ファジィ多次元 0-1 ナップサック問題の解法†

岡田 真幸*1 玄 光男*2

本論文では、係数をファジィ数で表現した複数の制約式をもつファジィ多次元 0-1 ナップサック問題を定式化し、その近似解法を提案する。この問題の解法として、優れた近似解法の一つである有効勾配法の双対法を拡張して、通常の問題に変換しないで、計算過程においてもファジィ数のまま演算を行い、近似解とファジィ数で表現された目的関数値を求める解法を提案する。なお、適合指標を導入して、ファジィ数を係数とする制約式の成り立つ度合いを定義する。この定義は、制約式の左辺と右辺のファジィ数のメンバーシップ関数の共通部分の面積に関連しているため、メンバーシップ関数の形状を度合いに反映することができる。さらに、数値例により可能性理論に基づく指標を用いた解法との比較を行い、解の性質の相違を示す。

キーワード：0-1 ナップサック問題、ファジィ数、適合指標、有効勾配法

1. はじめに

組合せ問題の一つとして、多次元 0-1 ナップサック問題がある。この問題は通常の 0-1 変数をもつナップサック問題を複数の制約式をもつ問題に拡張したものであり、NP-困難である問題として知られている。この問題は、資金計画問題などのさまざまな現実の問題へ応用可能である。一般に、この問題の係数や制約は、意思決定者や専門家の知識や経験などにより、実数値として明確に定められている。しかし、専門家としての判断のあいまいさや知識の不明確さにより、係数や制約を確定できない場合も多い。このような場合には、係数や制約のあいまいさをファジィ数で表現し、それを係数とした多次元ナップサック問題を考えた方が現実的に即していると思われる。そこで、本論文では、ファジィ数を係数とするファジィ多次元 0-1 ナップサック問題を定式化し、その解法を提案する⁹⁾。

係数のあいまいさを取り扱ったファジィ線形計画問題の解法が、多数報告されているので、ここで定式化するファジィ多次元 0-1 ナップサック問題にこれらの解法を適用して、解を求めることも可能である。

しかし、従来のファジィ線形計画問題は、主に連続変数を取り扱っているのに対して、ファジィ多次元 0-1 ナップサック問題は離散変数問題(いわゆる、組合せ問題)であるという本質的な相違がある。しかも、ファジィ数を係数にもつ離散変数問題の研究は数少ない^{2,3,7,8,10,12)}。連続変数を取り扱ったファジィ線形計画問題の解法のほとんどは、可能性理論¹⁾など各種の方法で通常の線形計画問題に変換し、従来のシンプレックス法などを用いる解法である^{11,13,14)}。この変換の過程において、可能性理論による制約式の成り立つ度合いの解釈では、右辺と左辺とのファジィ数のメンバーシップ関数の交点の値に関連しているため、変換後も線形性が保たれるが、メンバーシップ関数の形状による相違が考慮されていない。

そこで、ファジィ数を係数とする制約式の成り立つ度合いの解釈として、Kaufmann と Gupta による適合指標 (agreement index)⁵⁾を導入した定義を用いると、右辺と左辺とのファジィ数のメン

† A Method for Solving Fuzzy Multi-Dimensional 0-1 Knapsack Problems
Shinkoh OKADA, Mitsuo GEN

*1 足利短期大学
Ashikaga Junior College

*2 足利工業大学
Faculty of Engineering, Ashikaga Institute of Technology

バーシップ関数の共通部分の面積に関連しているために、メンバーシップ関数の形状の違いを度合いに反映することができる。しかし、この定義を用いて制約式を通常の問題に変換すると、変換後の制約式の線形性は保存されず、決定変数に関して非線形計画問題となり、容易に解を求めることができないという欠点がある。

ところが、離散変数問題は、連続変数問題と比較して定式は類似しているが、その解法は、全く異なり、最適解法や近似解法にかかわらず、決定変数に数値を逐次代入して、制約式の成否を判断して、実行可能解を求める解法が一般的であり、変換後の問題が非線形であることは、考慮する必要がなくなる。

多次元 0-1 ナップサック問題の解法には、最適解法である動的計画法や分枝限定法、近似解法である緩和法や貪欲解法などが知られているが、係数をファジィ数で表現したファジィ多次元 0-1 ナップサック問題に対しては、問題そのものがないまいであることから、計算量の大きい最適解を求めるよりも近似解を求める方が現実的であると思われる。

そこで、本論文では、解法として優れた近似解法の一つである有効勾配法の双対法¹⁵⁾を拡張し、通常の問題に変換しないで、計算過程においてもファジィ数のまま演算を行い、近似解とファジィ数で表現された目的関数値を求める解法を提案する。なお、ファジィ数を係数とする制約式の成り立つ度合いの解釈として前述の適合指標を導入した定義を用いる。更に、数値例により可能性理論に基づく解法による解や最適解との比較を行い、ここで得られた解を評価する。

2. ファジィ数の演算

本論文で取り扱うファジィ数 $\tilde{a}$ のメンバーシップ関数を $\mu_{\tilde{a}}(x)$ で表現し、演算として拡張原理により、ファジィ数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ との加法 $\tilde{a} + \tilde{b}$ と実数 k によるファジィ数 $\tilde{a}$ のスカラー倍 $k\tilde{a}$ を取り扱う。ファジィ数 $\tilde{a}$ を実数で代表する値として、中心や左右の広がりを考慮した値である通常代表数

