論文

角型構造の大規模多目的線形計画問題に 対する対話型ファジィ満足化手法[†]

澤田 一哉^{*1} 坂和 正敏^{*2}

本論文では、角型構造の大規模多目的線形計画問題に焦点をあて、各目的関数に対する意思決定者のファジィ目標を考慮した意思決定者の満足解を対話的に導くための対話型ファジィ満足化手法を提案する。提案する手法では、意思決定者との対話により、意思決定者のファジィ目標を線形のメンバシップ関数で規定した後、メンバシップ関数空間において、意思決定者の設定する基準点にある意味において最も近いパレート解を Dantzig-Wolfe の分解原理の適用により求め、もし満足できなければ対話的に基準点を更新することにより、最終的にパレート最適性の保証された意思決定者の満足解を効率よく導出することが可能となる。

キーワード：角型構造の大規模多目的線形計画法、ファジィ目標、パレート最適解、対話型ファジィ満足化手法

1. はじめに

1960 年代初めの Dantzig-Wolfe[3]の、角型構造の大規模線形計画問題に対する分解原理の提案を契機として、一目的のみならず多目的をも考慮した、角型構造の大規模数理計画問題に対する数多くの研究が活発に行われるようになってきている[5-7,13,14,16,19]。

しかし、一目的あるいは多目的の線形計画問題に対するファジィ目標やファジィ制約を取り入れた Zimmermann[20,21]のアプローチと同様に、人間の判断のあいまい性を考慮すれば、意思決定者は、一目的あるいは多目的の角型構造の大規模線形計画問題として定式化された問題の目的関数や結合制約式に対して、ファジィ目標やファジィ制約をもつものと考えの方が、より適切であると思われる。このような観点から、坂和らは、まず単一目的の角型構造の大規模線形計画問題を取り

上げ、線形のメンバシップ関数で規定した意思決定者のファジィ目標とファジィ制約を Bellman と Zadeh の凸ファジィ決定[1]で統合すれば、ある適切な条件のもとで、意思決定者の満足解は独立な小規模の線形計画問題を解くことにより得られることを示した[11]。しかも、その条件が満たされない場合にも、Dantzig-Wolfe の分解原理[3,7]が適用できることを明らかにした。

さらに、坂和らは、複数個の相競合する目的関数を同時に考慮した多目的の角型構造の大規模線形計画問題に焦点をあて、各目的関数に対する意思決定者のファジィ目標を線形のメンバシップ関数で規定した後、Bellman と Zadeh[1]のファジィ決定に基づいて変換した問題に Dantzig-Wolfe の分解原理[3,7]を適用して、パレート最適性の保証された意思決定者の満足解を導くことを提案した[12]。

しかし、Bellman と Zadeh のファジィ決定[1]は、複数個のメンバシップ関数の統合法のある 1 つの特別な場合であり、一般の状況においては、必ずしも満足できる統合法であるとはいいがたい。このように、従来のファジィ数理計画法で暗黙の中にファジィ決定が意思決定者の選好を適切に表現するものと仮定されて、それに基づく解を求め

[†] An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Large-Scale Multiobjective Linear Programming Problems with Block Angular Structure
Kazuya SAWADA and Masatoshi SAKAWA

^{*1} 松下電工㈱インフォメーションシステムセンター
Information System Center, Matsushita Electric Works, Ltd.

^{*2} 広島大学工学部第二類（電気系）
Faculty of Engineering, Hiroshima University

るだけでは不十分であるといえよう。もちろん、もし意思決定者の選好を適切に表す統合関数の関数形を大域的に固定することができれば、後は単に通常の線形計画問題を解くことに帰着され、話は簡単である。しかし一般には意思決定者のこのような統合関数の関数形を大域的に固定することは非常に困難な作業であると思われる。したがってこのような場合には、意思決定者の陰に存在する統合関数を大域的に陽に同定することなく、意思決定者との対話により、局所的な選好情報を引き出し、最終的に意思決定者が満足できる解、すなわち満足解を求めるという対話型手法が望ましい[2,8-10,15]。

このような観点から本論文では、角型構造の大規模多目的線形計画問題に焦点をあて、各目的関数に対する意思決定者のファジィ目標を線形のメンバシップ関数で規定した後、メンバシップ関数空間において、意思決定者の設定する基準点にミニマックスの意味で近いパレート解を求めるためのミニマックス問題を導入する。さらに、ミニマックス問題に Dantzig-Wolfe の分解原理を適用して、得られたパレート最適解に、意思決定者が満足できなければ対話的に基準点を更新することにより、最終的にパレート最適性の保証された意思決定者の満足解を求めるという対話型手法を提案する。

2. 角型構造の大規模多目的線形計画問題

本論文では、次のような角型特殊構造の大規模多目的線形計画問題を考える。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize } \mathbf{c}_1 \mathbf{x} = & c_{11}x_1 + \cdots + c_{1p}x_p \\ \text{minimize } \mathbf{c}_2 \mathbf{x} = & c_{21}x_1 + \cdots + c_{2p}x_p \\ & \vdots \\ \text{minimize } \mathbf{c}_k \mathbf{x} = & c_{k1}x_1 + \cdots + c_{kp}x_p \\ \text{subject to } \mathbf{A} \mathbf{x} = & \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1 \\ & \vdots \\ & \mathbf{B}_p \mathbf{x}_p \leq \mathbf{b}_p \\ & x_i \geq 0, \quad i=1, \dots, p \end{array} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{c}_{ji}$ ($j=1, \dots, k; i=1, \dots, p$) は r_i 次元係

