことについては付録を参照されたい。

ファジィ集合における t -ノルム $t(a,b)$ と t -コノルム $s(a,b)$ は双対的な関係

$$s(a,b) = 1 - t(1-a, 1-b)$$

をもっていることが指摘されている[4,5]。トール集合の場合も先に定義した補集合演算によって tt -ノルムと tt -コノルムとの双対性を述べることができる。

以下に述べる3つの命題の証明は付録に示されている。

命題2 トール集合における任意の tt -ノルムを $tt(a,b)$ とするとき、

$$st(a,b) = N(tt(N(a), N(b)))$$

によって定義される st は tt -コノルムとなる。逆に、任意の tt -コノルムを $st(a,b)$ として

$$tt(a,b) = N(st(N(a), N(b)))$$

と定義すると tt は tt -ノルムになる。

命題3 例(i), (ii)のそれぞれにおける tt と st の組は命題2の tt と st の関連を満たしている。ただし、 $N(x) = \frac{\lambda}{x}$ ととるものとする(例2参照)。

次に、ファジィ集合における t -ノルムと tt -ノルムの関係について述べよう。

命題4 ファジィ集合において定義される任意の t -ノルムを $t(y,z)$, t -コノルムを $s(y,z)$ とする。

また、 f をトール集合をファジィ集合に対応させる任意の写像とする。このとき、

$$tt(a,b) = f^{-1}(t(f(a), f(b)))$$

$$st(a,b) = f^{-1}(s(f(a), f(b)))$$

で定義される tt と st は、それぞれ tt -ノルム、 tt -コノルムになる。逆に、 $tt(a,b)$, $st(a,b)$ を任意の tt -ノルム、 tt -コノルムとすると、

$$t(y,z) = f(tt(f^{-1}(y), f^{-1}(z)))$$

$$s(y,z) = f(st(f^{-1}(y), f^{-1}(z)))$$

はファジィ集合における t -ノルムと t -コノルムになる。

注意：Dubois, Prade[1]では、トール集合の共通部分演算を $*$ で表わすとき、 $\min$, $*$ はそれぞれファジィ集合の $\max$, $\perp$ 演算に写されると述べている。ここで、 $*$ が tt -ノルムで表わされる演算とすれば、命題4によって、 $\perp$ は f と $tt(a,b)$ によって定義される t -ノルムに対応することがわかる。

5. トール集合の応用について

ここでは、Dubois, Prade[1]が述べていないトール集合の応用について概略を述べる。

5.1 トール集合による意思決定と凸性

トール集合の応用上の意義について考察するとき、トール集合は、コストや効用を直接的に表現することに着目しなければならない。このことから、トール集合は意思決定や最適化と深く関係していると考えられる。そこで、トール集合を意思決定に用いるとすれば、どのような有用性が認められるかが問題となる。ここでは、次の二点について考える。

- (A) トール集合はファジィ意思決定のもつ特徴や利点を共有しているか。
- (B) トール集合は従来の最適化理論を応用するのに適しているか。

以下では、これらの点について肯定的に答える。すなわち、(A)については、トール集合によってファジィ意思決定と類似の定式化ができること、

(B)については、ファジィ集合の場合とは違って、トール集合については凸解析の成果が応用可能であることを示す。ファジィ意思決定については、Bellman, Zadeh[6]が論じているように、制約と目標が共にファジィ集合で与えられ、それらの共通部分のグレードを最大化する解を求める問題が考察される。このことを念頭において、トール集合による意思決定を

Find x that optimizes

T_0 and T_1 and T_2 and ... and T_n

という言語表現をもつ問題として考えてみよう。ここで、 T_0 は言語的に表現され、トール集合で表される目標であり、 $T_1, T_2, \dots, T_n$ はやはり言語的に表現され、トール集合で表される制約であるとする。ANDが tt -ノルムで表されるものと仮定すると、上の言語表現は最適化問題

$$\min_{x \in X} tt(\psi_{T_0}(x), \psi_{T_1}(x), \dots, \psi_{T_n}(x))$$

で表される。ただし、 $tt(a, b, c, d, \dots, z)$ は、 tt が結合律を満たすことから、 $tt(a, b, c) = tt(tt(a, b), c)$ 、 $tt(a, b, c, d) = tt(tt(a, b, c), d), \dots$ と帰納的に定義される。以下では、特に、4. の(ii)で定義した

$$tt(\psi_{T_0}(x), \psi_{T_1}(x), \dots, \psi_{T_n}(x)) \\ = [\psi_{T_0}(x)^p + \psi_{T_1}(x)^p + \dots + \{\psi_{T_n}(x)^p\}]^{\frac{1}{p}}$$