(ordinary representative)⁴⁾ $\hat{a}$ を用いる。最近の実用例では、メンバーシップ関数として三角型が多く用いられている。これは、意思決定者にとって、左端、右端及び中心の3点を決定すればよいことから、実用性と簡便性を兼ね備えているためである。このような理由から、本論文では、主として三角型ファジィ数を取り扱うが、一般のファジィ数に対しても計算が複雑になるが拡張可能である。

三角型ファジィ数 $\tilde{a}$ のメンバーシップ関数 $\mu_{\tilde{a}}(x)$ は a^L, a^M 及び a^R ($a^L < a^M < a^R$)を用いて、次のように表現される¹³⁾。

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a^L}{a^M-a^L} + 1 & x \in [a^L, a^M] \\ \frac{a^M-x}{a^R-a^M} + 1 & x \in [a^M, a^R] \\ 0 & x \notin (a^R, a^L) \end{cases}$$

以下、便宜上、三角型ファジィ数 $\tilde{a}$ を $\tilde{a} = (a^L, a^M, a^R)$ と表現する。なお、ファジィ数の特別な場合である実数を表現するには、 $\tilde{a}$ に対して $a^L = a^M = a^R$ とする。三角型ファジィ数 $\tilde{a}$ が $a^L \geq 0$ である場合、ファジィ数 $\tilde{a}$ を正のファジィ数という。

三角型ファジィ数の加法 $\tilde{a} + \tilde{b}$ 、実数 k による実数倍 $k\tilde{a}$ 及び通常代表数 $\hat{a}$ は、それぞれ次のように計算される。

$$\begin{aligned} \tilde{a} + \tilde{b} &= (a^L, a^M, a^R) + (b^L, b^M, b^R) \\ &= (a^L + b^L, a^M + b^M, a^R + b^R), \\ k\tilde{a} &= k(a^L, a^M, a^R) \\ &= \begin{cases} (ka^L, ka^M, ka^R) & \text{for } k \geq 0 \\ (ka^R, ka^M, ka^L) & \text{for } k < 0 \end{cases} \\ \hat{a} &= \frac{a^L + 2a^M + a^R}{4} \end{aligned}$$

ファジィ数 $\tilde{a}$ を用いて、ファジィ上限を表現するファジィ集合 $\tilde{A}$ は、次のように表現される¹³⁾。

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_u \{\mu_{\tilde{a}}(u) \mid x \leq u\}$$

特に、ファジィ数 $\tilde{a}$ が、三角型の場合には、次のように表現される(図1)。

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, a^M) \\ \frac{a^M - x}{a^R - a^M} + 1 & x \in [a^M, a^R] \\ 0 & x \in (a^R, \infty) \end{cases}$$

図1 ファジィ数 $\tilde{a}$ とファジィ集合 $\tilde{A}$

3. ファジィ数の不等式関係

Kaufmann と Gupta⁵⁾により, 二つのファジィ数の適合度を表現するために定義された適合指標を導入して, ファジィ数を係数にもつ不等式の成り立つ度合いを定義する. ファジィ数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ の不等式 $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ について, $\tilde{a}$ は $\tilde{b}$ に対して, どの程度小さいかを示す度合い(不等式の成り立つ度合い) $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ を考える. ここで, 不等式 $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ におけるファジィ数 $\tilde{b}$ に対して, ファジィ上限を表す集合 $\tilde{B}$ を導入し, $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ は, $\tilde{a}$ が $\tilde{B}$ にどの程度包含されているかを表す度合いであるにとらえ, 次のように定義する.

[定義1] 三角型ファジィ数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ (ただし, $a^L = a^M = a^R$ ではない)に対して, $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ を次のように定義する. (図2)

$$P(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = \frac{\int_{a^L}^{a^R} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} dx}{\int_{a^L}^{a^R} \mu_{\tilde{a}}(x) dx}$$

図2 度合い $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$

また, 実数 a とファジィ数 $\tilde{b}$ に対して, $P(a \leq \tilde{b})$ を次のように定義する. (図3)

$$P(a \leq \tilde{b}) = \mu_{\tilde{B}}(a).$$

ここで, $P(a \leq \tilde{b})$ は, $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ における分母 $\int_{a^L}^{a^R} \mu_{\tilde{a}}(x) dx$ が0である場合の定義であり,

$$\lim_{\substack{a^L \rightarrow a^M \\ a^R \rightarrow a^M}} P(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = P(a \leq \tilde{b})$$

を意味している.

幾何学的な意味では, 図2に示すように度合い $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ は, ファジィ数 $\tilde{a}$ の面積に対するファジィ数 $\tilde{a}$ とファジィ集合 $\tilde{B}$ の共通部分の面積の割合, すなわち,

$$P(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = \frac{\text{面積 } A \cap B}{\text{面積 } A}$$

と解釈される.

また, 定義1は, 計算が複雑になるが一般のファジィ数に対しても同様に定義できる⁵⁾. 明らかに, 次の性質が成り立つ.

[性質1] 三角型ファジィ数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ に対して, 次の(1)~(4)の関係が成り立つ.

- (1) $P(\tilde{a} \leq \tilde{a}) = 1$
- (2) $0 \leq P(\tilde{a} \leq \tilde{b}) \leq 1$
- (3) $P(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = 0 \Leftrightarrow b^R \leq a^L$
- (4) $P(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = 1 \Leftrightarrow a^M \leq b^M \text{ and } a^R \leq b^R$

次に, ファジィ数を含む不等式に対して, Dubois と Prade による可能性理論を用いた解釈と本論文で定義した解釈との相違について述べる.