数行ベクトル、 $\mathbf{x}_i$ ($i=1, \dots, p$) は r_i 次元列ベクトルの決定変数である。制約式 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p \leq \mathbf{b}$ は s 次元ベクトルからなる結合制約で、 $\mathbf{A}_i$ は $s \times r_i$ の係数行列である。さらに、 $\mathbf{B}_i \mathbf{x}_i \leq \mathbf{b}_i$ ($i=1, \dots, p$) は $\mathbf{x}_i$ に対する t_i 次元ベクトルからなる制約式で、 $\mathbf{B}_i$ は $t_i \times r_i$ の係数行列である。なお、以下では表記の簡略化のため、(1) 式の制約領域を X と書き表すことにする。

このような構造の問題はブロック角型構造をもつと言われ、現実の大規模な多変数の多目的線形計画問題にしばしば現れる。例えば、いくつかの事業部をもつ製造会社の利潤のみならず環境汚染などをも考慮した生産計画の問題を多目的線形計画問題として定式化すれば、このような構造になるであろう。というのは、製造会社の各事業部ごとに、それぞれ独自の利用可能な資源の最大量が与えられており、これらの各事業部は、さらに、会社全体としての利用可能な最大量に制限のある共通の資源をわけあって利用しなければならないという制約によって結ばれ、これらの制約のもとで全体の利益を最大にし、汚染物の排出量を最小にするなどの複数の目的が存在しているような状況が多目的線形計画問題としての定式化に反映されるからである。

ここで、一般に、与えられた制約条件の下で、複数個の相競合する目的関数を同時に最適化するという多目的線形計画問題においては、すべての目的関数を同時に最適にする完全最適解は存在しないので、ある目的関数の値を改善するためには少なくとも他の1つの目的関数の値を改悪せざるを得ない解、すなわち、パレート最適解の概念が導入されてきている[2,8-10,16]。

定義1 $\mathbf{x}^* \in X$ に対して、 $\mathbf{c}_i \mathbf{x} \leq \mathbf{c}_i \mathbf{x}^*$, $i=1, \dots, k$ で、しかも、ある j について $\mathbf{c}_j \mathbf{x} < \mathbf{c}_j \mathbf{x}^*$ となるような $\mathbf{x} \in X$ が存在しないとき、 $\mathbf{x}^*$ をパレート最適解という。

また、パレート最適解より若干弱い解の概念として次の弱パレート最適解が定義されている。

定義2 $\mathbf{x}^* \in X$ に対して、 $\mathbf{c}_i \mathbf{x} < \mathbf{c}_i \mathbf{x}^*$, $i=1, \dots, k$ となるような $\mathbf{x} \in X$ が存在しないとき、 $\mathbf{x}^*$ を弱パ

レート最適解という。

ここで、定義からもわかるように、パレート最適解は、一般に、弱パレート最適解の部分集合ではあるが、無限個存在するので、現実の意思決定においては、人間としての意思決定者が、自己の選好に基づいて、パレート最適解の集合の中から最終的な合理的な解を選択しなければならないことに注意しよう。

さらに、以下の準備として、(1)式で与えられる大規模多目的線形計画問題の特別な場合として、 $k=1$ の一目的の場合に対する Dantzig-Wolfe の分解原理[3]について概観しておこう。

いま便宜上、そのときの目的関数を $c_i x$ の代わりに cx と書き表し、各ブロック制約式を満たす凸多面体 $K_i = \{x_i | B_i x_i \leq b_i, x_i \geq 0\}$ の端点を $\{v_i^1, \dots, v_i^{l_i}\}$ とおけば、凸多面体の分解定理により凸多面体 K_i の任意の点 $x_i \in K_i$ すなわち、ブロック制約式および非負条件を満たす任意の x_i は $x_i = \sum_{j=1}^{l_i} \lambda_i^j v_i^j$; $\sum_{j=1}^{l_i} \lambda_i^j = 1$, $\lambda_i^j \geq 0$ のように v_i^j の凸結合で表すことができる(有界でない場合にも端点と端線を用いて同様に扱える)。このことより、 $P_i^j = A_i v_i^j$, $j=1, \dots, l_i$; $f_i^j = c_i v_i^j$, $i=1, \dots, p$ とおけば、もとの問題は等価的に λ_i^j を変数とする線形計画問題(主問題とよばれる)に変換できる。

$$\left. \begin{aligned} \text{minimize } z &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{l_i} f_i^j \lambda_i^j \\ \text{subject to } \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{l_i} P_i^j \lambda_i^j &\leq b_0 \\ \sum_{j=1}^{l_i} \lambda_i^j &= 1, i=1, \dots, p \\ \lambda_i^j &\geq 0, i=1, \dots, p; j=1, \dots, l_i \end{aligned} \right\} (2)$$

ここで、もとの問題を形式的にこのような主問題に変換すれば、制約式の数 $s + \sum_{i=1}^p l_i$ から $s + p$ に減少するが、変数の数は $\sum_{i=1}^p r_i$ から $\sum_{i=1}^p l_i$ へと増加してしまう。しかし、Dantzig-Wolfe の分解原理の計算手順では、すべての v_i^j, f_i^j, P_i^j を求めて、主問題を完全な形で再現させることなく、行数に等しい数の列を出発基底として、以後では、主問題の実行可能基底解に対するシンプレックス乗数 π_0 によって修正された目的関数をもつ p 個の独立

