論文

台形型ファジィ数の新たな関係と そのファジィ線形計画問題への応用[†]

中原 陽三 *¹ 玄 光男 *²

本稿では、3つのパラメータにより定まる、台形型ファジィ数(TrFN)の新しい関係を提案する。さらに、提案する関係が、DuboisとPradeによって提案された不等号関係指標から自然に導かれる順序関係を含んでいることを示す。また、提案する関係を用いて制約条件式を取り扱う台形型ファジィ係数を伴う線形計画(LP)問題の解法を提案する。さらに、この解法を用いると、意思決定者は不等号関係指標から導かれる順序関係を用いて制約条件式を取り扱う解法よりも、自らの意思をより多く反映させて制約条件式を取り扱うことができることを明かにする。

キーワード：台形型ファジィ数、関係、パラメータ、線形計画問題、意思決定者

1. はじめに

従来、現実の問題を数理計画問題にモデル化する場合、その係数および目標値は、専門家の経験や知識により実数値として設定されてきた。その実数値は実際にはあいまいさを持つ場合もあり、これを考慮に入れた処理が望ましいが、従来の数理計画法ではこのあいまいさを取り扱うことができなかった。そこで、それを可能にする数理計画法の開発が試みられてきており、確率計画法や、最近では係数あるいは目標がファジィ集合やファジィ数であるファジィ数理計画法が提案され、研究されている[1],[2]。

よく知られているように、DuboisとPradeは可能性と必然性の概念からファジィ数の間の不等号関係に対する4つの指標(不等号関係指標)を提案している[3]。さらに、これらの指標を用いたファジィ数間の不等号を伴う制約条件式取り扱いがDuboisにより提案されている[4]。また、DuboisとPradeは可能性と必然性の概念からフ

ァジィ数の間の等号関係に対する3つの指標(等号関係指標)を提案している[3]。さらに、これらの指標を用いたファジィ数間の等号を伴う制約条件式の取り扱いがDuboisにより提案されている[4]。これらの指標を用いる制約条件式の取り扱い方法は、ある意味で、不等号関係指標から自然に導かれる順序関係を用いる方法と見なすことができる。これらの制約条件式の扱いは非常に有用であるが、これとは異なる制約条件式の取り扱いが意思決定者により要求される場合もある[5]~[14]。

本稿では、3つのパラメータにより定まる、台形型ファジィ数(TrFN)の新しい関係を提案する[10]~[13]。さらに、提案する関係が、DuboisとPradeによって提案された不等号関係指標から自然に導かれる順序関係を含んでいることを示す。また、提案する関係を用いて制約条件式を取り扱う台形型ファジィ係数を伴う線形計画(LP)問題の解法を提案する。さらに、この解法を用いると、意思決定者は不等号関係指標から導かれる順序関係を用いて制約条件式を取り扱う解法よりも、自らの意思をより多く反映させて制約条件式を取り扱うことができることを明かにする。

[†] New Relations of Trapezoidal Fuzzy Numbers and Its Application to Fuzzy Linear Programming Problems
Yozo NAKAHARA and Mitsuo GEN

*¹ 静岡精華短期大学商学科
Business Administration, Shizuoka Seika College

*² 足利工業大学経営工学科
Faculty of Engineering, Ashikaga Institute of Technology

2. 記法と基本算法

TrFN は, 「式(1)を満たすある $c^1, c^2, c^3, c^4 \in R$ により, そのメンバシップ関数を式(2)のように表現できるファジィ数」として定義される.

$$c^1 \leq c^2 \leq c^3 \leq c^4 \quad (1)$$

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < c^1 \\ (x - c^1) / (c^2 - c^1), & \text{for } c^1 \leq x < c^2 \\ 1, & \text{for } c^2 \leq x \leq c^3 \\ (c^4 - x) / (c^4 - c^3), & \text{for } c^3 < x \leq c^4 \\ 0, & \text{for } x > c^4 \end{cases} \quad (2)$$

本稿では, Tr で TrFN 全体の集合を表すことにする. また, ファジィ集合を, $\tilde{a}$ あるいは $\tilde{a}\tilde{b}$ のような, チルダを上につけた文字(列)で表すことにする. 特に TrFN は, $\tilde{A}$ あるいは $\tilde{A}\tilde{B}$ のような, チルダを上につけた大文字(列)で表す. また, 式(1)を満たす任意の $c^1, \dots, c^4 \in R$ に対して, $(c^1, \dots, c^4)$ は, 式(2)の関数をメンバシップ関数として持つ TrFN を意味するものとする. 図1に任意の TrFN $\tilde{C} = (c^1, c^2, c^3, c^4)$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{C}}(x)$ を示す.