可能理論に基づく4種類の指標^{1,13)}の一つである $\text{Pos}(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ は, 「 $\tilde{b}$ が $\tilde{a}$ 以上である可能性の度

図3 度合い $P(a \leq \tilde{b})$

合い」と解釈され、次のように定義されている。

$$\text{Pos}(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = \sup\{\min(\mu_{\tilde{a}}(u), \mu_{\tilde{b}}(v)) \mid u \leq v\}$$

まず、不等式の成り立つ度合いの相違を数値例により示す。三角型ファジィ数 $\tilde{a} = (t-2, t, t+2)$ と $\tilde{b} = (0, 10, 20)$ として、変数 t の変化に対する $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ と $\text{Pos}(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ との成り立つ度合いの相違を図4に示す。三角型ファジィ数のような線形のメンバーシップ関数をもつファジィ数では、 $\text{Pos}(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ は線形に図示される。他の3種類の指標でも同様である。それに対して、定義1の指標 $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ は、2つの放物線を組み合わせた曲線として図示される。指標 $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ は、指標 $\text{Pos}(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ と比較して、1に近い方では楽観的に、0に近い方では悲観的に表現される。しかし、一般のファジィ数では、これらの性質は必ずしも成り立たないことを注意しておく。

可能性理論に基づく4種類の指標を用いた不等式 $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ の解釈では、それぞれの指標は、ファジィ数 $\tilde{a}$ のメンバーシップ関数の一方の広がりのみに関係していて、その他方の広がりはその成り立つ度合いには無関係である。4種類の指標のいくつかを同時に用いれば、メンバーシップ関数の形状の相違を度合いに反映させることができるが、通常は、4種類のうちのいずれか1種類を不等式の解釈として用いている。

それに対して、定義1による解釈では、ファジィ数 $\tilde{a}$ のメンバーシップ関数の面積に関連しているために、メンバーシップ関数の左右の広がりをその度合いに直接反映させることが可能である。

例えば、図5の(a)と(b)に示すファジィ数間の不等式 $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ に対する可能性の指標では、共に度

図4 $P(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ と $\text{Pos}(\tilde{a} \leq \tilde{b})$ の成り立つ度合い

合いが $\text{Pos}(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = 0.5$ であるのに対して、定義1での度合いは、0.5と0.25となる。他の3種類の指標の場合も同様である。このように定義1の方が、可能性理論を用いた解釈よりもメンバーシップ関数の形状の相違に対して敏感であると思われる。以上のことから、適合指標を導入した定義1は、可能性理論に基づく指標にあるような幾何学的な各種の興味深い性質はないが、実用的な観点からは、直感と一致しており、優れた指標の一つであるといえる⁵⁾。

ファジィ数を係数とした線形計画問題を可能性理論に基づく指標を用いて、通常の計画問題に変換する手法が多数研究され、報告されているが、変換後の問題が線形性が保たれているため、シンプレックス法などの手法により容易に解が求まることが大きな理由と思われる。しかし、前述のことからメンバーシップ関数の形状の相違を敏感に反映することは難しいと思われる。これに対して、ファジィ数を係数とした線形計画問題を定義1による指標により変換した問題では、形状の相違を敏感に反映することができるが、線形性は保たれないために、決定変数に関して非線形計画問題になり、容易に解を求めるわけにはいかない。

ところが、整数計画問題などの離散変数問題(組合せ問題)は、問題の定式では、連続変数問題と類似しているが、解法は異なり、数値を逐次、変数

図5 不等式 $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ の度合いの相違

に代入して制約式の成否を判定する解法である。このため、ファジィ数を係数とした離散変数問題を実係数の問題に変換せずに解を求めることが可能となる。

4. ファジィ多次元 0-1 ナップサック問題

多次元 0-1 ナップサック問題とは、通常のナップサック問題が単一の制約式をもつものに対して、複数の制約式をもつ問題である。本論文では、この問題の係数をファジィ数に拡張し、次のような m 個の制約式と n 個の決定変数をもつ、係数がすべて正のファジィ数である多次元 0-1 ナップサック問題を取り扱う。

FMDKP :

$$\max. \quad \tilde{z} = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \quad (1)$$

$$\text{subj.to} \quad \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \quad (2)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, 2, \dots, n$$

ここで、各係数は次のとおりである。

$\tilde{c}_j$: 目的関数 $\tilde{z}$ の j 番目の正のファジィ数で表現された係数,

$\tilde{a}_j^T = (\tilde{a}_{1j}, \tilde{a}_{2j}, \dots, \tilde{a}_{mj})$: 正のファジィ数を要素にもつ制約式の j 番目の係数ベクトル,

$\tilde{b}^T = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m)$: 正のファジィ数を要素にもつ右辺定数ベクトル,

n : 決定変数の数,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: 決定変数で 0 または 1 のどちらかの値をとる。

この問題は、実用上次のような問題を取り扱うことができる⁹⁾。すなわち、 n 個のプロジェクトの候補があるとして、 j 番目のプロジェクトを実際に行うか否かという選択を、

$$x_j = \begin{cases} 1; & \text{プロジェクト } j \text{ を実施するとき,} \\ 0; & \text{プロジェクト } j \text{ を実施しないとき,} \end{cases}$$