を考察する。

一般に、非線形最適化において最も主要な理論体系は凸解析と呼ばれている[7]。凸解析における基本的仮定は、目的関数が凸関数であることであるが、最適化理論における凸関数の仮定はファジィ集合の凸性よりも強い条件である。一方、ユークリッド空間におけるファジィ集合では、グレードが $[0, 1]$ に制限されているため、凸関数となるファジィ集合はメンバーシップが一定の値しかとらないものに限られる(このことの証明は難しくはないがここでは省略する)。このことは、ファジィ集合を目的関数とみなして最適化を行なう場合、凸解析の理論が適用できないことを意味している。

これに対して、トール集合では、グレードが

$[0, +\infty]$ の値をとる、すなわち、グレードの値の制限がゆるいので、凸関数となるトール集合は決して例外的ではないと考えられる。また、このように仮定することによって、凸解析における様々な成果がトール集合に対して適用できる。

そこで、上の $\psi_{T_0}(x), \psi_{T_1}(x), \dots, \psi_{T_n}(x)$ がすべて凸関数と仮定しよう。このとき、次の命題が得られる。

命題5 $\psi_{T_0}(x), \psi_{T_1}(x), \dots, \psi_{T_n}(x)$ がすべて凸関数ならば、

$$h(x) = tt(\psi_{T_0}(x), \psi_{T_1}(x), \dots, \psi_{T_n}(x))$$

は x の凸関数になる。ただし、 $tt(a, b) = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$ である。

証明は付録に示す。

この結果の意義は、目標と制約が凸関数ならば、この tt -ノルムによって表現されるAND結合も凸関数となるということである。したがって、その最適化問題は、凸解析の諸結果を用いて解くことができる。

ここで、2. におけるトール集合の合併と共通部分に関して次のようにいうことができる。トール集合の興味ある点は、合併集合が基本的には一通り(すなわち $\min$)に定まるのに対して、共通部分は $\max$ 、和など様々な選択肢があり、一通りではない、ということであった。この点を考慮して、ここでは、和と $\max$ を含む(ii)の tt -ノルムを仮定した。

そこで、先に述べた言語表現による意思決定の問題を次のように一般化してみよう。

Find z that optimizes

T_{10} and T_{11} and ... and T_{1n}

or

T_{20} and T_{21} and ... and T_{2n}

or

.....

or

T_{m0} and T_{m1} and ... and T_{mn}

ここで、 $T_{10}, \dots, T_{m0}$ は m 個の目標であり、 $T_{k1}, \dots, T_{kn}$ は、目標 T_{k0} ($k=1, \dots, m$)に対

応する制約であるとする。これらの目標および制約は凸関数であるトール集合で $\psi_{Tij}(x)$ ($i=1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n$) と表されたとする。このとき、この言語的表現による意思決定問題は最適化問題として

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \min [h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)] \\ = \min_{x \in X, 1 \leq i \leq m} h_i(x) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} h_i(x) &= tt(\psi_{T_{i0}}(x), \psi_{T_{i1}}(x), \dots, \psi_{T_{in}}(x)) \\ &= [\psi_{T_{i0}}(x)^p + \psi_{T_{i1}}(x)^p + \dots + \psi_{T_{in}}(x)^p]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

したがって、この問題では各 $h_i(x)$ は凸関数となる。それぞれの $h_i(x)$ の最適解を求め、それらの最小値を選べば全体の最適化問題の解が得られる。このように、or が min で定義されるため、一般化された意思決定問題を解くことはそれ程困難ではない。