任意の $\alpha \in (0, 1]$ およびファジィ集合 $\tilde{a}$ に対して, その α -レベル集合(あるいは, α -カット)を $\tilde{a}(\alpha)$ あるいは a_α で表す. さらに任意のファジィ集合 $\tilde{a}$ に対して, そのメンバシップ関数の support (0 でないところの閉包)を $\tilde{a}(0)$ あるいは a_0 で表す. これは, 任意のファジィ集合 $\tilde{a}$ に対する “ $\tilde{a}$ の support” の定義から次のように言い換えられる: 任意のファジィ集合 $\tilde{a}$ に対して, その

図1 TrFN $\tilde{C} = (c^1, c^2, c^3, c^4)$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{C}}(x)$

support (そのファジィ集合のメンバシップ関数の値が 0 より大きい要素の集合) の閉包を $\tilde{a}(0)$ あるいは a_0 で表す. 任意の $\alpha \in [0, 1]$ およびファジィ集合 $\tilde{a}$ に対して, $\tilde{a}(\alpha)$ の左端および右端は, それぞれ $\tilde{a}(\alpha)^L$, $\tilde{a}(\alpha)^R$ で表す. a_α の左端および右端も同様に表記する. 任意の TrFN $\tilde{C} = (c^1, c^2, c^3, c^4)$ に対して, 次の関係式が成立する:

$$C_\alpha = [(c^2 - c^1)\alpha + c^1, -(c^4 - c^3)\alpha + c^4] \quad \text{for any } \alpha \in [0, 1] \quad (3)$$

任意の $k \in R$, 任意の区間 $A \subset R$ および $B \subset R$ に対して kA , Ak および $A+B$ を, それぞれ次のように定義する:

$$kA = \{kz \mid z \in A\} \quad (4)$$

$$Ak = \{zk \mid z \in A\} \quad (5)$$

$$A+B = \{z_1 + z_2 \mid z_1 \in A, z_2 \in B\} \quad (6)$$

これは, 区間の和および区間と実数の積の通常定義である. なお, この定義より明らかに $kA = Ak$ である. また, 任意の TrFN $\tilde{C} = (c^1, c^2, c^3, c^4)$, $\tilde{C}_1 = (c_1^1, c_1^2, c_1^3, c_1^4)$ および $\tilde{C}_2 = (c_2^1, c_2^2, c_2^3, c_2^4)$, さらに実数 k に対して, 次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 &= (c_1^1 + c_2^1, c_1^2 + c_2^2, c_1^3 + c_2^3, c_1^4 + c_2^4) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 &= (c_1^1 - c_2^1, c_1^2 - c_2^2, c_1^3 - c_2^3, c_1^4 - c_2^4) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} k\tilde{C} &= \tilde{C}k \\ &= \begin{cases} (kc^1, kc^2, kc^3, kc^4), & \text{for } k \geq 0 \\ (kc^4, kc^3, kc^2, kc^1), & \text{for } k < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

本稿では, 任意の実軸上の点 $a_1(x_1)$, $a_2(x_2)$ と $q \in R$ に対して, $\overrightarrow{a_1 a_2}(q)$ をベクトル $\overrightarrow{a_1 a_2}$ を $q : 1 - q$ に分割する点 a_3 の座標 $((1 - q)x_1 + qx_2)$ として定義する. 一つの例として, 実軸上の任意の点 a_1 と a_2 に対する $\overrightarrow{a_1 a_2}(0.2)$ および $\overrightarrow{a_1 a_2}(1.5)$ を図2に示す. 本稿ではさらに, 任意の閉区間 $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ および任意の実数 q に対して, $[a_1, a_2](\leq q)[b_1, b_2]$ を次のように定義する[5]~[9]:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2](\leq q)[b_1, b_2] &\iff qa_2 + (1 - q)a_1 \leq qb_1 + (1 - q)b_2 \end{aligned} \quad (10)$$

図2 任意の実数 a_1 と a_2 に対する
 $\overrightarrow{a_1 a_2}(0.2)$ および $\overrightarrow{a_1 a_2}(1.5)$

任意のファジィ集合 $\tilde{a}$ および $\tilde{b}$ に対して, 可能性測度 Π および必然性測度 N は, 次のように定義できる:

$$\Pi_{\tilde{a}}(\tilde{b}) = \sup_y \{\mu_{\tilde{a}}(y) \wedge \mu_{\tilde{b}}(y)\} \quad (11)$$

$$N_{\tilde{a}}(\tilde{b}) = \inf_y \{(1 - \mu_{\tilde{a}}(y)) \vee \mu_{\tilde{b}}(y)\}. \quad (12)$$

ただし, 任意の実数 a および b に対して, $a \wedge b$ は $\min\{a, b\}$ を意味し, $a \vee b$ は $\max\{a, b\}$ を意味する. 任意のファジィ数 $\tilde{a}$ に対して, $]\tilde{a}, \infty)$ および $[\tilde{a}, \infty)$ は, それぞれ次のメンバシップ関数を持つファジィ数として定義できる:

$$\mu_{] \tilde{a}, \infty)}(r) = \inf_{r \leq u} \{1 - \mu_{\tilde{a}}(u)\} \quad (13)$$

$$\mu_{[\tilde{a}, \infty)}(r) = \sup_{r \geq u} \mu_{\tilde{a}}(u) \quad (14)$$

3. TrFN の関係

Dubois と Prade は, 任意のファジィ数 $\tilde{a}$ および $\tilde{b}$ の不等式に対する次の4つの指標(不等号関係指標)を定義した[3]:

$$Pos(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = \Pi_{\tilde{b}}([\tilde{a}, \infty)) \quad (15)$$

$$Pos(\tilde{a} < \tilde{b}) = \Pi_{\tilde{b}}(]\tilde{a}, \infty)) \quad (16)$$

$$Nes(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = N_{\tilde{b}}([\tilde{a}, \infty)) \quad (17)$$

$$Nes(\tilde{a} < \tilde{b}) = N_{\tilde{b}}(]\tilde{a}, \infty)) \quad (18)$$

次の定理1はよく知られている:

定理1 任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して, 次の関係式が成立する:

$$Pos(\tilde{a} \leq \tilde{b}) \geq \alpha \iff \tilde{a}(\alpha)^L \leq \tilde{b}(\alpha)^R \quad (19)$$

$$Pos(\tilde{a} < \tilde{b}) \geq \alpha \iff \tilde{a}(1 - \alpha)^R \leq \tilde{b}(\alpha)^R \quad (20)$$

$$Nes(\tilde{a} \leq \tilde{b}) \geq \alpha \iff \tilde{a}(\alpha)^L \leq \tilde{b}(1 - \alpha)^L \quad (21)$$

$$Nes(\tilde{a} < \tilde{b}) \geq \alpha \iff \tilde{a}(1 - \alpha)^R \leq \tilde{b}(1 - \alpha)^L \quad (22)$$

ファジィ数に対して, 次の順序関係を定義することができる:

定義1 任意の $\alpha \in [0, 1]$ およびファジィ数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ に対して, $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ in αVW , $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ in αMW , $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ in αMS および $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ in αVS を, それぞれ次のように定義する:

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha VW \\ \iff \tilde{a}(\alpha)^L \leq \tilde{b}(\alpha)^R, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha MW \\ \iff \tilde{a}(1 - \alpha)^R \leq \tilde{b}(\alpha)^R, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha MS \\ \iff \tilde{a}(\alpha)^L \leq \tilde{b}(1 - \alpha)^L, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha VS \\ \iff \tilde{a}(1 - \alpha)^R \leq \tilde{b}(1 - \alpha)^L. \end{aligned} \quad (26)$$

定義1 および定理1より, 次の系1が明らかに成立する:

系1 任意の $\alpha \in [0, 1]$ およびファジィ数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ に対して, 次の関係が成立する:

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha VW \\ \iff Pos(\tilde{a} \leq \tilde{b}) \geq \alpha, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha MW \\ \iff Pos(\tilde{a} < \tilde{b}) \geq \alpha, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha MS \\ \iff Nes(\tilde{a} \leq \tilde{b}) \geq \alpha, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha VS \\ \iff Nes(\tilde{a} < \tilde{b}) \geq \alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

系1は, 定義1の順序関係の集合と, Dubois と Prade による指標とその下限 $\alpha \in [0, 1]$ から自然に定まる順序関係の集合とが同じものであることを示している.

これらの順序関係は非常に有用であるが, 意思決定者が別の関係を用いたい場合もある. そこで本稿では, TrFN に対する次の4つのタイプの関係を定義する:

定義2 任意の TrFN $\tilde{A}$ および $\tilde{B}$, $q \in R$, さらに $\alpha \in [0, 1]$ に対して, $\tilde{A}(\leq Type1(\alpha, q))\tilde{B}$, $\tilde{A}(\leq Type2(\alpha, q))\tilde{B}$, $\tilde{A}(\leq Type3(\alpha, q))\tilde{B}$ および $\tilde{A}(\leq Type4(\alpha, q))\tilde{B}$ を, それぞれ次のように定義する:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\leq \text{Type1}(\alpha, q)) \tilde{B} \\ \iff \overrightarrow{A_{\alpha}^L A_{\alpha}^R}(q) \leq \overrightarrow{B_{\alpha}^R B_{\alpha}^L}(q) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\leq \text{Type2}(\alpha, q)) \tilde{B} \\ \iff \overrightarrow{A_{1-\alpha}^R A_{1-\alpha}^L}(q) \leq \overrightarrow{B_{\alpha}^R B_{\alpha}^L}(q) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\leq \text{Type3}(\alpha, q)) \tilde{B} \\ \iff \overrightarrow{A_{\alpha}^L A_{\alpha}^R}(q) \leq \overrightarrow{B_{1-\alpha}^L B_{1-\alpha}^R}(q) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\leq \text{Type4}(\alpha, q)) \tilde{B} \\ \iff \overrightarrow{A_{1-\alpha}^R A_{1-\alpha}^L}(q) \leq \overrightarrow{B_{1-\alpha}^L B_{1-\alpha}^R}(q) \end{aligned} \quad (34)$$

なお、任意の TrFN $\tilde{A}$ および $\tilde{B}$, $q \in R$, $\alpha \in [0, 1]$ さらに $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して, $\tilde{A}(\leq \text{Type}k(\alpha, q)) \tilde{B}$ を $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ in $\text{Type}k(\alpha, q)$ と書くものとする。

これらの関係が, Dubois と Prade による不等号関係指標とその下限から定まる TrFN の順序関係(本稿ではこれを DP 順序関係と呼ぶ)を $q=0$ の場合として含み, さらに, DP 順序関係以外の関係を含むのは明かである。