で表す。プロジェクト j を実施すれば、おおよその利益 $\tilde{c}_j$ が見込まれる。しかし、プロジェクト遂行のためには、工数、材料、機械といった資源が必要である。資源には、 $i=1, 2, \dots, m$ の m 種類があ

り、プロジェクト j は資源 i をおおよそ $\tilde{a}_{ij}$ だけ必要とする。資源 i の利用可能量に対しては、だいたい $\tilde{b}_i$ 以下という漠然とした値で与えられているとして、おおよその利益 $\tilde{z}$ ををできるだけ多くするにはどのプロジェクトを採用すればよいか、という問題である。

よって、この問題 FMDKP では、各制約式 (2) の左辺および目的関数 (1) の係数の不明確さを、ファジィ数で表現している。さらに、制約に対する漠然性を制約式の右辺のファジィ定数として取り扱う。すなわち、制約を完全に満たさなければならないという条件を緩め、制約をあらかじめ与えられた度合い以上で満足すればよいとみなす。この制約不等式の成り立つ度合いには、定義 1 を適用する。よって、制約式の成り立つ度合いの下限 α に対して、制約式 (2) を

$$P\left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i\right) \geq \alpha, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

と解釈する。

5. 解 法

ファジィ多次元 0-1 ナップサック問題の解法を提案する。このような整数計画問題の解法として、最適解法と近似解法が知られているが、本論文では、定式化した問題そのものがあいまいであることから、計算量の大きい最適解法よりも近似解法の方が現実的であると思われる。多次元 0-1 ナップサック問題の代表的な近似解法として、有効勾配法 (method of efficient gradient)¹⁵⁾ が報告されている。この解法は、単一の制約式をもつナップサック問題の代表的な解法である貪欲解法を拡張したものであり、簡便な解法であるが、比較的良い近似解が得られることで知られている⁹⁾。さらに、有効勾配法には、主法¹⁶⁾と双対法¹⁵⁾があり、制約式を満足する限り決定変数を次々と 1 にしていくという主法に対して、双対法は、逆に、まず決定変数をすべて 1 にし、制約式を満足するまで有効勾配にしたがって決定変数を 0 に置き換えていくという手法である。主法に対して、双対法の方が最適解への方向性という点で優れていると言わ

れている⁶⁾。

実係数の問題の拡張という観点から、本論文では、有効勾配法の双対法に基づいた近似解法を提案する。すなわち、ある解に対して、式(3)の左辺の値から制約式の成り立つ度合いを求め、意思決定者の設定した制約式を満足する度合いの下限 α との比較により、解の実行可能性を判定する。次に、有効勾配を求め、その値を指針として実行可能解を逐次更新し、近似解とそのファジィ数で表現された目的関数値を得る。ここで、有効勾配とは、解に含まれるべき決定変数の選択の指針であり、次に示す計算法のステップ3,4で制約式の係数とスラック量との内積および目的関数の係数の割合として計算される。本来はファジィ数間の減算、乗算および除算を定義して用いなければならないと考えられるが、有効勾配が次に含むべき変数の方向性を示す値であり、絶対的な基準としての意味付けをもつものではないことや計算の複雑さを考慮して、ファジィ数を通常代表数に変換して実数間の演算とすることで十分であると考えられる。さらに、有効勾配は、単位資源当たりの利益を意味している。したがって、各制約式のスラック量を可能な限り小さくすること、すなわち、制約式の成り立つ度合いを α 以上で、かつ α に可能な限り近づけるように解を更新することが、ファジィ数で表現された目的関数値の通常代表数の最大化となる。

この解法は、二つの段階で構成されている。すなわち、有効勾配にしたがって実行可能解を探索する段階(ステップ1～5)、次に得られた実行可能解を次々と更新する段階(ステップ6～8)である。提案する解法を次に示す。

[ステップ0] 制約不等式の成り立つ度合いの下限 α を意思決定者により設定する。各制約式の右辺定数による強さの偏りをなくすために、あらかじめ i 番目の制約式の両辺を $\tilde{b}_i$ の通常代表数 $\hat{b}_i$ による除算により、スケーリングを施しておく。

$$\tilde{a}_{ij} \leftarrow \frac{\tilde{a}_{ij}}{\hat{b}_i}, \quad j=1,2,\dots,n$$

[ステップ1] 決定変数の添え字で構成される集合 N を $N \leftarrow \{1,2,\dots,n\}$ 、実行可能変数の添え字の集合 N_1 を $N_1 \leftarrow N$ と、リスト $L \leftarrow \phi$ と初期化する。

決定変数をすべて1とした制約式の左辺のベクトル $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_m)$ を次のように設定する。

$$\tilde{r} \leftarrow \sum_{j \in N_1} \tilde{a}_j$$

[ステップ2] $P(\tilde{r} \leq \tilde{b}) \geq \alpha$ を満足するならば、すなわち、 $P(\tilde{r}_i \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha$, ($i=1,2,\dots,m$)ならば、ステップ6へ行く。そうでなければ、ステップ3へ行く。