このように、意思決定問題におけるトール集合は、ファジィ集合と従来の最適化理論との間に位置付けられ、両者の特徴を活かすことができる定式化の方法であるといえよう。

5.2 トール関係とトールグラフ

トール関係は直積集合上のトール集合として定義できる。そこで、集合 X を有限集合として、 $X \times X$ 上のトール関係を $T(x, y)$, $x, y \in X$ とする。また、 T は

- (A) [反射的] $T(x, x) = 0, \forall x \in X$
- (B) [対称的] $T(x, y) = T(y, x), \forall x, y \in X$

の2つの性質を満たすものとする。

ファジィ関係の場合、有限集合上の反射的かつ対称的ファジィ関係はファジィグラフ(無向グラフ)として視覚的にみることができ、階層的クラスタリングにおいて本質的な役割を果す。ファジィグラフの場合、その各 α -カットが生成するクリスプグラフの連結成分は、これに対応するファジィ

ィ関係の推移包に一致し、従来のクラスタリングでは、最短距離法と呼ばれる方法と等価になっていることが示されている[8,9]。ところで、ファジィグラフを用いたクラスタリングでは、クラスタリングの基準となる類似度あるいは非類似度の値が $[0, 1]$ の間に限定あるいは正規化される。ところが、実際のクラスタリングでは、ユークリッド距離などのメトリックの形式をした非類似度(距離とも呼ぶ)を用いることが多く、その場合、距離を D とすると、 $D(x, y)$ が無限に大きくなる場合も生じてくる。距離の場合と正規化された類似度の場合では、個々の議論や手法の有効性などが変化する。ファジィグラフによる議論ですべての場合を尽くすことはできない。

このような場合、トール関係をグラフとして視覚化したトールグラフ(無向グラフ)が有用となる。トールグラフは先の条件をもつトール関係について、有限集合 X を頂点とし、 $T(x, y)$ を辺上のメンバーシップとして表したものである。特に、 $T(x, y) = +\infty$ の場合、これを辺としては表さない。

図1はトールグラフの例であるが、このグラフでは、 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ であり、 $T(x_1, x_2) = 1$, $T(x_1, x_3) = 2$, $T(x_2, x_3) = 3$ である。反射性による $T(x_i, x_i) = 0$ の形の辺はグラフから省略されている。また、グラフに示されていない辺はメンバーシップが無限大、すなわち、 $T(x_i, x_4) = +\infty$, $i=1, 2, 3$ である。

図1 トールグラフの例

トールグラフの各 α -カットは $\alpha \in [0, +\infty)$ について定義される。各 α -カットによる生じるクリスプグラフの連結成分はトール関係による min-max 推移包による同値関係に一致すること (ファジィ関係の合成における min と max をそれぞれ max と min に置き換える必要がある)、距離を用いた場合の最短距離法と等価であることなどは容易に推測できる。この議論は、[8]における証明と並行して行なえばよいが、ここでは省略する。

個々のクラスタリングの方法について考察すれば、トールグラフの場合とファジィグラフの場合で本質的に異なる部分が現われてくる。たとえば、群内距離法と呼ばれる方法[10]はファジィグラフを基準とした議論では全く有用でないが、トールグラフを基準とした場合は有用となる可能性がある。なぜなら、ファジィグラフの場合、[11]に示されているように、群内平均法は全然関連のない2つの個体を同一のクラスに入れるという問題点をひき起こすが、この問題点はトールグラフの場合には生じないからである。このことは簡単な計算によって示すことができるがここでは省略する。

6. 結論

トール集合は、数学的な側面では、ファジィ集合と 1 対 1 に写されるという特徴をもつ。また一方、そのメンバーシップの意味がコストによって解釈されるという側面ももっている。

ここでは、まず第一の側面に注目し、トール集合とファジィ集合との関係を明らかにするため、トール集合上の t -ノルムとコノルムを考えた。 t -ノルムとコノルムの双対性を調べるには、二重否定の法則を満たす補集合の定義が必要であるため、生成関数の利用や、 $N(x) = \frac{\lambda}{x}$ の形の補集合を提案した。このことによって、トール集合上の t -ノルムとコノルムの関係が明らかとなり、かつ、ファジィ集合上の t -ノルム、コノルムとトール集合上のそれらとの関連も示された。

