ワンポイント講座

有限要素法[†]

市橋 秀友^{*1} 古田 均^{*2}

解析対象領域をメッシュ状に分割したときの、一つの小領域を有限要素(finite element)と呼ぶ。対象領域をすきまも重なりもなく有限要素群で埋めつくされたものを、有限要素分割(finite element partition)という。各有限要素上で一変数の関数 ϕ を1次関数で近似とする。隣接有限要素間で値が連続(C^0 連続)な折線近似は、区分的1次近似(piecewise linear approximation)と呼ばれる。三角形有限要素分割に対する区分的1次近似には、図1の折屋根型の近似関数が用いられる。領域がファジィ集合によって分割されたファジィパーティション(fuzzy partition)がファジィ制御の分野ではよく知られている。マムダニや菅野のファジィ推論法もなんらかの非線形関数近似法である点でよく似ている。

図1 三角形有限要素分割と区分的一次近似

図2に示す節点 I, J, K で構成される三角形有限要素 Ω^e 上で、 x および y に関して1次の近似関数は、図3の基底関数 B_I, B_J, B_K を用いて次のように書ける。

図2 三角形有限要素 Ω^e

図3 基底関数 $B_L (L=I, J, K)$

[†] Finite Element Method

Hidetomo ICHIHASHI and Hitoshi FURUTA

^{*1} 大阪府立大学 工学部経営工学科

Department of Industrial Engineering, University of Osaka Prefecture

^{*2} 京都大学 工学部土木工学科

Department of Civil Engineering, Kyoto University

$$\phi^h(x, y) = \phi_I B_I(x, y) + \phi_J B_J(x, y) + \phi_K B_K(x, y)$$

ただし、節点 L の座標を x_L, y_L とし、 $\phi_L = \phi^h(x_L, y_L)$ 、 $B_L(x_M, y_M) = \delta_{LM}$ 、($L, M = I, J, K$) である。

δ_{LM} はクロネッカーのデルタ記号で、 $L = M$ のとき 1 でそうでないときは、値 0 をとる。

B_I, B_J, B_K を行列式で表示すれば、

$$B_I = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_I & x_K \\ y & y_I & y_K \end{vmatrix}$$

$$B_J = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_I & x & x_K \\ y_I & y & y_K \end{vmatrix}$$

$$B_K = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_I & x_J & x \\ y_I & y_J & y \end{vmatrix}$$

ただし、 A は三角形 Ω^e の面積で

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_I & x_J & x_K \\ y_I & y_J & y_K \end{vmatrix}$$

である。 $\phi^h(x, y)$ は Ω^e の上に置かれた三角形の屋根瓦であり、瓦をつなぎ合わせていろいろな形状の屋根を造ることができる(図 1 参照)。与えられた偏微分方程式の解を、瓦葺きの屋根で近似するのが有限要素法である。

対象領域 Ω 内で、次の偏微分方程式に支配される物理量(ポテンシャル) ϕ を考える。

$$-\nabla^2 \phi = f(x, y) \quad (\Omega \text{ 内}) \quad (1)$$

ただし、 f は Ω 内で与えられた既知関数である。また、 ∇^2 は 2 次元のラプラス作用素であって、

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

である。領域 Ω の境界 Γ は、2 つの部分境界 Γ_D と Γ_N に分けられるものとする。境界 Γ_D 上では斉次ディリクレ条件

$$\phi = 0 \quad (\Gamma_D \text{ 上}) \quad (2)$$

を満たし、かつ境界 Γ_N 上では斉次ノイマン条件

$$n \cdot \nabla \phi = 0 \quad (\Gamma_N \text{ 上}) \quad (3)$$

を満たす解 ϕ の近似関数 ϕ^h を見出すことが目的

である。ただし、 n は境界 Γ_N 上における外向き単位法線ベクトルであり、 ∇ は次式の勾配 (gradient) とする。

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

また、 $\cdot$ はベクトルの内積を示す。

$$n \cdot \nabla \phi = n_1 (\partial \phi / \partial x) + n_2 (\partial \phi / \partial y)$$