[ステップ3] $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)^T$ をサープラスベクトルとし、その各要素 s_i を次のように設定する。

$$s_i \leftarrow \max\{0, \tilde{r}_i - \hat{b}_i\}, \quad i=1,2,\dots,m.$$

[ステップ4] 各 $j \in N_1$ に対して、 $\hat{a}_j^T = (\hat{a}_{1j}, \hat{a}_{2j}, \dots, \hat{a}_{mj})$ と s との内積を用いて有効勾配 g_j を次のように計算する。

$$g_j \leftarrow \frac{\hat{c}_j}{(\hat{a}_j)^T \cdot s}.$$

ただし、制約条件を満足する式が一つ増えるごとに(すなわち、 s の0成分が一つ増えるごとに)、 g_i の値を再計算する。そうでない場合には、以前の g_i の値をそのまま使用する。

[ステップ5] 次の式により、有効勾配が最小である変数の添え字 k を求め、集合 N_1 から削除し、リスト L の後ろに k を加える。

$$\begin{aligned} k &\leftarrow \underset{j \in N_1}{\text{indmin}}\{g_j\} \\ N_1 &\leftarrow N_1 \setminus \{k\} \\ L &\leftarrow L \cup \{k\} \end{aligned}$$

ここで、indmin の“ind”は、index の省略形であり、最小の有効勾配 g_i の添え字 i を意味する。次に、 $\tilde{r}$ を再計算し、ステップ2へ行く。

$$\tilde{r} \leftarrow \sum_{j \in N_1} \tilde{a}_j$$

[ステップ6] 実行可能解が得られたので、リスト L の後ろから順に要素 j を取り出す。 L が空であ

るならば、ステップ 8 へ、そうでなければステップ 7 へ行く。

[ステップ 7] ここでさらに、目的関数値を改善可能かどうかの段階に入る。

$$P(\tilde{r} + \tilde{a}_j \leq \tilde{b}) \geq \alpha \text{ であれば,}$$

$$\tilde{r} \leftarrow \tilde{r} + \tilde{a}_j$$

$$N_1 \leftarrow N_1 \cup \{j\}$$

とする。ステップ 6 へ戻る。

[ステップ 8] 近似解の添え字の集合 N_1 が得られ、ファジィ数で表現された目的関数値 $\tilde{z}$ は、次のように計算される。

$$\tilde{z} \leftarrow \sum_{j \in N_1} \tilde{c}_j$$

以上の解法により、ファジィ多次元 0-1 ナップサック問題 FMDKP の近似解を得ることができる。

6. 数値例

Senju と Toyoda による文献¹⁵⁾の数値例を引用して、係数を三角型ファジィ数に拡張した数値例を示し、提案する解法を適用した数値例を示す。ただし、右辺定数によるスケールリングは既に施されているものとする。

FMDKP 例：

$$\max \tilde{z} =$$

$$\begin{aligned} & (450, 500, 550)x_1 + (820, 900, 980)x_2 + (270, 300, 330)x_3 \\ & + (550, 600, 650)x_4 + (80, 100, 120)x_5 + (270, 300, 330)x_6 \\ \text{s.t. } & (7, 10, 13)x_1 + (36, 40, 44)x_2 + (47, 50, 53)x_3 \\ & + (65, 70, 75)x_4 + (46, 50, 54)x_5 + (55, 60, 65)x_6 \\ & \leq (130, 160, 190) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (45, 50, 55)x_1 + (17, 20, 23)x_2 + (17, 20, 23)x_3 \\ & + (73, 80, 87)x_4 + (35, 40, 45)x_5 + (82, 90, 98)x_6 \\ & \leq (120, 160, 200) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (37, 40, 43)x_1 + (27, 30, 33)x_2 + (36, 40, 44)x_3 \\ & + (36, 40, 44)x_4 + (17, 20, 23)x_5 + (45, 50, 55)x_6 \\ & \leq (115, 160, 205) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (55, 60, 65)x_1 + (36, 40, 44)x_2 + (27, 30, 33)x_3 \\ & + (62, 70, 78)x_4 + (18, 20, 22)x_5 + (45, 50, 55)x_6 \\ & \leq (120, 160, 200) \end{aligned}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j.$$

数値例の解法を次に示す。

[ステップ 0] ここでは、意思決定者により、制約不等式の成り立つ度合いの下限が $\alpha = 0.6$ と設定されたと仮定する。

[ステップ 1] 添え字の集合 N_1 とベクトル $\tilde{r}$ を次のように初期化する。

$$N_1 \leftarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\tilde{r} = ((256, 280, 304) (269, 300, 331)$$

$$(198, 220, 242) (243, 270, 297))^T$$

<反復 0：探索段階>

[ステップ 2] 制約不等式の成り立つ度合いは 0.6 以下なので、ステップ 3 へ行く。

[ステップ 3] サープラスベクトル s の値を求める。

$$s = (120 \quad 140 \quad 60 \quad 110)^T.$$

[ステップ 4] 有効勾配は次のように計算される。

$$g_1 = 500/17200 = 0.0290,$$

$$g_2 = 900/13800 = 0.0652,$$

$$g_3 = 300/14500 = 0.0207,$$

$$g_4 = 600/29700 = 0.0202,$$

$$g_5 = 100/15000 = 0.0066,$$

$$g_6 = 300/28300 = 0.0106.$$

[ステップ 5] 最小の有効勾配は、 g_6 である。よって、 N_1 , L と $\tilde{r}$ は次のようになる。

$$N_1 = \{1, 2, 3, 4, 6\},$$

$$L = \{5\},$$

$$\tilde{r} = ((210, 230, 250) (234, 260, 286)$$

$$(181, 200, 219) (225, 250, 275))^T$$

ステップ 2 へ行く。

<反復 1>

[ステップ 2] 制約不等式の成り立つ度合いは次のように計算される。

$$P((210, 230, 250) \leq (130, 160, 190)) = 0.0000,$$

$$P((234, 260, 286) \leq (120, 160, 200)) = 0.0000,$$

$$P((181, 200, 219) \leq (115, 160, 205)) = 0.2368,$$

$$P((225, 250, 275) \leq (120, 160, 200)) = 0.0000,$$

$$\tilde{z} = (2360, 2600, 2840).$$

よって, $P(\tilde{r}_i \leq \tilde{b}_i) \not\geq 0.6 (i=1, \dots, 4)$ なので, ステップ3へ行く.