な部分問題

$$\left. \begin{aligned} \text{minimize } (c_i - \pi_0 A_i) x_i \\ \text{subject to } B_i x_i &\leq b_i \\ x_i &\geq 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

の最適解 $x_i(\pi_0)$ と対応する目的関数値 $z_i^0(\pi_0)$ を求め、 $z_i^0(\pi_0) - \bar{\pi}_i$ を主問題に送り、最適性の判定条件 $\min_i (z_i^0(\pi_0) - \bar{\pi}_i) \geq 0$ を満たさなければ、現在基底に入っている列を P_i^j とし、 P_i^* , $i=1, \dots, p$ を部分問題の最適解から生成される列とし、次の線形計画問題を解き、新しいシンプレックス乗数 $(\pi_0, \bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_p)$ を求めて、部分問題の目的関数を修正するという、いわゆる 2 レベルの最適化手法で、角型構造の大規模線形計画問題に対して、理論的にも興味深く、しかも有効な手法とみなされている。

$$\left. \begin{aligned} \text{minimize } z &= \sum_{i=1}^p \sum_{j \in \text{基底}} f_i^j \lambda_i^j + \sum_{i=1}^p f_i^* \lambda_i^* \\ \text{subject to } \sum_{i=1}^p \sum_{j \in \text{基底}} P_i^j \lambda_i^j &+ \sum_{i=1}^p P_i^* \lambda_i^* \leq b_0 \\ \sum_{j \in \text{基底}} \lambda_i^j + \lambda_i^* &= 1, i=1, \dots, p \\ \lambda_i^j &\geq 0, i=1, \dots, p; j \in \text{基底} \\ \lambda_i^* &\geq 0, i=1, \dots, p \end{aligned} \right\} (4)$$

ここで $P_i^* = A_i x_i(\pi_0)$; $f_i^* = c_i x_i(\pi_0)$, $i=1, \dots, p$.

3. ファジィ目標の導入

Zimmermann [21] は、1978 年に、多目的線形計画問題に対して、各目的関数に対する意思決定者のファジィ目標を取り入れたファジィ多目的線形計画問題を提案した。彼は、意思決定者のファジィ目標を規定するメンバシップ関数が線形の関数であると仮定して、Bellman と Zadeh[1] のファジィ決定に対する最大化決定を採用すれば、通常の線形計画問題として解けることを示し、その後のファジィ数理計画法の発展に大きな影響を与えた。

このように、人間の判断のあいまい性を考慮す

れば、(1)式で与えられる角型構造の大規模多目的線形計画問題の各目的関数に対して、意思決定者は「だいたいある値以下にしたい」というようなファジィ目標をもっているものと考えられる。このような意思決定者のファジィ目標は対応するメンバシップ関数により規定できる。意思決定者のファジィ目標を線形メンバシップ関数で規定するためには、最低限達成すべき目的関数値 z_j^0 , $j=1, \dots, k$ と理想的な目的関数値 z_j^1 , $j=1, \dots, k$ を意思決定者が評価すれば、ファジィ目標を規定するメンバシップ関数 $\mu_j(c_jx)$, $j=1, \dots, k$ は次のように与えられる。

$$\mu_j(c_jx) = \begin{cases} 1 & ; c_jx \leq z_j^1 \\ \frac{c_jx - z_j^0}{z_j^1 - z_j^0} & ; z_j^1 \leq c_jx \leq z_j^0 \\ 0 & ; c_jx \geq z_j^0 \end{cases} \quad (5)$$

このメンバシップ関数を図示すると図1のようになる。

図1 ファジィ目標を表す線形メンバシップ関数

ここで、意思決定者がファジィ目標をこのような線形のメンバシップ関数で規定する際には、与えられた制約条件の下での各目的関数の個別の最小値 $z_j^{\min}$, $j=1, \dots, k$ と最大値 $z_j^{\max}$, $j=1, \dots, k$ を求めておけば便利である。すなわち、個別の目的関数の最小化問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize } c_jx = c_{j1}x_1 + \dots + c_{jp}x_p \\ &\text{subject to } Ax = \begin{matrix} A_1x_1 + \dots + A_px_p & \leq b \\ B_1x_1 & \leq b_1 \\ \vdots & \vdots \\ B_px_p & \leq b_p \end{matrix} \\ &x_i \geq 0, i=1, \dots, p \end{aligned} \quad (6)$$

と最大化問題

$$\begin{aligned} &\text{maximize } c_jx = c_{j1}x_1 + \dots + c_{jp}x_p \\ &\text{subject to } Ax = \begin{matrix} A_1x_1 + \dots + A_px_p & \leq b \\ B_1x_1 & \leq b_1 \\ \vdots & \vdots \\ B_px_p & \leq b_p \end{matrix} \\ &x_i \geq 0, i=1, \dots, p \end{aligned} \quad (7)$$

の最適解 $x(j)$, $\overline{x(j)}$, $j=1, \dots, k$ に対する個別の目的関数の最小値 $z_j^{\min} = c_jx(j)$ と最大値 $z_j^{\max} = c_j\overline{x(j)}$, $j=1, \dots, k$ を計算する。ここで、これらの問題は角型構造の線形計画問題であるので、Dantzig-Wolfe の分解原理が直接適用できることに注意しよう。