はポテンシャル ϕ の Γ_N 上の外向き法線方向の導関数である。境界条件 (2), (3) のもとに式 (1) を満たす解 ϕ は一意に存在することが知られている。また、変分原理 (variational principle) から、そのような解 ϕ は、式 (2) のみの境界条件のもとで、次式の汎関数 (functional) $J[\phi]$ を最小化するものであることも知られている。 J のような関数 (ϕ) の関数を汎関数という。

$$J[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\Omega - \int_{\Omega} f \phi d\Omega$$

ただし、 $\int_{\Omega} d\Omega$ は領域 Ω での積分 (体積) を表す。偏微分方程式の境界値問題を等価な汎関数の最小化問題にする方法は、変分法 (variational method) と呼ばれる。

節点 I, J, K で構成される三角形有限要素 Ω^e 上で、(1) 式の区分的 1 次関数を仮定する。領域積分の加法性 (関数 $\nabla \phi \cdot \nabla \phi$ の積分はその体積であり、 Ω 上の体積は有限要素 Ω^e 上の体積を足し合わせたものである) により、近似後の汎関数 $J[\phi^h]$ は、各有限要素 Ω^e ごとの汎関数 $J^e[\phi^h]$ の総和である。したがって、

$$J[\phi^h] = \sum_e J^e[\phi^h]$$

ただし、要素汎関数 $J^e[\phi^h]$ は

$$J^e[\phi^h] = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \nabla \phi^h \cdot \nabla \phi^h d\Omega - \int_{\Omega^e} f \phi^h d\Omega \quad (4)$$

である。

区分的 1 次近似における未知数は、すべての三角形の頂点における関数値 ϕ_i である。ただし、境界 Γ_D 上では基本境界条件 (2) が指定されているので、 $\phi^h = 0$ とすれば、 Γ_D 上の節点に対する ϕ_i は既

知(=0)である。したがって、 Γ_D 上にない節点に対する未知数 ϕ_i に関して、式(4)の汎関数 $J[\phi^h]$ を最小化すればよい。この最小化は、

$$\frac{\partial J[\phi^h]}{\partial \phi_i} = 0$$

とおけばよい、すなわち

$$\sum_e \frac{\partial J^e[\phi^h]}{\partial \phi_i} = 0 \quad (5)$$

であり、これを(Γ_D 上以外の) ϕ_i に関して解くことで区分的1次の近似関数を一意に定めることができる。まず、関数 B_I , B_J , B_K の微分値に関して、次の定数を定める。

$$\begin{aligned} b_I &= 2A \frac{\partial B_I}{\partial x} = y_J - y_K, & c_I &= 2A \frac{\partial B_I}{\partial y} = x_K - x_J \\ b_J &= 2A \frac{\partial B_J}{\partial x} = y_K - y_I, & c_J &= 2A \frac{\partial B_J}{\partial y} = x_I - x_K \\ b_K &= 2A \frac{\partial B_K}{\partial x} = y_I - y_J, & c_K &= 2A \frac{\partial B_K}{\partial y} = x_J - x_I \end{aligned}$$

このとき、関係

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^h}{\partial x} &= \frac{b_I \phi_I + b_J \phi_J + b_K \phi_K}{2A} \\ \frac{\partial \phi^h}{\partial y} &= \frac{c_I \phi_I + c_J \phi_J + c_K \phi_K}{2A} \end{aligned}$$

が成立している。これらは、線形関数 B_I , B_J , B_K の微分の加重和であるので定数であり、

$$\nabla \phi^h \cdot \nabla \phi^h = \left[\frac{\partial \phi^h}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \phi^h}{\partial y} \right]^2$$