[ステップ3] ベクトル s を再計算する.

$$s = (70 \ 100 \ 40 \ 90)^T.$$

[ステップ4] 有効勾配 g_j は, 以前の値をそのまま使用する.

[ステップ5] 最小の有効勾配は, g_6 である. よって, N_1, L と $\tilde{r}$ は次のようになる.

$$N_1 = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$L = \{5, 6\},$$

$$\tilde{r} = ((155, 170, 185) (152, 170, 188)$$

$$(136, 150, 164) (180, 200, 220))^T$$

ステップ2へ行く.

<反復2>

[ステップ2] 制約不等式の成り立つ度合いは, 次のように計算される.

$$P((155, 170, 185) \leq (130, 160, 190)) = 0.8519,$$

$$P((152, 170, 188) \leq (120, 160, 200)) = 0.9216,$$

$$P((136, 150, 164) \leq (115, 160, 205)) = 1.0000,$$

$$P((180, 200, 220) \leq (120, 160, 200)) = 0.1667,$$

$$\tilde{z} = (2090, 2300, 2510).$$

よって, $P(\tilde{r}_4 \leq \tilde{b}_4) \not\geq 0.6$ なので, ステップ3へ行く.

[ステップ3] ベクトル s を再計算する.

$$s = (10 \ 10 \ 0 \ 40)^T.$$

[ステップ4] 有効勾配は, 次のように計算される.

$$g_1 = 500/3000 = 0.1666,$$

$$g_2 = 900/2200 = 0.4091,$$

$$g_3 = 300/1900 = 0.1579,$$

$$g_4 = 600/4300 = 0.1395,$$

$$g_5 = 100/1700 = 0.0588,$$

$$g_6 = 300/3500 = 0.0857.$$

[ステップ5] 最小の有効勾配は, g_4 である. よって, N_1, L と $\tilde{r}$ は次のようになる.

$$N_1 = \{1, 2, 3\},$$

$$L = \{5, 6, 4\},$$

$$\tilde{r} = ((90, 100, 110) (79, 90, 101)$$

$$(100, 110, 120) (118, 130, 142))^T$$

ステップ2へ行く.

<反復3>

[ステップ2] 度合いは $P(\tilde{r}_i \leq \tilde{b}_i) = 1.0 (i=1, \dots, 4)$ となり, 実行可能解が得られた. 目的関数値は, $\tilde{z} = (1540, 1700, 1860)$ である. ステップ6へ行く.

<反復0: 更新段階>

[ステップ6] 添え字4を含む解は, 以前に取り扱ったので, L から添え字6を取り出す.

[ステップ7] 制約不等式の成り立つ度合いは, 次のように計算される.

$$P((145, 160, 175) \leq (130, 160, 190)) = 1.0000,$$

$$P((161, 180, 199) \leq (120, 160, 200)) = 0.6772,$$

$$P((145, 160, 175) \leq (115, 160, 205)) = 1.0000,$$

$$P((163, 180, 197) \leq (120, 160, 200)) = 0.6949,$$

$$\tilde{z} = (1810, 2000, 2190).$$

よって, $P(\tilde{r} \leq \tilde{b}) > 0.6$ となり, $N_1 = \{1, 2, 3, 6\}$ とする. ステップ6へ行く.

<反復1>

[ステップ6] L から添え字5を取り出す. ステップ7へ行く.

<反復2>

[ステップ7] x_6 を含む解は実行可能解ではないので, ステップ6へ行く.

[ステップ6] リスト L は空なので, ステップ8へ行く.

[ステップ8] 次の近似解および目的関数値を得て終了する.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$\tilde{z} = (1810, 2000, 2190).$$

以上の計算過程を要約すると表1となり, 実行可能解となるのは目的関数値が $\tilde{z} = (1540, 1700, 1860)$ 以降である.

さらに, 不等式の成り立つ度合いの下限を $\alpha =$

0.1, 0.2, ..., 1.0 とした場合の提案する解法による近似解および列挙法による最適解を表 2 に示す。 α の減少に伴い目的関数値が非減少であることがわかる。提案する解法による近似解と列挙法による最適解との大きな相違はなく、良い近似解となっている。

7. 評価

本論文で提案する解法と可能性理論に基づく指標を用いた解法との比較について述べる。可能性理論に基づく 4 種類の指標のうち最も弱い主張を用い、制約式の成り立つ度合いの下限を α とすると、ファジィ多次元 0-1 ナップサック問題の制約式は次のように変換される。

$$\text{Pos}\left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}x_j \leq \tilde{b}_i\right) \geq \alpha, \quad i=1, 2, \dots, m$$

