技術としてのカオスとフラクタル†

山口 昌哉*

1. 技術とは何か

最近では科学技術という言葉が使われすぎて、科学と、技術の区別があまりはっきりしない。しかし、ここで科学とは違う技術について考えておくのも無益ではないだろうと思う。

近代の科学の特徴として、主観から独立した客観性を最も重視し、更に分析と総合という二つの方法論をその手段として備えているのが万人に指摘されているが、技術の方は本来そんなものと無縁であった。先ず主観と客観との分離について、技術の方ではどうであったかと考えれば、そのような分離は技術の方ではなかった。

例えば、古く、どのようにして他の生物をつかまえるかというので、石から石弓にいたる技術の進歩では、生きるために他の生物をつかまえたいという、強い欲望(主観)のもとにその技術の進歩があったわけだし、又、どうかして河の氾濫を止めようとして、その欲望のもとに土木の技術が進歩してきたわけであって、決して、流体力学を応用することが最初にあるわけではない。

このような性格は、科学技術の中にかぞえられている制御(コントロール)というような技術にも、色濃く残っている。制御はいわば、科学ではない。何故なら、ある機械システムをコントロールする

ことは、ある欲望(主観)をもって、例えばそのシステムによって最大の利益を上げるとか時間を最小にするとかという欲望を堅持することによって、その目的にしたがってシステムを設計し、作動させる技術なのだからである。

更に分析と総合ということについても、技術はその発生の時から必ずしもこの方法をとっていない。

分析というのは、全体を細かく小さな部分に分け、その最小の単位に分けて、それをあとで集めるということで、機械じかけのからくりなどは、早くからこの方法を用いていたので、必ずしも科学の影響は受けていないともいえるが、この方法だけが技術の方法であったかは疑問が残る。

例えば、紀元前200年頃のアキメデスの求積法は放物線とその一つの弧で囲まれた面積を求める方法であって、今は数学の本に載せられているものであるが、その当時の一つの技術と考えることもできる。この方法は、この部分の面積を求めるために第一に全体の面積をごく大まかにこの部分に内接する最大の三角形で近似し、これを第1近似として、この三角形でカバーされていない部分を、今と全く同じように、ただし、三角形を二つ作り、この面積を加えるようにして第2近似とする。この方法をつぎつぎと施すことにより、はじめに求めようとした面積に迫ろうとするものであり、明らかに、現代でいわれている分析総合ではない。

このように近代の科学と、古代からつづいている技術とは、方法としてもその精神においても違うのである。

† Chaos and Fractal as Technology
(第10回ファジィシステムシンポジウム[記念大会](1994年6月1日-4日、大阪)の招待講演より)

* Masaya YAMAGUTI
龍谷大学 理工学部 数理情報学科
Department of Informatics and Applied math., Faculty of Science and Engineering, Ryukoku University

ところが、数学の方では、この数十年の間に、カオスとフラクタルという新しい学問が発生し、これは分析と総合という近代科学と確かに違う考え方なのである。したがって、これが技術に用いられる可能性はきわめて大きい。先に述べたアルキメデスの考えなどは、フラクタルの考え方ときわめて近い。この講演ではそのことについて述べたい。また、特に社会現象の数学的方法については、このことが最も強く現れるのである。

2. 社会現象の数理的方法

自然科学や技術の大部分の理論が採っている方法は多かれ少なかれ、一種のアトミズムからできている。つまり、すべてのものは、分析の最小単位であるものから成り立っている。それは、原子でもよいし、分子でもよい、そういう物質の究極の単位(これは本当にそうなのかかわからない)に分解して考えるのが広い意味でのアトミズムである。ここで、特に注意しておきたいのは、このアトムは「個性」を持たないということである。原子Cは他の原子Cと置き換え可能である。分子NaClは他のNaClと置き換え可能である。このように考えて、推論し、実験し、又、コントロールすることは、特別な名前“EXACT Science”(精密科学)という尊称が奉られた。そして、これらの科学は自然科学の中でも、独特の高い地位を示した。