トール集合とファジィ集合との関連については、グレードが単調関数により 1-1 に変換されるため、

α -カットに関しては対応は自明である。したがって、ある応用問題を定式化するとき、ファジィ集合とトール集合との間でかなり自由な変換ができるよう。

ここでは、Dubois, Prade らが述べていないトール集合の応用例について考察した。一つの応用として、トール集合の解釈がコストに基づくという第二の側面に注目し、トール集合による意思決定の言語表現と、これに対応する最適化問題を提示した。凸関数のトール集合と t -ノルムを用いれば、評価関数が凸関数になることを明らかにし、最適化問題が比較的解きやすいことを示した。この定式化では t -ノルムは有用であるが、or に対応する min を一般化して t -コノルムを用いる必然性は特に認められない。意思決定に限らず、様々な応用例においてトール集合の t -コノルムがどのような場合に有用になるかについてさらに考察を進める必要があろう。

さらに、トールグラフによる階層的クラスタリングの理論の可能性について言及した。この応用例では、トール関係はコストを表わすのではなく、距離の概念を表わしている。ここでは、トール集合のメンバーシップがつねにコストで解釈されるとは限らないことが例示されている。

このように、意思決定や最適化問題については、トール集合とそれらのつながりは、ファジィ集合以上に密接であるということが出来る。したがって、ファジィ集合によって定式化された意思決定問題のかなりな部分がトール集合による定式化に置き換えられる可能性がある。このとき、トール集合は直接コスト関数と解釈される一方で、ファジィ集合の利点である言語表現や論理演算を許容する点に注目しなければならない。

また、クラスタリングについていえば、トール関係やトールグラフは、距離にもとづくクラスタリングと整合性が良い。また、5. の最後で言及したように、ファジィグラフを用いた場合との違いについてさらに考察を深める必要があろう。

応用に関していえば、ここで示した例は導入部分に過ぎない。しかしながら、ここで述べたこと

だけでも、トール集合がいかに単純かつ、応用上
有用な概念であるかを示していると思われる。

参 考 文 献

1. D.Dubois, H.Prade, Toll sets, IFSA'91 Brussels, Artificial Intelligence, pp.21-24, 1991.
2. 中島信之, ファジィ集合演算, 日本ファジィ学会誌, 3, 1, pp.35-40, 1991.
3. G. Takeuchi and S. Titani, Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory, Journal of Symbolic Logic, 49, 3, pp.851-866, 1984.
4. 田中英夫, ファジィモデリングとその応用, 朝倉書店, 1990
5. 市橋秀友, T-ノルムと T-コノルム, 用語解説, 日本ファジィ学会誌, 3, 2, p.140, 1991
6. R. E. Bellman and L. A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, Management Sci., 17, pp.B-141-B-164, 1970.
7. 今野, 山下, 非線形計画法, 日科技連, 1978.
8. 宮本, 階層的クラスター分析の方法-III, システム/制御/情報, 33, 12, pp.635-643, 1989.
9. S. Miyamoto, Fuzzy Sets in Information Retrieval and Cluster Analysis, Kluwer Academic Publishers, 1990.
10. 宮本, 階層的クラスター分析の方法-II, システム/制御/情報, 33, 10, pp.533-541, 1989.
11. 宮本, 階層的クラスター分析の方法-IV, システム/制御/情報, 34, 4, pp.106-111, 1990.
12. L.A.Lusternik, V.J.Sobolev, Elements of Functional Analysis, Hindustan Publishing, 1961.