この変換法を用いた解法¹¹⁾を FMDKP 例に適用し、 $\alpha=0.6$ と設定すると次の数値例を得る。

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 520x_1 + 932x_2 + 312x_3 + 620x_4 + 108x_5 + 312x_6 \\ \text{subj.to} \quad & 8.8x_1 + 38.4x_2 + 48.8x_3 + 68x_4 + 48.8x_5 + 58x_6 \leq 172 \\ & 48x_1 + 18.8x_2 + 18.8x_3 + 77.2x_4 + 38x_5 + 86.8x_6 \leq 176 \\ & 38.8x_1 + 28.8x_2 + 38.4x_3 + 38.4x_4 + 18.8x_5 + 48x_6 \leq 178 \\ & 56x_1 + 38.4x_2 + 28.8x_3 + 66.8x_4 + 19.2x_5 + 48x_6 \leq 176 \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

この数値例の有効勾配法の双対法による解は $x = (1, 1, 1, 0, 0, 1)$ 、目的関数値は 2076 となる。表 2 に各 α に対する解を示す。この結果、定義 1 による指標は、可能性理論に基づく指標より、 α が 1 に近いほど楽観的な解が、逆に、 α が 0 に近いほど悲観的な解が得られ、第 3 節で示した度合いの相違の検証となっている。

この可能性理論に基づく指標による制約式の解釈では、 i 番目の制約式の左辺におけるファジィ数 $\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}x_j$ のメンバーシップ関数の左側の広がり $\tilde{a}_{ij}$ と右辺定数であるファジィ数 $\tilde{b}_i$ のメンバーシップ関数の右側の広がりとの交点の値が制約式の成り立つ度合いになる。そのために、左辺のファジィ

表 1 目的関数値の推移

段階/反復	ステップ	N_1	満足の度合い	目的関数値 $\tilde{z}$
探索 / 0	1	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	0.0000	(2440, 2700, 2960)
" / 1	2	{1, 2, 3, 4, 6}	0.0000	(2360, 2600, 2840)
" / 2	2	{1, 2, 3, 4}	0.1667	(2090, 2300, 2510)
" / 3	2	{1, 2, 3}	1.0000	(1540, 1700, 1860)
更新 / 0	7	{1, 2, 3, 6}	0.6772	(1810, 2000, 2190)

表 2 各 α に対する解

度合い の下限 α	提案する解法		列挙法		変換による解法	
	近似解 ($x_1, \dots, x_6$)	目的関数値 $\tilde{z}$	最適解 ($x_1, \dots, x_6$)	目的関数値 $\tilde{z}$	近似解 ($x_1, \dots, x_6$)	目的関数値 z
1.0	(1, 1, 1, 0, 0, 0)	(1540, 1700, 1860)	(1, 1, 1, 0, 1, 0)	(1640, 1800, 1960)	(1, 1, 1, 0, 1, 0)	1800
0.9	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	2018
0.8	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(0, 1, 1, 1, 0, 0)	1832
0.7	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(0, 1, 1, 1, 0, 0)	1860
0.6	(1, 1, 1, 0, 0, 1)	(1810, 2000, 2190)	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(1, 1, 1, 0, 0, 1)	2076
0.5	(1, 1, 1, 0, 0, 1)	(1810, 2000, 2190)	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(1, 1, 1, 0, 0, 1)	2090
0.4	(1, 1, 1, 0, 0, 1)	(1810, 2000, 2190)	(1, 1, 0, 1, 0, 0)	(1820, 2000, 2180)	(1, 1, 1, 0, 0, 1)	2114
0.3	(1, 1, 0, 1, 1, 0)	(1900, 2100, 2300)	(1, 1, 0, 1, 1, 0)	(1900, 2100, 2300)	(1, 1, 1, 1, 0, 0)	2447
0.2	(1, 1, 0, 1, 1, 0)	(1900, 2100, 2300)	(1, 1, 0, 1, 1, 0)	(1900, 2100, 2300)	(1, 1, 1, 1, 0, 0)	2468
0.1	(1, 1, 1, 1, 0, 0)	(2090, 2300, 2510)	(1, 1, 1, 1, 0, 0)	(2090, 2300, 2510)	(1, 1, 1, 1, 0, 0)	2489

ィ数のメンバーシップ関数の右側の広がりや形状は、度合いになんら反映されない。例えば、数値例の1番目の制約式の x_1 の係数(7,10,13)を(7,10,20)としても、制約式の成り立つ度合いは同一となる。他の3種類の指標を用いた場合でも、同様である。それに対して、定義1による指標ではメンバーシップ関数の面積に関連しているために、制約式の左辺におけるファジィ係数の形状の相違を敏感に度合いに反映することができる。

提案する解法の利点として、次の点が挙げられる。まず、従来の解法では、実係数の問題に変換して、通常の手法で解を求める二段階で構成されている手法が一般的であるが、提案する解法は、ファジィ係数の問題そのものから直接に解を得る手法であり、実係数問題の解法の自然な拡張となっている。これにより、目的関数値がファジィ数として得られるなど、問題そのものがもつ性質を得られる解に反映することができる。次に、制約式の解釈の部分と提案する解法の構造とは依存関係がないため、制約式の解釈を定義1の指標から可能性理論に基づく4種類の指標などに置換することも可能である。これにより、意思決定者の選好に応じた指標を用いて解を得ることができる。あるいは、各種の指標を用いた解を求め、互いに比較検討することもできる。