式(3), (4)および(10)から, 任意の TrFN $\tilde{A} = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ および $\tilde{B} = (b^1, b^2, b^3, b^4)$ に対して, 次の関係式が明らかに成り立つ:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{\alpha}^L A_{\alpha}^R}(q) &\leq \overrightarrow{B_{\alpha}^R B_{\alpha}^L}(q) \\ \iff qA_{\alpha}^R + (1-q)A_{\alpha}^L &\leq qB_{\alpha}^L + (1-q)B_{\alpha}^R \\ \iff A_{\alpha}(\leq q) B_{\alpha} & \\ \iff (-B_{\alpha})(\leq q) (-A_{\alpha}) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff q(-(a^4 - a^3)\alpha + a^4) &+ (1-q)((a^2 - a^1)\alpha + a^1) \\ &\leq q((b^2 - b^1)\alpha + b^1) \\ &+ (1-q)(-(b^4 - b^3)\alpha + b^4) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{1-\alpha}^R A_{1-\alpha}^L}(q) &\leq \overrightarrow{B_{\alpha}^R B_{\alpha}^L}(q) \\ \iff qA_{1-\alpha}^L + (1-q)A_{1-\alpha}^R &\leq qB_{\alpha}^L + (1-q)B_{\alpha}^R \\ \iff q((a^2 - a^1)(1-\alpha) + a^1) &+ (1-q)(-(a^4 - a^3)(1-\alpha) + a^4) \\ &\leq q((b^2 - b^1)\alpha + b^1) \\ &+ (1-q)(-(b^4 - b^3)\alpha + b^4) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{\alpha}^L A_{\alpha}^R}(q) &\leq \overrightarrow{B_{1-\alpha}^L B_{1-\alpha}^R}(q) \\ \iff qA_{\alpha}^R + (1-q)A_{\alpha}^L &\leq qB_{1-\alpha}^R + (1-q)B_{1-\alpha}^L \\ \iff q(-(a^4 - a^3)\alpha + a^4) &+ (1-q)((a^2 - a^1)\alpha + a^1) \\ &\leq q(-(b^4 - b^3)(1-\alpha) + b^4) \\ &+ (1-q)((b^2 - b^1)(1-\alpha) + b^1) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{1-\alpha}^R A_{1-\alpha}^L}(q) &\leq \overrightarrow{B_{1-\alpha}^L B_{1-\alpha}^R}(q) \\ \iff qA_{1-\alpha}^L + (1-q)A_{1-\alpha}^R &\leq qB_{1-\alpha}^L + (1-q)B_{1-\alpha}^R \\ \iff A_{1-\alpha}(\leq (1-q)) B_{1-\alpha} & \\ \iff (-B_{1-\alpha})(\leq (1-q)) (-A_{1-\alpha}) & \\ \iff q((a^2 - a^1)(1-\alpha) + a^1) &+ (1-q)(-(a^4 - a^3)(1-\alpha) + a^4) \\ &\leq q(-(b^4 - b^3)(1-\alpha) + b^4) \\ &+ (1-q)((b^2 - b^1)(1-\alpha) + b^1) \end{aligned} \quad (38)$$

図3 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ の6つの位置関係

図3に台形型ファジィ数 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ の6つの位置関係を示す。これらの $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ に対する, 4つの関係 $Type1(0.75, 0.2)$, $Type2(0.75, 0.2)$, $Type3(0.75, 0.2)$ および $Type4(0.75, 0.2)$ における $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ の成立, 不成立 ($\tilde{A} \leq \tilde{B}$ in $Type1(0.75, 0.2)$, $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ in $Type2(0.75, 0.2)$, $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ in $Type3(0.75, 0.2)$ および $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ in $Type4(0.75, 0.2)$ それぞれの成立, 不成立) の状況を表1に示す。

表1 図3の $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ に対する4つの関係における $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ の成立, 不成立の状況

関係	$\tilde{A} \leq \tilde{B}$ の成立, 不成立					
	case1	case2	case3	case4	case5	case6
Type1(0.75, 0.2)	n	y	y	y	y	y
Type2(0.75, 0.2)	n	n	y	y	y	y
Type3(0.75, 0.2)	n	n	n	y	y	y
Type4(0.75, 0.2)	n	n	n	n	y	y

‘y’は‘成立’を, ‘n’は‘不成立’を示している。

定義3 $\forall k_1, k_2 \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1], \forall q_1, q_2 \in R, \forall V \subset Tr \times Tr$ に対し, “ V に関して $Typek_1(\alpha_1, q_1)$ より $Typek_2(\alpha_2, q_2)$ の方がきびしい” ということを, 次の式が成立することとして定義する:

$$\begin{aligned} & \forall \tilde{B} \in \pi_2(V), \exists \tilde{A} \in Tr \\ \text{s.t. } & (\tilde{A}, \tilde{B}) \in V, \\ & \tilde{A} (\leq Typek_1(\alpha_1, q_1)) \tilde{B}, \\ & \neg (\tilde{A} (\leq Typek_2(\alpha_2, q_2)) \tilde{B}) \end{aligned} \quad (39)$$

