ファジィ論理とその代数[†]

近藤 通朗*

1. はじめに

ここでは、ファジィ論理とそれに対応する代数としてのクリーネ代数(Kleene algebra)の関係について簡単に解説する。まずそのためには、ファジィ論理とはどのような公理や推論規則を持つ論理体系であるか?を明確にしなければならない。古典論理・直観論理の場合から類推すると次のように考えられるのではないだろうか。

ファジィ理論においては、命題に対する真理値が真あるいは偽(それぞれ、簡単に1, 0と表す)だけでなくそれ以外の曖昧な値を取り得ることができるものであるから、通常は真理値の集合を区間 $[0, 1]$ とし、その上に様々な演算を導入した代数系と考えている。

このとき、ある論理体系 F について、 F の論理式にその真理値を対応させ、 F で証明可能な論理式全体と真理値が1になる論理式全体が一致するような論理体系 F があれば、消極的理由ながらもこれをファジィ論理と呼ぶことにはそう違和感はないであろう。

このように考えると、真理値の集合がどのような構造を持つ集合であるかに対応して様々なファジィ論理(あるいはもっと一般的な論理体系)が得られるはずである([1], [2], [3], [4])。例えば、ルカシェヴィッツ[1]は真理値の集合が3となる代数系(台集合は $3 = \{0, 1/2, 1\}$ 、演算として $\wedge, \vee$,

$\neg, \rightarrow$ の4つを持つ)に対応するような論理体系を得ている。彼はこの代数系3に束という構造を与えたが、これ以外にも例えば最大元・最小元を持つこと、分配束であること、さらにクリーネ律を満たしていることなどいろいろな構造を与えることができる。

では、どのような構造を与えればいいのであろうか?

そのために次の事実に注目しよう:

(1) 空でない集合のファジィ部分集合全体は演算 $\wedge, \vee, \neg$ に関してクリーネ代数である([2]);

(2) 任意のクリーネ代数の適当な商代数はクリーネ代数3に埋め込み可能(embeddable)である。したがって、この小論では真理値の集合を最も簡単な場合であるクリーネ代数3と捉え(すなわち、真理値の集合はクリーネ代数の公理を満たすものとする)、この代数にどのような論理体系が対応するかについて説明していこう。ここでは言及しないが、真理値の集合を(クリーネ代数3ではなく) $+や-$ など多くの演算を持つ閉区間 $[0, 1]$ とし、これに対応する論理体系について調べたものに千谷[3]がある。これ以外にもより一般的に、真理値の集合の持つ構造に対応した様々な論理体系が考えられている(Rasiowa[5], [6])。

ところで、論理には含意の概念があるので、論理との対応を重視するならば含意を持つクリーネ代数を考察する必要がある。[2]においては含意演算を持つ場合については考えられていないので、ここでは含意演算を持つクリーネ代数3について考察することにする(簡単のために、以後これもク

[†] Fuzzy Logics and their Algebras

* Michiro KONDO

東邦大学理学部情報科学科

Department of Information Sciences, Toho University

リーネ代数と呼ぶ)。

以上のような理由からこの小論では、真理値の集合を(含意を持つ)クリーネ代数 $\mathfrak{3}$ として、これに対応する論理体系 F について説明しよう。より正確に言えば、リンデンバウム代数(Lindenbaum algebra)がクリーネ代数となるような論理体系について考える。

あとできちんと定義するが、リンデンバウム代数について簡単に説明しよう。ある論理体系のリンデンバウム代数とは、その論理体系の論理式全体(正確にはその商集合)を、ある構造を持つ代数系(この構造は元の論理体系の公理で規定される)、と考えたもので論理と代数との対応を調べるのによく用いられる。具体例として、古典命題論理のリンデンバウム代数はブール代数(Boolean algebra)であり、直観論理のそれはハイティング代数(Heyting algebra)である(束を含めた代数系の理論については[5], [6], [7]を参照されたい)。