一方、社会科学の方であるが、これは社会、人間の集団とその営み、社会現象といわれるものが、研究の対象である。この方は普通は精密科学と言われていない。ここでの大きな違いは、人間は、一人一人個性を持っており、アトムと呼べるようなものではない。にもかかわらず、自然科学での精密科学のようなものを成立させようという試みは十八世紀から行われている。ベルギーの数学者ケトレー(Lambert Adolph Jacque Quetelet-1796~1874)は統計学者でもあって、平均体重とか平均身長という言葉から〈平均人〉という概念をみだした。個々の人のわずかの差や、違いに目をつむれば、ATOMのような人が集まっている

と考えようというのである。彼は「人間および社会の各現象においても物理現象と同じような統計的法則性が見られる」ことを指摘し、大きな影響を与えた。そしてこの統計を用いて、人間および社会に関する精密科学(社会物理学)を打ち立てようとし、そのための方法として、〈平均人〉の概念を提唱した(平凡社大百科事典)。

これはその後、経済学、社会学等に影響したと思う。このようにして、社会科学での自然科学類似の学問がはじめられた。自然科学の中でも上の類似の精密科学指向はあった。その一つの例は数理生態学であって、たとえば、創始者の一人である数学者ビトー・ヴォルテラ(Vito Volterra-1860~1940)は、「生存競争の数学的理論」(1928)において、生物の個体群が二つ以上あった場合、その相互作用によるダイナミズムの記述を連立の微分方程式系で表現し、それを解いた。ここではっきりと、この方法は物理学における「分子運動論」を頭に浮かべながら、理論展開をしたのであると述べている。ここでも、同種の生物個体については、分子と同じように個性を認めては理論は成立しない。

ところで、すべての科学では、個性を無視しているのだろうか? そうでもない。自然科学の方で一つの著しい例は、京都大学を中心に発達した。霊長類学(今西錦司、伊谷純一郎氏)では、個体識別という方法がとられている。例えば、日本猿の場合、一匹一匹に太郎とか花子という名前をつけて一匹一匹の行動を記録し、そのデータから一つの法則を引き出すのである。これは、先ほどまで述べた精密科学の方法のまったく逆である。にもかかわらず、今や自然科学の一つであるということ誰かが認めている。伊谷氏らのグループは西洋の学者が得られなかった新知見を得て、ハックスレイ賞を授賞された。

これと、今まで述べた精密科学との関係はどうなるのだろうか。この講義ではこの二つの科学の間をつなぐものとして、Granovetterの提唱する「閾値モデル」を紹介したい。これは、社会における集団現象のダイナミックスを個々の人の個性

を一部分取り入れることによって集団現象を説明しようとするものである。この講義では、社会科学の典型として、ワルラスにはじまる数理経済学と社会学ではグラノベッターの数理社会学をカオス理論の立場から説明したい。前者はアトミズムの例であり、後者はある意味の個性を考慮に入れた理論である。

2.1 数学的準備

カオスには、いくつも定義はあるけれども、ここでは1974年のLi-Yorkeの定義を用いることとする。

$f(x)$ は $[0,1]$ から $[0,1]$ への連続な写像とする。 x_0 を $[0,1]$ 上にとり、離散力学系：

$$\textcircled{1} \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

で軌道 $\{x_n\}$ ($n=1,2,\dots,n,\dots$)を定義したとき、 $\{x_n\}$ がカオスであるというのは、次の3つの性質を持つときである。