も有限要素 Ω^e 内では一定値である。したがって、積分(体積)はその値を面積(A)倍すればよく、節点 I, J, K で構成される三角形有限要素 Ω^e に対して要素汎関数は

$$\begin{aligned} J^e[\phi^h] &= \frac{1}{2} (\phi_I^2 k_{II}^e + \phi_J^2 k_{JJ}^e + \phi_K^2 k_{KK}^e) \\ &\quad + \phi_I \phi_J k_{IJ}^e + \phi_J \phi_K k_{JK}^e + \phi_K \phi_I k_{KI}^e \\ &\quad - \phi_I f_I^e - \phi_J f_J^e - \phi_K f_K^e \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ただし、定数 k_{LM}^e および f_L^e はそれぞれ

$$\begin{aligned} k_{LM}^e &= \frac{b_L b_M + c_L c_M}{4A}, & L, M &= I, J, K \\ f_L^e &= \int_{\Omega^e} f B_L d\Omega, & L &= I, J, K \end{aligned}$$

である。式(6)の要素汎関数を ϕ_I , ϕ_J , ϕ_K に関して偏微分すると、次のような要素レベルの有限要素マトリックス関係を得る。

$$\begin{bmatrix} E_I^e \\ E_J^e \\ E_K^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{II}^e & k_{IJ}^e & k_{KI}^e \\ k_{IJ}^e & k_{JJ}^e & k_{JK}^e \\ k_{KI}^e & k_{JK}^e & k_{KK}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_J \\ \phi_K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_I^e \\ f_J^e \\ f_K^e \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし、

$$E_L^e = \frac{\partial J^e[\phi^h]}{\partial \phi_L}, \quad L = I, J, K$$

である。式(7)の3行3列の対称マトリックスは、要素係数マトリックス(elemental coefficient matrix)と呼ばれる。対象領域全体では、添字 i, j で境界 Γ_D 上の節点を除いたすべての節点をさし示すことにすると、

$$\{E_i^e\} = [k_{ij}^e] \{\phi_i\} - \{f_i^e\} \quad (8)$$

と表される。ただし、 $\{*\}$ はベクトルを、 $[*]$ はマトリックスを意味する。 $[k_{ij}^e]$, $\{f_i^e\}$ および $\{E_i^e\}$ を具体的に書くと

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} I & J & K \end{matrix} \\ \begin{matrix} I \\ J \\ K \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_{II}^e & -k_{IJ}^e & -k_{KI}^e \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{IJ}^e & -k_{JJ}^e & -k_{JK}^e \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{KI}^e & -k_{JK}^e & -k_{KK}^e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_J \\ \phi_K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_I^e \\ f_J^e \\ f_K^e \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$[k_{ij}^e] \quad \{\phi_i\} \quad \{f_i^e\}$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ E_I^e \\ 0 \\ E_J^e \\ 0 \\ E_K^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{E_i^e\}$$

である。すべての有限要素に関して、式(8)を加え合わせると、次のようになる。

$$\left\{ \sum_e E_i^e \right\} = [k_{ij}] \{\phi_i\} - \{f_i\}$$

$$k_{ij} = \sum_e k_{ij}^e, \quad f_i = \sum_e f_i^e$$

汎関数の最小化条件式(5)を書きかえると,

$$\sum_e E_i^e = 0$$

であり, 最終有限要素マトリックス関係は

$$[k_{ij}]\{\phi_i\} = \{f_i\}$$

となる. この連立1次方程式を, 有限要素方程式と呼ぶ. 正方マトリックス $[k_{ij}]$ は, 特に全体係数マトリックス(overall coefficient matrix)と呼ばれる. $[k_{ij}]$ は, 多くの0成分を含むのでそのことを有効に活用した連立方程式の解法プログラムが

開発されている.

以上, 文献[1]の2章~3章に倣って変分法による定式化について述べたが, 近似関数にスプライン関数や円形基底関数などの高次関数を用いると, それを式(1)に直接代入して, 適当に選ばれたデータ点(選点)における式(1)の両辺の誤差が最小になるようにパラメータの値を求めることもできる. このような方法は重み付き残差法と呼ばれる.

参 考 文 献

- [1] 菊地, 岡部: 有限要素システム入門, 日科技連, 1986