意思決定者は、これらの値を考慮して、閉区間

$$[z_j^{\min}, z_j^{\max}], j=1, \dots, k \quad (8)$$

の範囲内で、 z_j^0 と z_j^1 , $j=1, \dots, k$ を評価すれば、ファジィ目標を表す線形のメンバシップ関数が規定されることになる。

4. ミニマックス問題と対話型ファジィ満足化手法

各目的関数 c_jx , $j=1, \dots, k$ に対する意思決定者のメンバシップ関数 $\mu_j(c_jx)$, $j=1, \dots, k$ が決定されると、解くべき問題は、形式的には、これらの相競合するメンバシップ関数を同時に最大にするという次のような多目的意思決定問題に変換される。

$$\text{maximize}_{x \in X} (\mu_1(c_1x), \dots, \mu_k(c_kx)). \quad (9)$$

ここで、 k 個の相競合するメンバシップ関数に対して、これらをなんらかの方法で統合するという、いわゆる統合関数とでもよぶべき関数

$$\mu_D(\mu(cx)) = \mu_D(\mu_1(c_1x), \dots, \mu_k(c_kx)) \quad (10)$$

を導入すれば、解くべき問題は形式的に次のように表現できる。

$$\text{maximize}_{x \in X} \mu_D(\mu(cx)). \quad (11)$$

ここで、統合関数 $\mu_D(\mu(cx))$ の値は、 k 個のファジィ目標に対する意思決定者の全体としての満足度を表しているものと解釈することができる。

従来のファジィ数理計画法で広く用いられてき

た Bellman と Zadeh のファジィ決定[1]

$$\min_{i=1,\dots,k} (\mu_1(\mathbf{c}_1\mathbf{x}), \dots, \mu_k(\mathbf{c}_k\mathbf{x})) \quad (12)$$

は、統合関数 $\mu_D(\mu(\mathbf{c}\mathbf{x}))$ のある 1 つの特別な場合であり、一般の状況において、 k 個のメンバシップ関数の統合方法としては、必ずしも満足できるものであるとはいえないであろう。

しかし、従来のファジィ数理計画法では、暗黙の中にファジィ決定が意思決定者の選好を適切に表現するものとして、問題(11)は次のように解釈されてきていることに注意しよう。

$$\text{maximize}_{\mathbf{x} \in X} \min_{j=1,\dots,k} \mu_j(\mathbf{c}_j\mathbf{x}) \quad (13)$$

あるいは等価的に

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximize } \lambda \\ \text{subject to } \mu_j(\mathbf{c}_j\mathbf{x}) \geq \lambda, \quad j=1,\dots,k \\ \mathbf{x} \in X. \end{array} \right\} \quad (14)$$

もちろん、もし意思決定者の統合関数 $\mu_D(\cdot)$ の関数形を大域的に固定することができれば、後は単に通常の線形計画問題を解くことに帰着され、話は簡単である。しかし一般には意思決定者のこのような統合関数の関数形を大域的に固定することは非常に困難な作業であると思われる。したがってこのような場合には、意思決定者の陰に存在する統合関数を大域的に陽に同定することなく、意思決定者との対話により、局所的な選好情報を引き出し、最終的に意思決定者が満足できる解、すなわち満足解を求めるという対話型手法が望ましい[8-10,15]。

このような観点から、本論文では、角型構造の大規模多目的線形計画問題の各目的関数に対するメンバシップ関数が決定された後、メンバシップ関数空間において、意思決定者の設定する基準点にある意味において近いパレート解を求め、もし満足できなければ対話的に基準点を更新することにより、最終的にパレート最適性の保証された満足解を求めるという対話型ファジィ満足化手法を提案する。

さて、角型構造の大規模多目的線形計画問題の目的関数に対する意思決定者のメンバシップ関数

が決定された後、各メンバシップ関数に対して意思決定者の志望水準を反映させる基準点 $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_k)^T$ を、意思決定者が主観的に設定したとしよう。このとき、もし、基準点の設定がひかえめすぎて達成可能であれば、その基準点よりも望ましいパレート最適解を求める一方、もし基準点の設定が達成不可能であれば、基準点にできるだけ近いパレート最適解を求めることが望まれる。このようなパレート最適解を求めるために、次のようなミニマックス問題を導入してみよう。

$$\text{minimize}_{\mathbf{x} \in X} \max_{j=1,\dots,k} \left\{ \bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j\mathbf{x}) \right\}. \quad (15)$$

この問題は、補助変数 λ を導入すれば、次のように変換される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize } \lambda \\ \text{subject to } \bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j\mathbf{x}) \leq \lambda, \quad j=1,\dots,k \\ \mathbf{x} \in X. \end{array} \right\} \quad (16)$$

ここで、基準メンバシップ値は、Wierzbicki [17,18]によって目的関数空間で提案された基準点の考えをメンバシップ関数空間に自然に拡張したものであるとみなされる。

ここで、 X はもとの問題(1)の角型構造の制約領域を表しているので、この問題の制約式は X に単に K 個のブロック制約式 $\bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j\mathbf{x}) \leq \lambda$ を付け加えたものとなるので、この問題は角型構造の大規模線形計画問題であり、Dantzig-Wolfe の分解原理が直接適用できることに注目しよう。

さて、ミニマックス問題(16)を解いて得られる最適解ともとの問題(1)のパレート最適解との関係は次の2つの定理に与えられる。

定理 1 もし $\mathbf{x}^*$ がある基準メンバシップ値に対するミニマックス問題(16)の一意的な最適解であれば、 $\mathbf{x}^*$ は問題(1)のパレート最適解である。