付録 1

[2. における例 2 の関数が (Na)-(Nd) を満たす
ことの証明]

(Na) f, f^{-1} とともに狭義単調減少となることから明らかである。

(Nb) :

$$\begin{aligned} N(N(x)) &= f^{-1}(1-f(N(x))) \\ &= f^{-1}(1-f(f^{-1}(1-f(x)))) \\ &= f^{-1}(f(x)) = x \end{aligned}$$

$$(Nc) : N(0) = f^{-1}(1-f(0)) = f^{-1}(0) = +\infty$$

(Nd) :

$$N(+\infty) = f^{-1}(1-f(+\infty)) = f^{-1}(1) = 0$$

(証明終)

付録2[命題1 の証明]

(tt1)-(tt4) を確かめればよい。

(tt1) : g^{-1} が単調増加であることに注意する。

$a \leq c, b \leq d$ ならば, $g(a) + g(b) \leq g(c) + g(d)$
だから

$$\begin{aligned} t(a, b) &\leq g^{-1}(g(a) + g(b)) \leq g^{-1}(g(c) + g(d)) \\ &= t(c, d) \end{aligned}$$

(tt2) : $t(a, b) = t(b, a)$ は明らか

(tt3) :

$$\begin{aligned} t(a, t(b, c)) &= g^{-1}(g(a) + g(g^{-1}(g(b) \\ &\quad + g(c)))) \\ &= g^{-1}(g(a) + g(b) + g(c)) \\ &= g^{-1}(g(g^{-1}(g(a) + g(b))) + g(c)) \\ &= t(t(a, b), c) \end{aligned}$$

(tt4) :

$$\begin{aligned} t(+\infty, +\infty) &= g^{-1}(g(+\infty) + g(+\infty)) \\ &= g^{-1}(+\infty) = +\infty \\ t(0, a) &= t(a, 0) = g^{-1}(g(a) + g(0)) \\ &= g^{-1}(g(a)) = a \end{aligned}$$

(証明終)

付録3[(ii) の $tt(a, b)$ が (2) を満たすことの証明]

一般性を失わず $b \geq a \geq 0$ と仮定し、 $c = \frac{b}{a}$ とおく。 $tt(a, b) = a(1+c^p)^{\frac{1}{p}}$ であり、かつ、先に示したように、 $p=1$ のとき、 $tt(a, b) = a+b$, $p \rightarrow +\infty$ のとき、 $tt(a, b) \rightarrow \max[a, b]$ である。そこで、 $h(p) = (1+c^p)^{\frac{1}{p}}$ とおき、 $h(p)$ が p について単調減少であることをいえばよい。このためには、その導関数 $h'(p)$ が $h'(p) < 0$ を満たすことを示せばよい。 $h(p)^p = (1+c^p)$ の両辺を p で微分すれば、

$$ph^{p-1}h'(p) = c^p \log c - h^p \log h$$

を得る。 $h > c$ より、上式の右辺が負となる。また、 $ph^{p-1} > 0$ は明らかであるから $h'(p) < 0$ となる。

(証明終)

付録4 [命題2 の証明]

$tt(a, b)$ を任意の tt -ノルムと仮定し、(5) で定義される $st(a, b)$ が tt -コノルムの条件を満たすことを順次確かめればよい。

(tt1) : N が単調減少であるから $a \leq c, b \leq d$ に対し $N(a) \geq N(c), N(b) \geq N(d)$ 。したがって

$$tt(N(a), N(b)) \geq tt(N(c), N(d))$$

この式の両辺に N を作用させると、不等号が逆向きとなる。

(tt2) : 交換律は明らか

(tt3) : [結合律]

$$\begin{aligned} st(a, st(b, c)) &= N(tt(N(a), N(N(tt(N(b), N(c))))) \\ &= N(tt(N(a), tt(N(b), N(c)))) \\ &= N(tt(tt(N(a), tt(N(b)), N(c))) \\ &= N(tt(N(N(tt(N(a), tt(N(b)))), N(c))) \\ &= st(st(a, b), c) \end{aligned}$$

(tt5) :

$$\begin{aligned} st(0, 0) &= N(tt(N(0), N(0))) \\ &= N(tt(+\infty, +\infty)) \\ &= N(+\infty) = 0 \\ st(a, +\infty) &= N(tt(N(a), N(+\infty))) \\ &= N(tt(N(a), 0)) = N(N(a)) = a \end{aligned}$$

命題の後半も同様に証明できるので省略する。

(証明終)

付録5 [命題3 の証明]