- (1) 任意の自然数 p について、 p -周期の軌道がある。
- (2) $[0,1]$ 上の非可算集合 s が存在し、その上に x_0 をとると、この初期値 x_0 に対応する $\{x_n\}$ は非周期である(どのような周期も持たない。どのような周期解にも漸近しない)。
- (3) x_0 と y_0 が s 上にあるとき、

$$\lim |x_n - y_n| = 0$$

$$\lim |x_n - y_n| > 0$$

さて、どのような f に対して、上のようなカオスがおこるかという問いには次の定理がある。

定理(リイヨーク)： $f(x)$ が次のような4点 p_1, p_2, p_3, p_4 を持つとき、軌道 $\{x_n\}$ はカオスとなる。

$$p_4 \leq p_1 < p_2 < p_3$$

$$f(p_1) = p_2, f(p_2) = p_3, f(p_3) = p_4$$

例1 (図1(a)) $f(x) = ax(1-x)$ で $0 \leq a \leq 4$ 、且つ a が4に等しいか又は4に十分近いとき

例2 (図1(b))

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 2(1-x) & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

次の定理は、常微分方程式とその差分化についての結果である。

定理(山口一俣野、1979)： $f(x)$ が2つ以上の平衡点 p_1, p_2 を持ち、且つ

$$f(p_1) = f(p_2) = 0$$

$$f(x) < 0 \quad (x < p_1)$$

$$f(x) > 0 \quad (p_1 < x < p_2) \quad (p_2 \text{は安定平衡点})$$

$$f(x) < 0 \quad (p_2 < x)$$

であるとき、微分方程式 $dx/dt = f(x)$ のオイラー式差分化、

$$x_{n+1} - x_n = \Delta t f(x_n)$$

は、離散力学系としてカオスとなる。

以上が、以下に必要な数学的準備である。

2.2 経済学(均衡理論)

$p(t)$ を時刻 t におけるある商品の価格であるとする。 $f(p)$ は、その商品についての超過需要量 = 需要量 - 供給量、

$$\textcircled{2} \quad dp/dt = f(p)$$

$f(p)$ にいくつかの平衡点(経済学では均衡点とよぶ)があり、②の方程式にしたがって、安定な平衡点であれば、その平衡点が、需要と供給のつりあいのもとでの価格である。

これが古典的なワルラスの理論の結果である。ところが最近、1960年代からは、上の②の方程式で dp/dt という微分係数は全く、便宜上の計算であり、実際は、市場で価格が決まるためにはある速度での決まり方があるということから dp/dt のかわりに

$$\textcircled{3} \quad p_{n+1} - p_n = \alpha f(p_n)$$

(α は価格決定速度)

図1

であるべきだという考え方が多くなってきた(宇沢氏)。

③は

$$p_{n+1} = p_n + \alpha f(p_n)$$

と書けば、正に、③は②のオイラー差分化ではないか。こう考えれば、山口一保野の定理によれば、価格が決まることもあれば、カオス的となって、価格は決定しないこともあり、価格が乱高下することをも意味している。

3. 数理社会学

ここでは、数理社会学の一つである Granovetter の 1978 年以来いくつかの論文で発表されている「集団行動の閾値モデル」について述べよう。日本では、筑波大学の石井健一氏や金沢大学の岩本健良氏がそれをフォローしていくつかの論文を発表している。

ここで、社会学での集団行動とは、次のようなものである。

暴動、流行、世論形成、人種による住宅のすみわけ、その他いくつも考えられる。新製品の普及現象などもその例である。

暴動の例は、このモデルを説明するのによく使用される。ここでは石井健一氏の報告(1992 年)にしたがって、説明しよう。

今、ここに 10 人の人がいたとして、この 10 人の人達は、それぞれ暴動に対して、一人一人異なった態度を持っている。もちろん暴動が起こるためには、誰も暴動に参加する人がいなくても自分はやるといふ人がいなければ起こらない。この人達のことを閾値ゼロの人という。そういう風な考え方を進めると、2 人でも暴動に参加すれば、自分も入ろうという人もいるかもしれない。この人達を閾値 2 の人達という。このように、10 人の人達一人一人に閾値をアタッチすると、この 10 人の閾値分布表ができる。その例をいくつか示せば、次の A、B、C の 3 つを考えることができる。