(証明) いま $\mathbf{x}^*$ が問題(1)のパレート最適解ではないと仮定すれば $\mathbf{c}_i\mathbf{x} \leq \mathbf{c}_i\mathbf{x}^*$, $i=1,\dots,k$ で、しかも、ある l について $\mathbf{c}_l\mathbf{x} < \mathbf{c}_l\mathbf{x}^*$ となるような $\mathbf{x} \in X$ が存在するので $\bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j\mathbf{x}) \leq \bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j\mathbf{x}^*)$, $j=1,\dots,k$ で、しかも、ある l について強意の不等号 $<$ が成立する。このことは

$$\max_{j=1,\dots,k} [\bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x})] < \max_{j=1,\dots,k} [\bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*)].$$

を意味し、 $\mathbf{x}^*$ がミニマックス問題(16)の一意的な最適解であることに矛盾するので、 $\mathbf{x}^*$ は問題(1)のパレート最適解である。(証明終り)

定理 2 もし $\mathbf{x}^*$ がすべての j に対して $0 < \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*) < 1$ となるような問題(1)のパレート最適解であれば、 $\mathbf{x}^*$ がミニマックス問題(16)の最適解となるような基準メンバシップ値が存在する。

(証明) もし $\mathbf{x}^*$ が

$$\bar{\mu}_1 - \mu_1(\mathbf{c}_1 \mathbf{x}^*) = \dots = \bar{\mu}_k - \mu_k(\mathbf{c}_k \mathbf{x}^*)$$

を満たすような基準メンバシップ値 $(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_k)^T$ に対して、ミニマックス問題(16)あるいは等価的に(15)の最適解ではないと仮定すれば

$$\max_{j=1,\dots,k} [\bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*)] > \max_{j=1,\dots,k} [\bar{\mu}_j - \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x})]$$

となるような $\mathbf{x} \in X$ が存在するので

$$\max_{j=1,\dots,k} [\mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*) - \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x})] < 0$$

が成立する。

ここで、もし任意の $\mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*) - \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x})$ が正か、あるいは、すべての $\mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*) - \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x})$, $j = 1, \dots, k$ がゼロであれば、この不等式は満たされない。

$$\mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*) - \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, k$$

で、少なくとも一つの j に対しては強意の不等号 $<$ が成立しなければならない。

ここで、仮定より $0 < \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*) < 1$ であるので、 $\mathbf{c}_j \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}_j \mathbf{x}$, $j = 1, \dots, k$ で、少なくとも一つの j に対しては強意の不等号 $>$ が成立する。このことは $\mathbf{x}^*$ が問題(1)のパレート最適解であることに矛盾するので、 $\mathbf{x}^*$ はミニマックス問題(16)の最適解でなければならない。(証明終り)

定理 1 より、ミニマックス問題(16)の最適解 $\mathbf{x}^*$ の一意性が保証されなければ、 $\mathbf{x}^*$ は必ずしも、もとの問題(1)のパレート最適解になるとはいえない。しかし、いうまでもなく意思決定者の満足解

はパレート最適解であることが望ましいので、 $\mathbf{x}^*$ がパレート最適解であるかどうかをテストし、パレート最適解でない場合には、パレート最適解となるような満足解を選ぶという操作が必要となる。

定義 1 より、解 $\mathbf{x}^* \in X$ がパレート最適解であるための必要十分条件は、 $\mathbf{c}_j \mathbf{x} \leq \mathbf{c}_j \mathbf{x}^*$, $j = 1, \dots, k$ で、しかも、ある j について $\mathbf{c}_j \mathbf{x} < \mathbf{c}_j \mathbf{x}^*$ となるような $\mathbf{x} \in X$ が存在しないことである。したがって、解 $\mathbf{x}^* \in X$ がパレート最適解であるかどうかをテストするためには、次の線形計画問題を解けばよい。

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximize} \quad \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \\ \text{subject to} \quad \mathbf{c}_j \mathbf{x} + \varepsilon_j = \mathbf{c}_j \mathbf{x}^*, \quad j = 1, \dots, k \\ \quad \quad \quad \mathbf{x} \in X \\ \quad \quad \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \geq 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

パレート最適性のテスト問題(17)の最適解を $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ とすると、次の二つの場合が考えられる。

- (a) すべての $j \in 1, \dots, k$ について、 $\varepsilon_j = 0$ となる。
- (b) 少なくともある一つの $j \in \{1, \dots, k\}$ について、 $\varepsilon_j > 0$ となる。

(a)の場合、解 $\mathbf{x}^* \in X$ がパレート最適解であることを意味し、(b)の場合、解 $\mathbf{x}^* \in X$ がパレート最適解でないことを意味する。(a)の場合には、解 $\mathbf{x}^*$ を(1)式に対するファジィ目標を考慮した満足解とすればよいが、(b)の場合については、いずれの解をファジィ目標を考慮した満足解とすればよいか考える必要がある。

幸い、問題(17)の最適解 $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ について次の定理が成立する。

定理 3 パレート最適性のテスト問題(17)の最適解を $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ とすれば、 $\mathbf{x}$ は、問題(1)のパレート最適解である。