ここでは、[4]にしたがってファジイ論理の公理系とそのリンデンバウム代数の関係を見ていくことにする。

2. クリーネ代数

本節において、クリーネ代数(正確には含意をもつクリーネ代数)を定義し、その基本的な性質、例えば任意のクリーネ代数がクリーネ代数に埋め込み可能であること(定理2)、を見ていくことにする。

代数系 $K = \langle K, \wedge, \vee, N, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ がクリーネ代数であるとは、

- (1) $K = \langle K, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ は最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束；
- (2) $N : K \rightarrow K$ は写像で次の条件を満たす；
 - (N 0) $N 0 = 1, N 1 = 0$
 - (N 1) $x \leq y$ ならば $Ny \leq Nx$
 - (N 2) $x = N(Nx)$ ($= N^2x$)
 - (N 3) $x \wedge Nx \leq y \vee Ny$
- (3) 含意 $\rightarrow$ は次の条件を満たす；
 - (I 1) $Nx \vee y \leq x \rightarrow y$
 - (I 2) $x \wedge (x \rightarrow y) \leq Nx \vee y$

$$(I 3) x \wedge Nx \wedge y \wedge Ny \wedge N(x \rightarrow y) = 0$$

$$(I 4) x \wedge Ny \leq N(x \rightarrow y) \vee y$$

と定義する。

ここで注意しなければならないのは、含意を持つクリーネ代数の公理系は上記のものに限られる必要は全くないということである。含意についての条件(I 1)-(I 4)は、ファジイ論理との関係を重視したためにこのようにしたに過ぎない(もちろん、 $\mathfrak{3}$ においてこの条件で含意 $x \rightarrow y$ の値が一意的に確定する必要はあるが)。

いくつか具体的な例を挙げると

例1. $\mathfrak{3} = \{0, 1/2, 1\}$. $x, y \in \mathfrak{3}$ に対して、

$$x \wedge y = \min\{x, y\}$$

$$x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$Nx = 1 - x$$

$$x \rightarrow y = \min\{1 - x + y, 1\}$$

と定義する。

簡単な計算によりこれらの演算が上述のクリーネ代数の条件を満たしていることがわかるので、 $\langle \mathfrak{3}, \wedge, \vee, N, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ はクリーネ代数である。このとき $x \rightarrow y$ の値は表1のようになる。

表1 $\mathfrak{3}$ における $x \rightarrow y$ の値

$x \ y$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

例2. 閉区間 $I = [0, 1]$. $x, y \in I$ に対して、例1と同じように定義する。すなわち、

$$x \wedge y = \min\{x, y\}$$

$$x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$Nx = 1 - x$$

$$x \rightarrow y = \min\{1 - x + y, 1\}$$

と定義する。

$\langle I, \wedge, \vee, N, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ はクリーネ代数となることは明らかである。このとき $x \rightarrow y$ の値は次のようになる：

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & x \leq y \text{ のとき} \\ 1 - x + y & x > y \text{ のとき} \end{cases}$$

また線形ではないクリーネ代数の例として

例 3.

ただし,

$$Na = d, Nb = e$$

$$Nc = c$$

$$Nd = a, Ne = b$$

以下において、任意のクリーネ代数の適当な商代数がクリーネ代数 3 に埋め込まれること(定理 2)を示そう. これはクリーネ代数の諸性質が最も簡単なクリーネ代数 3 に反映されることを意味している. この定理の証明に必要なフィルターという概念を定義する. この概念は、リンデンバウム代数によるファジイ論理の完全性定理の証明を行う際にも役立つものである.

K を任意のクリーネ代数とする. F を K の空でない部分集合とすると、 F が以下の条件を満たすならば、 F を K のフィルター(filter)と言う.

$x, y \in K$ に対して、

$$(F1) x \in F \text{ かつ } y \in F \text{ ならば } x \wedge y \in F$$

$$(F2) x \in F \text{ かつ } x \leq y \text{ ならば } y \in F.$$

例 3 では、例えば、 $\{1\}, \{1, a\}, \{1, a, b, c\}$ などがフィルターである. フィルターにも様々な性質を持つものがあり、後で必要になるものだけを挙げることにする.

x をクリーネ代数 K の任意の元とすると、 $[x] = \{y \in K \mid x \leq y\}$ で定義される集合も K のフィルターとなることがわかる. これを x から生成された K の主フィルター(principal filter)と呼ぶ.