A	閾 値	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均値 4.5
	メンバー数	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

B	閾 値	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均値 3.5
	メンバー数	4	0	0	0	0	1	1	1	1	1	

C	閾 値	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均値 3.9
	メンバー数	2	0	1	1	1	0	1	1	1	1	

A のケースの場合、10 人のすべての人が暴動に参加する。なぜならまず、閾値 0 の人が 1 人峰起する。すると、閾値 1 の人は、すでに 1 人暴動に参加しているというので参加する。参加人員は 2 人になった。そこで閾値 2 の人が参加して、参加人員は 3 となる。と順々に参加人員が増え全員参加となる。

B の場合はどうか。まずこの場合は 4 人が峰起する。しかし閾値分布は 4 人峰起ではさらに参加する人は出てこない。したがって 4 人だけ暴動に参加して終わりである。

C の場合には、上と同じように考えれば、まず 2 人が峰起し、次に閾値 2 の人が、続いて 3 の人がと次々と参加する人員が増え、5 人までは増えるが、それ以上は増えない。

結局、累積閾値分布を求めておいて、それを f (x_n)、 n は時刻 n における人数(又は割合)として

$$④ \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

x_0 : 閾値 0 の人数(割合)

という差分方程式の安定な不動点が平衡値となる。このとき、 $f(x)$ は単調増加である。この平衡点は、平均値が近くても、全く異なることが多く、また初期値 x_0 には、きわめてセンシティブに依存し、トムのカタストロフ現象が初期値の連続変化に対して起こることは石井健一氏が注意している。このような現象は、特に近年情報機器の採用伝播について、著しい傾向が認められる。これは、電話、FAX、パソコン通信等は利用者が増えるほど、一つの機器の価値が上がるという特性があるからである。

(注意) 閾値モデルが出現する前は、このような集団行動はどのようなモデルによって取り扱われていたか？それは、再び微分方程式による次のようなモデルであり、これは「ディフュージョンモデル」と呼ばれる。

$$\textcircled{5} \quad d\chi/dt = A\chi(1-\chi)$$

であって、 $\chi(t)$ は時刻 t において、ある流行を採用した人の人口のパーセンテージである。したがって $1-\chi(t)$ は、未採用者のパーセンテージとなる。その積 $\chi(1-\chi)$ は、採用者と未採用者の出会いの数であり、 A は比例常数である。これは、ある病気の接触感染による伝播の構造と同じである。これも、現象によっては割合によく説明がつく。ちなみに $\textcircled{5}$ は、2.1 で述べた山口-俣野の定理によれば、オイラーの差分をすることでカオス的行動もする。

4. 「2つの閾値」のモデル

今まで述べた閾値は、自分の態度を決めるのに、他の人がどの程度の割合まで参加すれば自分も参加するかという閾値で、これは「バンドワゴン(楽隊)効果」と呼ばれ、閾値は「下の閾値(Lower Threshold)」と呼ばれる。

これに対して、高い方の閾値を考えることができる場合もある。前節の最後に述べた通信機器の普及については考えられないが、人間は、あまり多くの人が参加すると、やめたいと思うことがある。これを「スノブ効果」と呼ぶ。例えば、狭い巾のネクタイの流行があまりはやると、巾広のネクタイをはじめる人もでてくる。そこで「上の閾値」を考える。これを Upper Threshold と呼ぶ。ある流行を考え、各人の Lw (Lower Threshold) と Uw (Upper Threshold) の分布を考える。今、既に時刻 t において、既に人口の $p(t)$ 割が、この流行を採用したとする。 $t+1$ においてはどうか？ $t+1$ において、新たに参加する人は自分の閾値 Lw と Uw が

$$\textcircled{6} \quad Lw \leq p(t) \leq Uw$$

になるような (Lw, Uw) のペアを持つ人達である。(図2参照)。これを固守したい。 (Lw, Uw) を2次元の分布とする。特に、ここでは、一様分布の時だけ取り上げる。