ただし,

$$\pi_2(V) = \{\tilde{B} \in Tr \mid \exists \tilde{A} \in Tr \text{ s.t. } (\tilde{A}, \tilde{B}) \in V\} \quad (40)$$

であり, “ $\neg$ ” は命題否定の記号である。

定義4 $\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall \alpha \in [0, 1], \forall q \in R, \forall V \subset Tr \times Tr$ に対し, “ V に関して $Typek(\alpha, q)$ と αVW のきびしさは等しい” ということを, 次の式が成立することとして定義する:

$$\begin{aligned} & \forall (\tilde{A}, \tilde{B}) \in V, \\ & \tilde{A} \leq \tilde{B} \text{ in } Typek(\alpha, q) \\ & \iff \tilde{A} \leq \tilde{B} \text{ in } \alpha VW \end{aligned} \quad (41)$$

また, “ V に関して $Typek(\alpha, q)$ と αMW のきびしさは等しい”, “ V に関して $Typek(\alpha, q)$ と αMS のきびしさは等しい”, および “ V に関して $Typek(\alpha, q)$ と αVS のきびしさは等しい” ということも同様に定義する。

この表2において, “ $Typek(\alpha, q)$ のきびしさ on V ” の欄にある $\nearrow$ は, それが書かれている q の範囲内の $q_1 < q_2$ なる任意の q_1, q_2 に対して “ V に関して $Typek(\alpha, q_1)$ より $Typek(\alpha, q_2)$ の方がきびしい” ことを示している。また, “ $Typek(\alpha, q)$ のきびしさ on V ” の欄にある $\searrow$ は, それが書かれている q の範囲内の $q_1 < q_2$ なる任意の q_1, q_2 に対して “ V に関して $Typek(\alpha, q_2)$ より $Typek(\alpha, q_1)$ の方がきびしい” ことを示している。さらに, “ αVW と等しい” は, $\forall \alpha \in [0, 1]$ に対して “ $Tr \times Tr$ に関して $Type1(\alpha, 0)$ と αVW のきびしさは等しい” ということを示している。“ αMW と等しい”, “ αMS と等しい”, “ αVS と等しい” も同様である。

表2 $\forall \alpha \in [0, 1], \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$ における $\{Typek(\alpha, q) \mid q \in R\}$ の任意の要素間の関係

q		$(-\infty) \dots$	0	$\dots (+\infty)$
Type1(α, q) のきびしさ	on $Tr \times Tr$	$\nearrow$	αVW と等しい	$\nearrow$
Type2(α, q) のきびしさ	on V_{21}	$\searrow$	αMW	$\searrow$
	on V_{22}	$\nearrow$	と等しい	$\nearrow$
Type3(α, q) のきびしさ	on V_{31}	$\nearrow$	αMS	$\nearrow$
	on V_{32}	$\searrow$	と等しい	$\searrow$
Type4(α, q) のきびしさ	on $Tr \times Tr$	$\nearrow$	αVS と等しい	$\nearrow$

$$V_{21} = \{(\tilde{A}, \tilde{B}) \in Tr \times Tr \mid |\tilde{A}(1-\alpha)| \leq |\tilde{B}(\alpha)|\},$$

$$V_{22} = \{(\tilde{A}, \tilde{B}) \in Tr \times Tr \mid |\tilde{A}(1-\alpha)| > |\tilde{B}(\alpha)|\},$$

$$V_{31} = \{(\tilde{A}, \tilde{B}) \in Tr \times Tr \mid |\tilde{A}(\alpha)| \leq |\tilde{B}(1-\alpha)|\},$$

$$V_{32} = \{(\tilde{A}, \tilde{B}) \in Tr \times Tr \mid |\tilde{A}(\alpha)| > |\tilde{B}(1-\alpha)|\}$$

ただし, 任意の区間 A に対して $|A|$ は A の長さを表すものとする。

定理 2 任意の $j=1, \dots, n$ に対して $\tilde{A}_j = (a_j^1, a_j^2, a_j^3, a_j^4), x_j \geq 0$ とする. さらに, $\tilde{B} = (b^1, b^2, b^3, b^4), \alpha \in [0, 1], q \in R$ と仮定する. この時, 次の 2.1~2.4 が成立する.

2.1 $k=1$ ならば, 次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j (\leq \text{Typek}(\alpha, q)) \tilde{B} \\ \iff \sum_{j=1}^n \{q(-(a_j^4 - a_j^3)\alpha + a_j^4) \\ + (1-q)((a_j^2 - a_j^1)\alpha + a_j^1)\} x_j \\ \leq q((b^2 - b^1)\alpha + b^1) \\ + (1-q)((b^4 - b^3)\alpha + b^4) \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} (\leq \text{Typek}(\alpha, q)) \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j \\ \iff q(-(b^4 - b^3)\alpha + b^4) \\ + (1-q)((b^2 - b^1)\alpha + b^1) \\ \leq \sum_{j=1}^n \{q((a_j^2 - a_j^1)\alpha + a_j^1) \\ + (1-q)((a_j^4 - a_j^3)\alpha + a_j^4)\} x_j \quad (43) \end{aligned}$$