フィルター F が K の真部分集合であるとき、 F を真のフィルター(proper filter)と言い、真のフィルター F が包含関係 ' $\subseteq$ ' について極大となると、すなわち、 F を真部分集合として含むフィルターが K に限られるときに F を極大フィルター(maximal filter)と言う.

真のフィルター F について、 $x \vee y \in F$ ならば $x \in F$ あるいは $y \in F$ となるときに F を素フィルター(prime filter)という.

例 2 において、集合 $(0, 1]$ は素フィルターかつ極大フィルターである. また、例 3 においては $\{1, a, b, c\}$ は素フィルターであるが、極大フィルターではない. この例では極大フィルターは $\{1, a, b, c, d\}, \{1, a, b, c, e\}$ の 2 つである. このように極大フィルターは存在しても一意的とは限らない.

極大フィルターの性質について以下のようなものがあるが、それらの証明はここでは重要ではなくまた多くの本にあるので省略する([5], [6]).

補題 1 $x \in K, x \neq 0$ とすると $x \in F$ となる K の極大フィルター F が存在する.

補題 2 F を K の極大フィルターとすると、 $x \in K$ に対して、 $x \in F$ ならば $u \wedge x = 0$ となる $u \in F$ が存在する. したがって $Nx \in F$ である.

補題 3 極大フィルターは素フィルターである.

これだけの準備で、任意の(含意を持つ)クリーネ代数の適当な商代数が最も簡単な(含意を持つ)クリーネ代数に埋め込み可能であることが証明できる.

いま、 M を K の任意の極大フィルターとし、 M による分割から定義される同値関係 ' $\sim$ ' について、 K の部分集合を次のように定義する.

$$M_0 = \{x \in K \mid x \in M, Nx \in M\}$$

$$M_{1/2} = \{x \in K \mid x \in M, Nx \in M\}$$

$$M_1 = \{x \in K \mid x \in M, Nx \in M\}$$

つまり、 $\sim$ を次のように定義するのである:

$x, y \in K$ に対して、

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in M_j \text{ となる } M_j \text{ が存在する}$$

言葉でいえば、 x, y が同じ集合 M_j に属するとき限り $x \sim y$ とするのである. ここで注意しなければならないのは、補題 2 から $x \in M$ かつ $Nx \in M$ となる場合は存在しないので、 K は高々 3 つの部分集合に分割されることである.

補題 4 関係 $\sim$ は K における合同関係である.

証明 関係 $\sim$ が合同関係であることを示すには、次のことを示せばよい:

(1) 関係 $\sim$ は同値関係である;

(2) $x \sim a$ かつ $y \sim b$ のとき、 $Nx \sim Na, x \wedge y \sim a \wedge b, x \rightarrow y \sim a \rightarrow b$ である.

上述の補題を用いれば簡単に証明できるので、ここでも証明は省略する([4]).

この補題により、クリーネ代数 K が集合としていくつかの部分集合に分割され、各部分集合を一つのものともみなすとき、そのようなもの全体に対して演算が矛盾なく定義できる。正確に言えば、 $x \in K$ を代表元とする $\sim$ に関する同値類を $[x] = \{y \in K \mid x \sim y\}$ 、同値類全体を $K/\sim = \{[x] \mid x \in K\}$ で表し、 $K/\sim$ の中に以下のように演算 $\wedge$, $\vee$, N , $\rightarrow$ を定義する：

$$\begin{aligned} [x] \wedge [y] &= [x \wedge y] \\ [x] \vee [y] &= [x \vee y] \\ N[x] &= [Nx] \\ [x] \rightarrow [y] &= [x \rightarrow y] \end{aligned}$$

このようにして作られた代数系 $K/\sim = \langle K/\sim, \wedge, \vee, N, \rightarrow, [0], [1] \rangle$ は K の商代数と呼ばれる。では商代数 $K/\sim$ はその上の演算に関してどのような構造を持っているか? という問いが自然に生じる。これに対する答が次の定理である。