今、 (Lw, Uw) の分布を $F(Lw, Uw)$ とすると、

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad p(t+1) &= \int_{p(t)}^1 \int_1^{p(t)} F(Lw, Uw) dLw dUw / A \\ &= \int_0^1 \int_1^{p(t)} F(Lw, Uw) dLw dUw / A \\ &\quad - \int_1^{p(t)} \int_1^{p(t)} F(Lw, Uw) dLw dUw / A \\ &= F_L(p(t)) - F_U(p(t)) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } A = \int_0^1 \int_0^1 F(Lw, Uw) dLw dUw$$

となって、 $t+1$ での普及率が割り出せる。

例を2つあげよう。いずれも石井健一氏の論文からとった。

例1

$$p(t+1) = \begin{cases} 2p(t) & 0 \leq p(t) \leq 1/2 \\ 2(1-p(t)) & 1/2 \leq p(t) \leq 1 \end{cases}$$

(2次元分布は図3の網掛け部分)

図2

図3

⑥をみたす (Lw, Uw) の分布はの図 4 の黒く塗りつぶした部分である。

例 2

$$p(t+1) = 2p(t)(1-p(t))$$

この分布は、次の図 5 である。更に分布を図 6 にすると、

$$p(t+1) = 4p(t)(1-p(t))$$

となる。

図 4

図 5

図 6

参 考 文 献

1. Granovetter, M. and Soong Roland (1983) "Threshold Models of Diffusion and Collective Behavior", Journal of Mathematical Sociology, 9: 165-179.
2. Granovetter, M. and Soong Roland (1986) "Threshold Models of Interpersonal Effects in Consumer Demand", Journal of Economic Behavior and Organization, 7: 83-99.
3. Granovetter, M. and Soong Roland (1988) "Threshold Models of Diversity: Chinese Restaurants, Residential Segregation, and the Spiral of Silence", Sociological Methodology 1988, 69-104.
4. 石井健一(1984) 微分方程式型モデルによる普及現象の分析、「行動計量学」、12(1): 11-19.
5. 石井健一(1987) 世論過程の閾値モデル、「理論と方法」、2(1): 15-28.
6. 石井健一(1990) 情報機器の普及モデル、「高度情報社会のコミュニケーション」、(東京大学新聞研究所編)、東京大学出版会.
7. May, Robert.(1976) "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics", Nature, 261: 459-467.
8. 山口昌哉(1986) カオスとフラクタル、講談社.
9. Yamaguti, M. and Matano, H.(1979) "Euler's difference scheme and Chaos", Proc. Japan Academy.

[問い合わせ先]

〒520-21 大津市瀬田大江町横谷1-5
 龍谷大学 理工学部 数理情報学科
 山口 昌哉 ☎: 0775-43-7509
 ☎: 0775-43-7520

—— 著 者 紹 介 ——

山口 昌哉 (やまぐち まさや)

龍谷大学理工学部数理情報学科

1925年、京都府に生まれる。1947年、京都帝国大学理学部卒業(主として数学専攻)。1960年、京都大学教授・理学博士。1980年、京都大学理学部長。1988年、龍谷大学理工学部教授となり現在にいたる。学術会議会員、放送大学客員教授。主な著書として、「非線形現象の数学(朝倉書店)」「数値解析の基礎(共立出版)」「食うものと喰われるものの数学(筑摩書房)」「カオスとフラクタル(講談社ブルーバックス)」「無限・カオス・ゆらぎ(培風館)」「科学的方法とは何か(中公新書)」「フラクタルの数理(岩波書店)」「フラクタルとカオス—新しいコスモロジー(岩波書店)」「科学の最前線—禪と生命科学—(紀伊国屋書店)」「生と死、事と物(仏教季刊—生死の学、法蔵館)」「近代科学を越えるカオス、フラクタル(アテネの学堂、ジャストシステム)」