2.2 $k=2$ ならば, 次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j (\leq \text{Typek}(\alpha, q)) \tilde{B} \\ \iff \sum_{j=1}^n \{q((a_j^2 - a_j^1)(1-\alpha) + a_j^1) \\ + (1-q)((a_j^4 - a_j^3)(1-\alpha) + a_j^4)\} x_j \\ \leq q((b^2 - b^1)\alpha + b^1) \\ + (1-q)((b^4 - b^3)\alpha + b^4) \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} (\leq \text{Typek}(\alpha, q)) \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j \\ \iff q((b^2 - b^1)(1-\alpha) + b^1) \\ + (1-q)((b^4 - b^3)(1-\alpha) + b^4) \\ \leq \sum_{j=1}^n \{q((a_j^2 - a_j^1)\alpha + a_j^1) \\ + (1-q)((a_j^4 - a_j^3)\alpha + a_j^4)\} x_j \quad (45) \end{aligned}$$

2.3 $k=3$ ならば, 次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j (\leq \text{Typek}(\alpha, q)) \tilde{B} \\ \iff \sum_{j=1}^n \{q(-(a_j^4 - a_j^3)\alpha + a_j^4) \\ + (1-q)((a_j^2 - a_j^1)\alpha + a_j^1)\} x_j \\ \leq q(-(b^4 - b^3)(1-\alpha) + b^4) \\ + (1-q)((b^2 - b^1)(1-\alpha) + b^1) \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} (\leq \text{Typek}(\alpha, q)) \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j \\ \iff q(-(b^4 - b^3)\alpha + b^4) \\ + (1-q)((b^2 - b^1)\alpha + b^1) \\ \leq \sum_{j=1}^n \{q(-(a_j^4 - a_j^3)(1-\alpha) + a_j^4) \\ + (1-q)((a_j^2 - a_j^1)(1-\alpha) + a_j^1)\} x_j \quad (47) \end{aligned}$$

2.4 $k=4$ ならば, 次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j (\leq \text{Typek}(\alpha, q)) \tilde{B} \\ \iff \sum_{j=1}^n \{q((a_j^2 - a_j^1)(1-\alpha) + a_j^1) \\ + (1-q)((a_j^4 - a_j^3)(1-\alpha) + a_j^4)\} x_j \\ \leq q(-(b^4 - b^3)(1-\alpha) + b^4) \\ + (1-q)((b^2 - b^1)(1-\alpha) + b^1) \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} (\leq \text{Typek}(\alpha, q)) \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j \\ \iff q((b^2 - b^1)(1-\alpha) + b^1) \\ + (1-q)((b^4 - b^3)(1-\alpha) + b^4) \\ \leq \sum_{j=1}^n \{q(-(a_j^4 - a_j^3)(1-\alpha) + a_j^4) \\ + (1-q)((a_j^2 - a_j^1)(1-\alpha) + a_j^1)\} x_j \quad (49) \end{aligned}$$

[証明]

式(7), (9)および $x_j \geq 0, j=1, \dots, n$ より, 次式が成立する:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j x_j &= \sum_{j=1}^n (a_j^1, a_j^2, a_j^3, a_j^4) x_j \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j^1 x_j, a_j^2 x_j, a_j^3 x_j, a_j^4 x_j) \\ &= (\sum_{j=1}^n a_j^1 x_j, \sum_{j=1}^n a_j^2 x_j, \sum_{j=1}^n a_j^3 x_j, \sum_{j=1}^n a_j^4 x_j) \quad (50) \end{aligned}$$

このことと式(31)~(38)より明かである. □

4. TrFN を伴う LP 問題の解法

4.1 提案する解法

TrFN を係数とする LP 問題は, 次のように定式化される:

$$\max/\min \quad Z(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^n \tilde{C}_j x_j \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j &\leq \tilde{B}_i, \\ i &= 1, \dots, m_i \quad (52) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \geq \tilde{B}_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2 \quad (53)$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j = \tilde{B}_i, \quad i = m_2 + 1, \dots, m \quad (54)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (55)$$

ただし,

$\tilde{C}_j$: 目的関数における j 番目の決定変数の台形型ファジィ係数,

$\tilde{A}_{ij}$: 制約条件 i における j 番目の決定変数の台形型ファジィ係数,

$\tilde{B}_i$: 制約条件 i における台形型ファジィ右辺定数,

m_1 : 不等号 $\leq$ を伴う制約条件の数,

m_2 : 不等号 $\leq$ あるいは $\geq$ を伴う制約条件の数,

m : 不等号 $\leq$ あるいは $\geq$ あるいは等号 $=$ を伴う制約条件の数,

n : 決定変数の数,

x_j : j 番目の決定変数,

である.

上記 TrFN を伴う LP 問題に対して, その制約条件に提案した関係を用いた次の解法を提案する: まず, 不等号を伴う制約条件式 (52), (53) のそれぞれを, それぞれに対して意思決定者により選択された「提案する関係を用いた制約条件式」(複数でも可) に変換し, さらに任意の $i \in \{m_2 + 1, \dots, m\}$ に対して, その i における等号を伴う制約条件式 (54) を, それに対して意思決定者により選択された「提案する関係を用い, 式の右辺と左辺が入れ替わっている 2 つの制約条件式の並立」(複数でも可) に変換する. さらに, これらの制約条件式を通常の制約条件式に同値変形し, 得られた問題を解く.