定理 1 (準同型定理) K を任意のクリーネ代数、 M を K の極大フィルターとする。このとき代数系 $K/\sim = \langle K/\sim, \wedge, \vee, N, \rightarrow, [0], [1] \rangle$ はクリーネ代数となる。

証明 写像 $\xi: K \rightarrow K/\sim$, $\xi(x) = [x]$ が準同型写像であることから得られる。

実は補題 4 及び定理 1 の証明においては、 M が極大フィルターであることは全く用いられていない。そこではただフィルターであるということだけが重要である。したがって、極大フィルターの性質を使えばより強い結果が得られる。事実次の補題、定理が成り立つ。

関数 $V: K/\sim \rightarrow 3$ を

$$V([x]) = \begin{cases} 0 & (x \in M_0) \\ 1/2 & (x \in M_{1/2}) \\ 1 & (x \in M_1) \end{cases}$$

で定義すると、

補題 5 関数 V は単射かつ準同型写像である。また $M_{1/2} \neq \emptyset$ ならば V は全射であり、したがって $K/\sim$ は 3 と同型になる。

この補題からすぐに次の定理が得られる。

定理 2 任意のクリーネ代数 K の適当な商代数は、最も簡単なクリーネ代数 3 に埋め込み可能である。

3. ファジィ論理

ここでは、(含意を持つ)クリーネ代数に対応する論理、すなわち、リンデンバウム代数が(含意を持つ)クリーネ代数となるような論理を定義しよう。これをファジィ論理 F と呼ぶことにする。

まず、 F のアルファベットとして、可算個の命題変数 $p_1, p_2, p_3, \dots$ 、論理記号として $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ を用意する。命題変数の集合を Π で表すことにする。すなわち、 $\Pi = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ とおく。

定義 F の論理式を次のように帰納的に定義する。

- (1) 命題変数は論理式である
 - (2) A, B が論理式であるとき、 $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$, $A \rightarrow B$ は論理式である。
 - (3) 以上で定義されたものだけが論理式である。
- さて、天下りの的であるが、 F の公理系について述べよう([4])。ここで、 $A, B, \dots$ は任意の論理式とする。

公理

- (A 1) $A \wedge B \rightarrow A$
- (A 2) $A \rightarrow A \vee B$
- (A 3) $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$
- (A 4) $A \rightarrow A \wedge A$
- (A 5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow B \wedge C)$
- (A 6) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C)$
- (A 7) $A \rightarrow \neg \neg A$
- (A 8) $\neg \neg A \rightarrow A$
- (A 9) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

- (A 10) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 (A 11) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
 (A 12) $A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
 (A 13) $A \wedge \neg A \rightarrow B \vee \neg B$
 (A 14) $\neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$
 (A 15) $A \wedge \neg A \wedge B \wedge \neg B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow \neg (C \rightarrow C)$
 (A 16) $A \wedge \neg B \rightarrow \neg (A \rightarrow B) \vee B$
 (A 17) $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$

推論規則： $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$

ファジイ論理 F と論理式 A に対して、論理式 A が F で証明可能であることを表す $\vdash_F A$ を次のように定義する：

有限個の論理式の列 $A_1, A_2, \dots, A_n$ で

- (1) $A = A_n$;
 (2) 任意の A_i について A_i は公理であるか、あるいは論理式 A_j, A_k (ただし, $j, k < i$) から推論規則によって得られる

となるものが存在する

ファジイ論理 F 以外の論理はここでは考えないから、 $\vdash_F A$ を簡単に $\vdash A$ で表すことにする。

注意：今後、 $p_0 \rightarrow p_0$ を t , $\neg t$ を f と略記する。このとき任意の論理式 A に対して $\vdash (A \rightarrow A) \rightarrow t$ かつ $\vdash t \rightarrow (A \rightarrow A)$ が成り立つ。実際、 $\vdash t \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow t)$ かつ $\vdash t$ だから推論規則を用いて、 $\vdash (A \rightarrow A) \rightarrow t$ である。逆も同様。したがって、公理 (A 15) は次のように表せる：

$$A \wedge \neg A \wedge B \wedge \neg B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow f$$