$tt(a, b) = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$ とし、

$st(a, b) = N(tt(N(a), N(b)))$ 、ただし、 $N(x) = \frac{\lambda}{x}$ とおくと、

$$\begin{aligned} st(a, b) &= \lambda [\{ (\lambda a^{-1})^p + (\lambda b^{-1})^p \}^{-1} \\ &= (a^{-p} + b^{-p})^{-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

命題の後半も同様であるので省略する。

(証明終)

付録6 [命題4 の証明]

ファジィ集合における t -ノルムを $t(y, z)$ 、コノルムを $s(y, z)$ として、 $tt(a, b) = f^{-1}(t(f(a), f(b)))$ が tt -ノルムの条件を満たすことを示そう。

(tt1) : $a \leq c, b \leq d$ とすると、 $f(a) \geq f(c), f(b) \geq f(d)$ 。よって、 t -ノルムの単調性より、

$$t(f(a), f(b)) \geq t(f(c), f(d))$$

写像 f^{-1} は単調減少だから、

$$f^{-1}(t(f(a), f(b))) \leq f^{-1}(t(f(c), f(d)))$$

(tt2) : 明らか

(tt3) :

$$\begin{aligned} tt(a, tt(b, c)) &= f^{-1}(t(f(a), f(f^{-1}(t(f(b), f(c))))) \\ &= f^{-1}(t(f(a), t(f(b), f(c)))) \\ &= f^{-1}(t(t(f(a), f(b)), f(c))) \\ &= f^{-1}(t(f(f^{-1}(t(f(a), f(b)))), f(c))) \\ &= tt(tt(a, b), c) \end{aligned}$$

(tt4) : $f(+\infty) = 0$ と $t(0, 0) = 0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} tt(+\infty, +\infty) &= f^{-1}(t(f(+\infty), f(+\infty))) \\ &= f^{-1}(t(0, 0)) = f^{-1}(0) = +\infty \\ tt(a, 0) &= f^{-1}(t(f(a), f(0))) \\ &= f^{-1}(t(f(a), 1)) = f^{-1}(f(a)) = a \end{aligned}$$

他の部分も同様であるので省略する。

(証明終)

付録7 [命題5 の証明]

$g_1(x), \dots, g_n(x)$ が正値凸関数であるとき、

$$tt(g_1(x), \dots, g_n(x)) = \left[\sum_{i=1}^n g_i(x)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

が x の凸関数となることを示そう。まず、Minkowski の不等式[12]

$$\left[\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

に注意する。そこで、 $0 \leq \lambda \leq 1$ として $y = (1 - \lambda)x + \lambda x'$ とおくと、 $g_i(x), i = 1, \dots, n$ が凸であるから、

$$tt(g_1(y), \dots, g_n(y))$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^n (1-\lambda) g_i(x) + \lambda g_i(x')^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \lambda tt(g_1(x'), \dots, g_n(x'))$$

(証明終)

この式の右辺に Minkowski の不等式を用いると、

$$tt(g_1(y), \dots, g_n(y))$$

(1993年 5 月 1 日 受付)

(1993年 9 月 10 日 再受付)

$$\leq \left[\sum_{i=1}^n (1-\lambda) g_i(x)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^n \lambda g_i(x')^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= (1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^n g_i(x)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \lambda \left[\sum_{i=1}^n g_i(x')^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= (1-\lambda) tt(g_1(x), \dots, g_n(x))$$

[問い合わせ先]

〒770 徳島市南常三島町2-1

徳島大学工学部知能情報工学科

宮本 定明

☎: 0886-23-2311(内)4722

FAX: 0886-54-9632

著 者 紹 介

宮本 定明 (みやもと さだあき)

徳島大学工学部知能情報工学科

昭和53年 3 月 京都大学工学研究科博士課程(数理工学専攻)修了。同年 5 月 筑波大学技官、昭和56年 筑波大学講師(電子・情報工学系)、昭和62年 同助教授。平成 2 年、徳島大学工学部教授となり、現在に至る。ファジィ理論の情報検索への応用、クラスター分析、構造モデリング、遺伝アルゴリズムなどの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会、システム制御情報学会、日本ファジィ学会、情報処理学会、日本応用数理学会等の会員。