提案する解法における“複数でも可”な変換先を特に 1 つと限定する解法(本稿では新解法 2 と表記する)のアルゴリズムを次に記す:

step 1: 式 (52) ~ (54) の m 個の式を, 次の式 (56), (57) の $2m - m_2$ 個の式に変換する:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \leq \tilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m_1, m_2 + 1, \dots, m \quad (56)$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \geq \tilde{B}_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2, m + 1, \dots, 2m - m_2 \quad (57)$$

step 2: 任意の $i \in \{1, \dots, 2m - m_2\}$ に対して, $k_i \in \{1, \dots, 4\}$, $\alpha_i \in [0, 1]$ および $q_i \in R$ を選ぶことにより, 式 (56), (57) の各式で用いる関係を選択する.

step 3: 式 (56), (57) の $2m - m_2$ 個の各式をそれぞれ次の式 (58), (59) の各式に変換する.

$$\sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j (\leq \text{Type} k_i(\alpha_i, q_i)) \tilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m_1, m_2 + 1, \dots, m \quad (58)$$

$$\tilde{B}_i (\leq \text{Type} k_i(\alpha_i, q_i)) \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2, m + 1, \dots, 2m - m_2 \quad (59)$$

step 4: 式 (58), (59) の各式をそれぞれ実数係数を持つ通常の式に同値変形する.

step 5: 問題 (51) ~ (55) の制約条件式 (52) ~ (54) を, step 4 で得られた通常の式で置き換えて得られる LP 問題を解く.

step 4 の処理内容を実現するアルゴリズムを以下に示す:

Algorithm for step 4: 式 (58), (59) の $2m - m_2$ 個の式のそれぞれに対して, 次の step 4.1 および step 4.2 の処理を行う:

step 4.1: $\tilde{A}_{ij} = (a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, a_{ij}^4)$, $j = 1, \dots, n$ を満たす $a_{ij}^k \in R$, $k = 1, \dots, 4$ および $\tilde{B}_i = (b_i^1, b_i^2, b_i^3, b_i^4)$ を満たす $b_i^k \in R$, $k = 1, \dots, 4$ を求める.

step 4.2: その式が

$$(58) \text{ の形式の式であり, } k_i = 1 \quad (60)$$

であるなら, 式 (68) へ,

$$(58) \text{ の形式の式であり, } k_i = 2 \quad (61)$$

であるなら, 式 (69) へ,

$$(58) \text{ の形式の式であり, } k_i = 3 \quad (62)$$

であるなら, 式 (70) へ,

$$(58) \text{ の形式の式であり, } k_i = 4 \quad (63)$$

であるなら, 式 (71) へ,

(59)の形式の式であり, $k_i=1$ (64)

であるなら, 式(72)へ,

(59)の形式の式であり, $k_i=2$ (65)

であるなら, 式(73)へ,

(59)の形式の式であり, $k_i=3$ (66)

であるなら, 式(74)へ,

(59)の形式の式であり, $k_i=4$ (67)

であるなら, 式(75)へ,

変形する. ただし, 式(68)~(75)は次の通りである:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \{q_i(-(a_{ij}^4 - a_{ij}^3)\alpha_i + a_{ij}^4) \\ & + (1 - q_i)((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)\alpha_i + a_{ij}^1)\}x_j \\ & \leq q_i((b_i^2 - b_i^1)\alpha_i + b_i^1) \\ & + (1 - q_i)((b_i^4 - b_i^3)\alpha_i + b_i^4) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \{q_i((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)(1 - \alpha_i) + a_{ij}^1) \\ & + (1 - q_i)((a_{ij}^4 - a_{ij}^3)(1 - \alpha_i) + a_{ij}^4)\}x_j \\ & \leq q_i((b_i^2 - b_i^1)\alpha_i + b_i^1) \\ & + (1 - q_i)((b_i^4 - b_i^3)\alpha_i + b_i^4) \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \{q_i(-(a_{ij}^4 - a_{ij}^3)\alpha_i + a_{ij}^4) \\ & + (1 - q_i)((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)\alpha_i + a_{ij}^1)\}x_j \\ & \leq q_i(-(b_i^4 - b_i^3)(1 - \alpha_i) + b_i^4) \\ & + (1 - q_i)((b_i^2 - b_i^1)(1 - \alpha_i) + b_i^1) \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \{q_i((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)(1 - \alpha_i) + a_{ij}^1) \\ & + (1 - q_i)((a_{ij}^4 - a_{ij}^3)(1 - \alpha_i) + a_{ij}^4)\}x_j \\ & \leq q_i(-(b_i^4 - b_i^3)(1 - \alpha_i) + b_i^4) \\ & + (1 - q_i)((b_i^2 - b_i^1)(1 - \alpha_i) + b_i^1) \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} & q_i(-(b_i^4 - b_i^3)\alpha_i + b_i^4) \\ & + (1 - q_i)((b_i^2 - b_i^1)\alpha_i + b_i^1) \\ & \leq \sum_{j=1}^n \{q_i((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)\alpha_i + a_{ij}^1) \\ & + (1 - q_i)((a_{ij}^4 - a_{ij}^3)\alpha_i + a_{ij}^4)\}x_j \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} & q_i((b_i^2 - b_i^1)(1 - \alpha_i) + b_i^1) \\ & + (1 - q_i)((b_i^4 - b_i^3)(1 - \alpha_i) + b_i^4) \\ & \leq \sum_{j=1}^n \{q_i((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)\alpha_i + a_{ij}^1) \\ & + (1 - q_i)((a_{ij}^4 - a_{ij}^3)\alpha_i + a_{ij}^4)\}x_j \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} & q_i(-(b_i^4 - b_i^3)\alpha_i + b_i^4) \\ & + (1 - q_i)((b_i^2 - b_i^1)\alpha_i + b_i^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{j=1}^n \{q_i(-(a_{ij}^4 - a_{ij}^3)(1 - \alpha_i) + a_{ij}^4) \\ & + (1 - q_i)((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)(1 - \alpha_i) + a_{ij}^1)\}x_j \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} & q_i((b_i^2 - b_i^1)(1 - \alpha_i) + b_i^1) \\ & + (1 - q_i)((b_i^4 - b_i^3)(1 - \alpha_i) + b_i^4) \\ & \leq \sum_{j=1}^n \{q_i(-(a_{ij}^4 - a_{ij}^3)(1 - \alpha_i) + a_{ij}^4) \\ & + (1 - q_i)((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)(1 - \alpha_i) + a_{ij}^1)\}x_j \end{aligned} \quad (75)$$