(証明) もし $\mathbf{c}_j \mathbf{x}^1 \leq \mathbf{c}_j \mathbf{x}$, $j = 1, \dots, k$ で、しかも、ある $j^1 \in \{1, \dots, k\}$ に対して $\mathbf{c}_{j^1} \mathbf{x}^1 < \mathbf{c}_{j^1} \mathbf{x}$ となるような $\mathbf{x}^1 \in X$ が存在すれば、 $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (\varepsilon_1^1, \dots, \varepsilon_k^1)$ を

$$\varepsilon_j^1 = \begin{cases} \varepsilon_j & ; j \neq j^1 \\ \varepsilon_j + (\mathbf{c}_{j^1} \mathbf{x} - \mathbf{c}_{j^1} \mathbf{x}^1) & ; j = j^1 \end{cases}$$

と定めれば $(\mathbf{x}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1)$ は問題(17)の実行可能解となる。このとき、明らかに、

$$\sum_{j=1}^k \varepsilon_j < \sum_{j=1}^k \varepsilon_j^1$$

となり、 $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ が問題(17)の最適解であることに矛盾する。

(証明終り)

この定理より、問題(17)を解くことにより得られる解 $\mathbf{x}$ は角型構造の大規模多目的計画問題(1)のパレート最適解になることがわかるので、上述の(b)の場合については、パレート最適解 $\mathbf{x}$ を意思決定者の満足解になりうる候補解とすればよい。

さて、意思決定者が現在のパレート最適解で満足するのか、あるいは基準メンバシップ関数を更新するのかの判断のための有益な情報として、現在の解における各メンバシップ関数間のトレード・オフ比を与えることが考えられる。このトレード・オフ比は、ミニマックス問題のメンバシップ関数に関する制約式のシンプレックス乗数を π_i とすると、 $\pi_i > 0$, $i=1, \dots, k$ であれば、次のようになることが示される。

まず、HaimesとChankong[4]の結果により、目的関数間のトレードオフ情報は、次式で与えられることがわかる。

$$-\frac{\partial(\mathbf{c}_1 \mathbf{x})}{\partial(\mathbf{c}_j \mathbf{x})} = \pi_j^*, \quad j=2, \dots, k. \quad (18)$$

従って、連鎖則より、各 $j=2, \dots, k$ に対して、メンバシップ関数間のトレードオフは

$$-\frac{\partial \mu_1(\mathbf{c}_1 \mathbf{x})}{\partial \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x})} = \frac{\partial \mu_1(\mathbf{c}_1 \mathbf{x})}{\partial(\mathbf{c}_1 \mathbf{x})} \frac{\partial(\mathbf{c}_1 \mathbf{x})}{\partial(\mathbf{c}_j \mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x})}{\partial(\mathbf{c}_j \mathbf{x})} \right\}^{-1} \quad (19)$$

となるので、結局、次の関係式が成立する。

$$-\frac{\partial \mu_1(\mathbf{c}_1 \mathbf{x})}{\partial \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x})} = \pi_j^* \frac{\partial \mu_1(\mathbf{c}_1 \mathbf{x}) / \partial(\mathbf{c}_1 \mathbf{x})}{\partial \mu_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}) / \partial(\mathbf{c}_j \mathbf{x})}, \quad j=2, \dots, k. \quad (20)$$

ところで、(20)式からもわかるように、トレード・オフ比を求めるためには、ミニマックス問題(16)のメンバシップ関数に関する制約式がすべて活性となる必要がある。したがって、もし不活性な制約式が存在すれば、基準メンバシップ

値 $\bar{\mu}_j$ を現在のパレート最適解に対するメンバシップ値 $\bar{\mu}_j(\mathbf{c}_j \mathbf{x}^*)$ に置き換えて、ミニマックス問題を解き、対応するシンプレックス乗数を求める必要がある。

対話型ファジィ満足化手法では、意思決定者は設定した基準点に対して得られた自己の要求にミニマックスの意味において近いパレート最適解の目的関数の達成レベルに、もし満足できなければ、満足のできるパレート最適解が得られるまで、対話的に次々と基準点を更新することになる。このような意思決定者のパレート最適性の保証された満足解を求めるための対話型アルゴリズムは、次のように構成することができる。

ここで、*印のついた手順では、意思決定者との対話が行われる。

対話型ファジィ満足化手法のアルゴリズム

手順0：問題(6), (7)にDantzig-Wolfeの分解原理を適用することにより、与えられた制約領域における各目的関数の個別の最小値 $z_j^{\min}$ と最大値 $z_j^{\max}$ を求める。

手順1*：意思決定者は、これらの値を考慮して、閉区間 $[z_j^{\min}, z_j^{\max}]$ の範囲内で、 z_j^0 と z_j^1 , $j=1, \dots, k$ を評価することにより、各目的関数に対する意思決定者のファジィ目標を表す線形のメンバシップ関数を決定する。

手順2：ミニマックス問題(16)に対する初期の基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_j$, $j=1, \dots, k$ をすべて1に設定する。

手順3：設定された基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_j$, $j=1, \dots, k$ に対するミニマックス問題(16)にDantzig-Wolfeの分解原理を適用して、解いて得られた最適解に対するパレート最適性のテスト問題(17)を再びDantzig-Wolfeの分解原理で解くことにより、パレート最適解とメンバシップ関数値を求める。さらに、現在のパレート最適解における各メンバシップ関数間のトレード・オフ比を(20)式に基づいて求める。

手順4*：もし意思決定者が現在のパレート解に満足すれば、現在のパレート最適解が意思決定

者の満足解となるので終了する。そうでなければ、現在のメンバシップ関数値とトレード・オフ比の情報を考慮して、意思決定者は基準メンバシップ値を更新して手順3へもどる。