今後、これを公理として採用する。

後で必要になるいくつかの補題について述べよう。

補題 6 $\vdash A \rightarrow B$ かつ $\vdash B \rightarrow C$ ならば $\vdash A \rightarrow C$ である。

補題 7 任意の論理式 A に対して、 $\vdash A \rightarrow t$, $\vdash f \rightarrow A$ が成り立つ。

ここまではファジイ論理の形式論的側面ともいうべき部分である。これに対して、ファジイ論理の論理式をクリーネ代数上で解釈することで、ファジイ論理の意味論的な部分が得られる。

さて、論理式の解釈(あるいは真理値)を決定す

るために次のような概念を準備する。

定義 評価関数 τ

写像 $\tau: \Pi \rightarrow 3$ を評価関数と呼ぶ。ここで、3 は 2 節で定義した(含意を持つ)クリーネ代数 3 のことである。つまり、 $\tau(A)$ を論理式 A の真理値と考えるのである。

言葉でいうと評価関数とは論理式に対してその真理値を、すなわち、論理式のクリーネ代数 3 上での解釈を与えるものである。この定義では、命題変数についてしか真理値が与えられていないが、以下のようにすれば一般の論理式に対しても真理値が計算できる。それには、命題を構成する命題変数の値と論理記号による演算を用いて計算をしていく。これは次のように帰納的に定義できる：

$$\begin{aligned}\tau(\neg A) &= 1 - \tau(A) \\ \tau(A \wedge B) &= \min\{\tau(A), \tau(B)\} \\ \tau(A \vee B) &= \max\{\tau(A), \tau(B)\} \\ \tau(A \rightarrow B) &= \min\{1 - \tau(A) + \tau(B), 1\}\end{aligned}$$

したがって、評価関数が与えられれば論理式の真理値が計算できる。

例 $\tau(p_0) = 1$, $\tau(p_1) = \tau(p_2) = 1/2$, $\tau(p_n) = 0$ ($n \geq 3$) となる評価関数 τ について、論理式 $A = p_0 \rightarrow p_1$, $B = p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_3)$ の真理値はそれぞれ

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \tau(p_0 \rightarrow p_1) \\ &= \min\{1 - \tau(p_0) + \tau(p_1), 1\} \\ &= 1/2 \\ \tau(B) &= \tau(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_3)) \\ &= \min\{1 - \tau(p_0) + \tau(p_1 \vee p_3), 1\} \\ &= \min\{1 - 1 + \max\{\tau(p_1), \tau(p_3)\}, 1\} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

一般に異なる評価関数に対する論理式の真理値は異なるが、例えば $A \rightarrow A$ のようにどんな評価関数に対しても真理値が 1 となるもの(このような論理式は valid と呼ばれる)が存在する。このような valid な論理式全体(意味論的)は証明可能な論理式全体(形式論的)と一致するということを主張するのが完全性定理である。これは次の 2 つの部分から成っている：

(1) 論理式 A がファジイ論理 F で証明可能なら

ば, それは valid, すなわち任意の評価関数 τ について $\tau(A)=1$ である (健全性定理 Soundness Theorem);
 (2) valid な論理式は F で証明可能である.

ここでは(1)を, すなわち, ファジィ論理 F で証明可能な論理式 A は valid であることを示そう.

定理 3 健全性定理 (Soundness Theorem)

A を任意の論理式とする. このとき,

$$\vdash A \Rightarrow A \text{ は valid である}$$

証明 証明の構成に関する帰納法による. すなわち, 各公理 X について $\tau(X)=1$, また推論規則が健全性を保存すること ($X, X \rightarrow Y$ が valid ならば Y も valid である) を示せばよい. 簡単な計算で得られるので証明は省略する.

4. 完全性定理

本節において, ファジィ論理 F の完全性定理, すなわち, 任意の評価関数 τ に対して $\tau(A)=1$ ならば A は F において証明可能であること, を示そう. 健全性定理と合わせると, どのような論理式が証明可能であるかということが簡単な計算でわかることになり, 応用上も非常に便利である. この定理の証明には, ファジィ論理 F のリンデンバウム代数が用いられる.