8. おわりに

本論文では、ファジィ数を係数とする0-1ナップサック問題を定式化した。この制約式の解釈として、適合指標を導入してファジィ数間の不等式の成り立つ度合いを定義した。この定義では、可能性理論を用いた指標よりもファジィ数のメンバーシップ関数の形状をより多く度合いに反映させることができた。ファジィ0-1ナップサック問題の解法では、有効勾配法を拡張して、計算過程においてもファジィ数のまま演算を行い、近似解とファジィ数で表現された目的関数値を求める解法を提案した。この解法の特長として、変換を行わずに問題そのものから直接に解が得られるため、

実係数の問題の自然な拡張であること、目的関数値がファジィ数として得られることなどを示した。より現実に即した大規模な数値実験により、提案する解法の評価を行うことを今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) Dubois, D. and Prade, H.: "Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory", *Information Science*, Vol.30, No.3, pp.183-224(1983).
- 2) 石井博昭, 多田実, 西田俊夫: "ファジィ輸送問題", 日本ファジィ学会誌, Vol.2, No.1, pp.79-84(1990).
- 3) 石淵久生, 御前伸太, 田中英夫: "SA法によるファジィ・フローショップ・スケジューリング", 日本ファジィ学会誌, Vol.5, No.3, pp.600-615(1993).
- 4) Kaufmann, A. and Gupta, M. M.: *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Van Nostrand Reinhold(1988).
(邦訳: 田中英夫監訳, 松岡 浩訳: "ファジィ数学モデル", オーム社(1992)).
- 5) Kaufmann, A. and Gupta, M. M.: *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*, Van Nostrand Reinhold(1985).
- 6) 今野浩, 鈴木久敏編: "整数計画法と組合せ最適化", 日科技連(1982).
- 7) Okada, S. and Gen, M.: "The 0-1 Knapsack Problem with Interval Coefficients", *Proceedings of the Korea-Japan Joint Conference on Fuzzy System and Engineering*, in Seoul, Korea, pp.292-295(1992).
- 8) Okada, S. and Gen, M.: "Fuzzy 0-1 Knapsack Problem", *Proceedings of the Fifth International Fuzzy System Association World Congress*, in Seoul, Korea, pp.616-619(1993).
- 9) Okada, S. and Gen, M.: "Fuzzy 0-1 Knapsack Problem with Multi-Constraints", *Proceedings of the Second International Conference on System Science and Systems Engineering*, in Beijing, China, pp.761-766(1993).

- 10) Okada, S. and Gen, M.: "Fuzzy Multiple Choice Knapsack Problem," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.67, pp.71-81(1994).
- 11) 岡田真幸, 中原陽三, 井田憲一, 玄光男: "台形型ファジィ係数を含む多目的線形計画問題の一変換法", 電子情報通信学会論文誌(A), Vol.J76-A, No.3, pp.421-429(1993).
- 12) 岡田真幸, 玄光男: "区間係数をもつ0-1線型計画法によるシステム信頼性の最適化", 日本経営工学会, Vol.44, No.4, pp.298-307(1993).
- 13) 坂和正敏: 「ファジィ理論の基礎と応用」, 森北出版(1989)
- 14) 坂和正敏, 矢野均, 高橋淳也: "ファジーパラメータを含む多目的線形計画問題に対する拡張パレート最適性の概念とその性質", 電子情報通信学会誌(A), Vol.J72-A, No.4, pp.678-684(1989)
- 15) Senju, S. and Toyoda, Y.: "An Approach to Linear Programming with 0-1 Variables", *Management Science*, Vol.15, No.4, pp.B196-B207(1968).
- 16) Toyoda, Y.: "A Simplified Algorithm for Obtaining Approximate Solutions to Zero-one Programming Problems", *Management Science*, Vol.21, No.12, pp.1417-1427(1975).

(1993年9月24日 受付)

(1994年6月27日 再受付)

[問い合わせ先]

〒326 栃木県足利市本城3丁目2120

足利短期大学

岡田 真幸

☎: 0284-21-8242

FAX: 0284-21-1270

E-mail: sokada@aitsun4.ashitech.ac.jp

著者紹介

岡田 真幸 (おかだ しんこう)

足利短期大学

昭和52年 東工大・理・情報科学卒。昭和54年 同大学院修士課程了。同年 埼玉県立高校教諭。平成3年 足利短大助教授。理修。ファジィ理論を応用した数理計画法、組合せ最適化法の研究開発に従事。共訳「アドバンス Turbo C プログラミング」(平成4年, HBJ 出版局)など。日本オペレーションズ・リサーチ学会, 電子情報通信学会, 日本経営工学会等各会員。

玄 光男 (げん みつお)

足利工業大学工学部経営工学科

昭和44年 工学院大・工・電子卒。昭和49年 同大学院博士課程了。同年 足利工業大学・工・経営工学講師。昭55助教授。昭56~57米国 Univ. of Nebraska-Lincoln 客員助教授。昭和62年 教授。平成5年 情報科学センター長。工博。ファジィシステム最適化法, ファジィ多目的計画法, 遺伝的アルゴリズムの応用等の研究開発に従事。著書「線形計画・目標計画プログラム」(昭和59年, 電気書院など。日本オペレーションズ・リサーチ学会, 電子情報通信学会, 日本経営工学会, 情報処理学会, IEEE 等各会員。