ここで、得られる解はパレート最適性を満たしているの、意思決定者は、あるメンバシップ関数を改善するためには、他のいずれかのメンバシップ関数を犠牲にせざるを得ないことに注意しよう。

5. 数値例

簡単な数値例として、次の問題を考える。

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize } -w_1 - 2w_2 - x_1 - 2x_2 - 2y_1 - y_2 \\
 &\text{minimize } 3w_1 + 8w_2 + 4x_1 + 3x_2 + 6y_1 + 4y_2 \\
 &\text{sub. to } w_1 + w_2 + x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 \leq 60 \\
 &\quad 2w_1 + 3w_2 \leq 40 \\
 &\quad w_1 + 4w_2 \leq 40 \\
 &\quad 5w_1 + w_2 \leq 61 \\
 &\quad x_1 + 3x_2 \leq 30 \\
 &\quad 2x_1 + x_2 \leq 20 \\
 &\quad y_1 \leq 10 \\
 &\quad y_2 \leq 10 \\
 &\quad y_1 + y_2 \leq 15 \\
 &\quad w_i \geq 0, x_i \geq 0, y_i \geq 0, i=1,2
 \end{aligned}$$

まず、個別の目的関数の最小化と最大化問題を解くことにより、 $z_1^{\min} = -62$, $z_2^{\min} = 0$, $z_1^{\max} = 0$, $z_2^{\max} = 214$ と求められる。これらの値を考慮して、意思決定者は次のようにメンバシップ関数を設定したとしよう。

$$\mu_1(z_1) = \begin{cases} 1 & ; z_1 \leq -60 \\ -\frac{1}{20}(z_1 + 40) & ; -60 < z_1 \leq -40 \\ 0 & ; z_1 > -40 \end{cases}$$

$$\mu_2(z_2) = \begin{cases} 1 & ; z_2 \leq 150 \\ -\frac{1}{50}(z_2 - 200) & ; 150 < z_2 \leq 200 \\ 0 & ; z_2 > 200 \end{cases}$$

定められたファジィ目標を図2, 3に示す。

図2 利潤に対するファジィ目標

図3 汚染物の排出量に対するファジィ目標

このとき、初期の基準メンバシップ値1に対して、対応するミニマックス問題は次のような角型構造の線形計画問題になる。

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize } \lambda \\
 &\text{subject to } 0.05w_1 + 0.1w_2 + 0.05x_1 + 0.05x_2 + 0.1y_1 + 0.05y_2 + \lambda \geq 3 \\
 &\quad 0.06w_1 + 0.16w_2 + 0.08x_1 + 0.06x_2 + 0.12y_1 + 0.08y_2 - \lambda \leq 3 \\
 &\quad w_1 + w_2 + x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 \leq 60 \\
 &\quad 2w_1 + 3w_2 \leq 40 \\
 &\quad w_1 + 4w_2 \leq 40 \\
 &\quad 5w_1 + w_2 \leq 61 \\
 &\quad x_1 + 3x_2 \leq 30 \\
 &\quad 2x_1 + x_2 \leq 20 \\
 &\quad y_1 \leq 10 \\
 &\quad y_2 \leq 10 \\
 &\quad y_1 + y_2 \leq 15 \\
 &\quad w_i \geq 0, x_i \geq 0, y_i \geq 0, i=1,2
 \end{aligned}$$

この問題に Dantzig-Wolfe の分解原理を適用すれば、パレート最適解

$$\begin{aligned}
 &z_1 = -52.55, z_2 = 168.61; \\
 &(w_1, w_2, x_1, x_2, y_1, y_2) \\
 &\quad = (11.605, 2.9748, 0, 10, 10, 5)
 \end{aligned}$$

と対応するメンバシップ値

$$\mu_1=0.62773, \quad \mu_2=0.62773$$

および、メンバシップ関数間のトレードオフ比

$$-\frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_1}=1.644$$

が得られる。

これらの情報を考慮して、意思決定者は、 z_2 に対する満足度を犠牲にしても、 z_1 に対する満足度を改善したいと判断して、基準メンバシップ値を

$$\bar{\mu}_1=0.8, \quad \bar{\mu}_2=0.5$$

と変更したものとする。

このように更新された基準メンバシップ値に対して、対応するミニマックス問題を解けば、パレート最適解

$$z_1=-54.81, \quad z_2=177.98;$$

$$(w_1, w_2, x_1, x_2, y_1, y_2)=(11.239, 4.0806, 0, 10, 10, 3.9552)$$

と対応するメンバシップ値

$$\mu_1=0.7926, \quad \mu_2=0.3567,$$

および、メンバシップ関数間のトレードオフ比

$$-\frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_1}=1.680$$

が得られる。

ここで、もし意思決定者がこれらのメンバシップ関数の現在の値に満足したものとするれば、このパレート最適解が満足解となり、アルゴリズムは終了する。そうでなければ、同様の手順が意思決定者の満足解が得られるまで続けられることになる。

6. おわりに

本論文では、角型構造の大規模多目的線形計画問題に焦点をあて、各目的関数に対する意思決定者のファジィ目標を考慮した意思決定者の満足解を対話的に導くための対話型ファジィ満足化手法を提案した。提案した手法では、意思決定者との対話により、意思決定者のファジィ目標を線形のメンバシップ関数で規定した後、メンバシップ関