定義 リンデンバウム代数

ファジィ論理 F の論理式全体を Φ とし Φ に次のような同値関係 $\equiv$ を入れる: $A, B \in \Phi$ とするとき,

$$A \equiv B \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B \text{ かつ } \vdash B \rightarrow A$$

このとき簡単な計算で関係 $\equiv$ が合同関係であることがわかる.

さて, 合同関係 $\equiv$ による Φ の商集合を L^* とする. すなわち, $[A] = \{X \in \Phi \mid A \equiv X\}$, $L^* = \{[A] \mid A \in \Phi\}$ とする. L^* には自然に次のような順序 (partial order) $\leq$ が入る:

$$[A], [B] \in L^* \text{ に対して,}$$

$$[A] \leq [B] \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B$$

もちろん, $\leq$ は順序であるから

- (1) $[A] \leq [A]$ (反射律);
- (2) $[A] \leq [B]$ かつ $[B] \leq [A]$ ならば $[A] = [B]$ (反対称律);
- (3) $[A] \leq [B]$ かつ $[B] \leq [C]$ ならば $[A] \leq [C]$ (推移律)

が成り立つが, この順序に関して次の補題が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{補題 8 } \inf\{[A], [B]\} &= [A \wedge B] \\ \sup\{[A], [B]\} &= [A \vee B] \end{aligned}$$

そこで L^* に改めて演算 $\min, \max$ に対応する Δ, ∇ を

$$\begin{aligned} [A] \Delta [B] &= [A \wedge B] \\ [A] \nabla [B] &= [A \vee B] \end{aligned}$$

で定義すれば, この補題から $\langle L^*, \Delta, \nabla \rangle$ は束となる.

さらに補題 7 から, 任意の論理式 A に対して $\vdash A \rightarrow t, \vdash f \rightarrow A$ が言え, $[t]=1, [f]=0$ とおけば, $0 \leq [A] \leq 1$ となる.

よって, $\langle L^*, \Delta, \nabla, 0, 1 \rangle$ は有界な束である. しかも F の公理 (A12) から $\langle L^*, \Delta, \nabla, 0, 1 \rangle$ は分配束である.

次に, L^* に演算 $N, \rightarrow$ を以下のように導入する: $[A], [B] \in L^*$ に対して,

$$\begin{aligned} N[A] &= [\neg A], \\ [A] \rightarrow [B] &= [A \rightarrow B] \end{aligned}$$

と定義する.

以上のように定義した代数系 $\langle L^*, \Delta, \nabla, N, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ をファジィ論理 F のリンデンバウム代数 (Lindenbaum algebra) と呼ぶ. このリンデンバウム代数について, F の公理を用いることで代数系 $\langle L^*, \Delta, \nabla, N, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ が (含意を持つ) クリーネ代数であること示される.

用語も含めてきちんと表現すれば, 次の定理が得られたことになる.

定理 4 ファジィ論理 F のリンデンバウム代数 L^* は含意をもつクリーネ代数である.

このリンデンバウム代数の持つ基本的な性質として, 任意の論理式 A に対して,

$$\vdash A \Leftrightarrow [A] = 1 \quad (*)$$

が成り立つ。

さて、ファジイ論理 F の完全性を示すためにその対偶を証明することにしよう。すなわち、 $\models A$ ($\vdash A$ でない) と仮定して $\sigma(A) \neq 1$ となる評価関数 σ の存在を示せばよい。ここでは実際にそのような評価関数 σ を構成する。

$\models A$ と仮定する。定理 4 からファジイ論理のリンデンバウム代数 L^* はクリーネ代数である。上述のリンデンバウム代数の性質 (*) からクリーネ代数 L^* において $[A] \neq 1$ である。したがって、 L^* において $N[A] \neq 0$ である。このとき、補題 1 から $N[A] \in M$ となる L^* の極大フィルター M が存在する。この M を用いて評価関数 σ を次のように定義する：

p を任意の命題変数とすると、

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1 & [p] \in M \text{ \& } N[p] \notin M \text{ のとき} \\ 1/2 & [p] \in M \text{ \& } N[p] \in M \text{ のとき} \\ 0 & [p] \notin M \text{ \& } N[p] \in M \text{ のとき} \end{cases}$$