数空間において、意思決定者の設定する基準点にミニマックスの意味において近いパレート解をDantzig-Wolfeの分解原理の適用により求め、もし満足できなければ対話的に基準点を更新することにより、最終的にパレート最適性の保証された意思決定者の満足解を効率よく導出することが可能となる。なお、本論文で提案した対話型ファジィ満足化手法の現実の意思決定状況への適用や、ファジィパラメータを含む大規模多目的線形計画問題への拡張については、今後さらに展開していく予定である。

参 考 文 献

- [1] R. E. Bellman and L. A. Zadeh: "Decision Making in a Fuzzy Environment", *Management Sci.*, 17, pp.141-164 (1970).
- [2] V. Chankong and Y. Y. Haimes, *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland, Amsterdam (1983).
- [3] G. B. Dantzig and P. Wolfe: "The Decomposition Algorithm for Linear Programming", *Econometrica*, 29, pp.767-768 (1961).
- [4] Y. Y. Haimes and V. Chankong, "Kuhn-Tucker multipliers as trade-offs in multiobjective decision-making analysis," *Automatica*, 15, pp. 59-72 (1979).
- [5] Y. Y. Haimes, K. Tarvainen, T. Shima and J. Thadathil: *Hierarchical Multiobjective Analysis of Large-Scale Systems*, Hemisphere Publishing Corporation, New York (1989).
- [6] D. M. Himmelblau (ed.), *Decomposition of Large-Scale Problems*, North-Holland, Amsterdam (1973).
- [7] L. S. Lasdon(志水清孝 訳): 大規模システムの最適化理論: 日刊工業新聞社 (1973).
- [8] 坂和正敏: ファジィ理論の基礎と応用: 森北出版 (1989).
- [9] 坂和正敏: 経営数理システムの基礎: 森北出版 (1991).
- [10] M. Sakawa: *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York (1993).
- [11] 坂和, 乾口, 澤田: "角型構造の大規模線形計画

- 問題に対する凸ファジィ決定に基づくファジィ満足化手法”, 日本ファジィ学会誌, 5, pp.516-527 (1993).
- [12] 坂和, 乾口, 澤田: “角型構造の大規模多目的線形計画問題に対するファジィ計画法”, 電子情報通信学会, J77-A, pp.430-438(1994).
- [13] M. Sakawa and F. Seo: “Interactive Multiobjective Decisionmaking for Large-Scale Systems and Its Application to Environmental Systems”, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, SMC-10, pp.796-806 (1980).
- [14] M. Sakawa and H. Yano, “An interactive fuzzy satisficing method using augmented minimax problems and its application to environmental systems,” IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, SMC-15, pp.720-729 (1985).
- [15] M. Sakawa, H. Yano and T. Yumine, “An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear-programming problems and its application,” IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, SMC-17, pp.654-661 (1987).
- [16] 志水清孝: 多目的と競争の理論: 共立出版 (1982).
- [17] A. P. Wierzbicki, “The use of reference objectives in multiobjective optimization,” in: G. Fandel and T. Gal (eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application*, Springer-Verlag (1980).
- [18] A. P. Wierzbicki, “A mathematical basis for satisficing decision making,” *Mathematical Modeling*, vol.3, pp.391-405 (1982).
- [19] D. A. Wismer (ed.), *Optimization Methods for Large-Scale Systems with applications*, McGraw-Hill, New York (1971).
- [20] H.-J. Zimmermann: “Description and Optimization of Fuzzy Systems”, Int. Journal of General Systems, 2, pp.209-215 (1976).
- [21] H.-J. Zimmermann: “Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions”, Fuzzy Sets and Systems, 1, pp.45-55 (1978).

(1993年8月19日 受付)

(1994年2月5日 再受付)

[問い合わせ先]

〒724 東広島市鏡山1-4-1

広島大学工学部第二類(電気系)

計数管理工学講座

坂和 正敏

☎: 0824-24-7694(直通)

☎: 0824-24-7694/0824-22-7195

E-mail: sakawa@msl.sys.hiroshima-u.ac.jp

著者紹介

澤田 一哉 (さわだ かずや)

松下電工(株)インフォメーションシステムセンター

1978年 神戸大学大学院工学研究科修士課程(システム工学専攻)修了。同年4月 松下電工(株)入社。総合技術研究所(現中央研究所)において、多目的最適化技術の応用研究、戦略的生産・販売・在庫計画システムの研究開発などに従事した後、1989年7月より、同社インフォメーションシステムセンターVR開発室にて、人工現実感技術やAI関連技術の応用研究開発に従事。現在、同社主査技師。システム制御情報学会、日本オペレーションズリサーチ学会の会員。

坂和 正敏 (さかわ まさとし)

広島大学工学部第二類(電気系)

昭和45年3月 京都大学工学部数理工学科卒業。昭和50年3月 京都大学大学院工学研究科博士課程(数理工学専攻)修了。同年4月 神戸大学工学部システム工学科助手、昭和56年3月 同助教授、昭和62年3月 岩手大学工学部数理工学講座教授を経て、平成2年4月 広島大学工学部第二類(電気系)計数管理工学講座教授となり現在に至る。大規模システム、多目的システム、ファジィシステムにおける意思決定手法とその応用に関する研究に従事。京都大学工学博士。著書「線形システムの最適化」、「非線形システムの最適化」、「応用解析学の基礎」、「ファジィ理論の基礎と応用」、「経営数理システムの基礎」(以上、森北出版)「Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization」(Plenum Press)、他共著や分担執筆多数。