この評価関数 σ に対して次の補題が成り立つことがわかる。

補題 9 任意の論理式 $B \in \Phi$ について

$$\sigma(B) = \begin{cases} 1 & [B] \in M \text{ \& } N[B] \notin M \text{ のとき} \\ 1/2 & [B] \in M \text{ \& } N[B] \in M \text{ のとき} \\ 0 & [B] \notin M \text{ \& } N[B] \in M \text{ のとき} \end{cases}$$

さて、 $\models A$ となる論理式 A について $N[A] \in M$ だからこの補題により $\sigma(A) \neq 1$ となる。すなわち、 $\models A$ ならば $\sigma(A) \neq 1$ となる評価関数 σ が存在する。したがって、以上をまとめると次の定理が証明されたことになる。

定理 5 完全性定理 (Completeness Theorem)

任意の論理式 A に対して、

$\vdash A$

$\Leftrightarrow$ 任意の評価関数 τ に対して $\tau(A) = 1$

この定理から論理式 A がファジイ論理 F で証明できるかどうかは、任意の評価関数 τ に対して $\tau(A)$ が 1 になるかどうか調べればよいことがわかる。

例 論理式 $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ はファジイ論理 F で証明できない。なぜなら、 $\tau(A) = 1/2$, $\tau(B) =$

0 となる評価関数 τ に対して論理式の値を計算すると、 $\tau(A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B) = 1/2$ となり、したがって F では証明できない。

この例における論理式 $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ は、ファジイ論理 F の推論規則 (三段論法) A かつ $A \rightarrow B$ ならば B である、とは異なるものであることに注意しなければならない。推論規則は論理式 A , $A \rightarrow B$ が共に証明可能であれば B も証明可能であることを言っているに過ぎない。この論理式と推論規則の区別がファジイ推論に関する本のいくつかにおいてはなされていない。実際、ここで紹介したファジイ論理 F においては演繹定理が成り立たないので、このような区別は絶対に必要である。

5. まとめ

以上 [4] に従ってファジイ論理とその代数 (リンデンバウム代数) について解説してきた。はじめにも述べたように、真理値の集合がどのような構造を持つかによって様々な論理が対応するから、ここで紹介したものだけがファジイ論理ではない。もちろん他のファジイ論理も可能である。ただ、どのようなファジイ論理を考えるにせよ、論理として捉えるのであれば、公理や推論規則を明確にしたうえで議論をする必要があると思う。対象は fuzzy なものであってもそれについての議論は crisp でなければならない。

参 考 文 献

- [1] J. Lukasiewicz (1920) : On 3-valued logic, Polish Logic, Oxford University Press, Oxford, 1967
- [2] M. Mukaidono : A set of independent and complete axiom for a fuzzy algebra (kleene algebra), Proc. 11-th intern. symp. on Multi-valued logic, univ. of Oklahoma, 1981
- [3] 千谷 : ファジイの数学的基礎, 日本ファジイ学会編 (講座ファジイ 1), 日刊工業新聞社, 1992

[4]近藤：ファジィ論理の特徴付け，日本ファジィ学会誌，1995年(予定)

(1994年9月25日 受付)

[5]H.Rasiowa and R.Sikorski：The mathematics of metamathematics, Warsawa, 1963

[6]H.Rasiowa：An introduction to non-classical logics, North-Holland, 1974

[7]G. Birkhoff：Lattice theory 3rd ed., American Mathematical Society, 1967

[問い合わせ先]

〒274 船橋市三山2-2-1

東邦大学理学部情報科学科

近藤 通朗

☎0474-72-8722

著 者 紹 介

近藤 通朗(こんどう みちろう)

東邦大学理学部情報科学科

1988年 立教大学理学研究科博士
後期課程修了，1989年 日本学術振興
会特別研究員 PD，1989年 日本工業
大学システム工学科講師，1992年 東
邦大学理学部情報科学科講師，日本
数学会会員