以上のアルゴリズムで step 4 の処理内容を実現できることは, 式(58), (59)の $2m - m_2$ 個の各式は式(60)から(67)までのどれか一つだけを必ず満足すること, および定理2が保証する.

4.2 従来の解法

Dubois と Prade は, 任意のファジィ数 $\tilde{a}$ および $\tilde{b}$ の等号関係に関する次の3つの指標(等号関係指標)を定義している[3]:

$$Pos(\tilde{a} = \tilde{b}) = \Pi_{\tilde{a}}(\tilde{b}) \quad (76)$$

$$Nes(\tilde{a} \subset \tilde{b}) = N_{\tilde{a}}(\tilde{b}) \quad (77)$$

$$Nes(\tilde{a} \supset \tilde{b}) = N_{\tilde{b}}(\tilde{a}) \quad (78)$$

さらに, 次の等号関係指標も定義できる:

$$Nes(\tilde{a} = \tilde{b}) = \min(N_{\tilde{a}}(\tilde{b}), N_{\tilde{b}}(\tilde{a})) \quad (79)$$

不等号関係指標と等号関係指標との関係に関する次の定理3が成立する:

定理3 任意の $\alpha \in [0, 1]$ およびファジィ数 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ に対して, 次の関係式が成立する:

$$Pos(\tilde{a} = \tilde{b}) \geq \alpha \iff \begin{cases} Pos(\tilde{a} \leq \tilde{b}) \geq \alpha, \\ Pos(\tilde{b} \leq \tilde{a}) \geq \alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha VW, \\ \tilde{b} \leq \tilde{a} \text{ in } \alpha VW \end{cases}$$

$$Nes(\tilde{a} \subset \tilde{b}) \geq \alpha \iff \begin{cases} Pos(\tilde{a} < \tilde{b}) \geq \alpha, \\ Nes(\tilde{b} \leq \tilde{a}) \geq \alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha MW, \\ \tilde{b} \leq \tilde{a} \text{ in } \alpha MS \end{cases}$$

$$Nes(\tilde{a} \supset \tilde{b}) \geq \alpha \iff \begin{cases} Nes(\tilde{a} \leq \tilde{b}) \geq \alpha, \\ Pos(\tilde{b} < \tilde{a}) \geq \alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha MS, \\ \tilde{b} \leq \tilde{a} \text{ in } \alpha MW \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
Nes(\tilde{a} = \tilde{b}) \geq \alpha &\iff \begin{cases} Nes(\tilde{a} \leq \tilde{b}) \geq \alpha, \\ Nes(\tilde{b} \leq \tilde{a}) \geq \alpha \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \tilde{a} \leq \tilde{b} \text{ in } \alpha MS, \\ \tilde{b} \leq \tilde{a} \text{ in } \alpha MS \end{cases}
\end{aligned}$$

さて, TrFN を伴う LP 問題 (51) ~ (55) に対してよく使われる解法の一つでは, まず, 不等号を伴う制約条件式 (52), (53) のそれぞれを, それぞれに対して意思決定者により選択された「Dubois らの不等号関係指標およびそれらの下限 $\alpha \in [0, 1]$ による制約条件式」(複数でも可) に変換し, 等号を伴う制約条件式 (54) のそれぞれを, それぞれに対して意思決定者により選択された「Dubois らの等号関係指標およびそれらの下限 $\alpha \in [0, 1]$ による制約条件式」(複数でも可) に変換する. さらに, 変換された各式を通常の制約条件式あるいはその並列に同値変形し, 得られた問題を解く. 他方, TrFN を伴う LP 問題 (51) ~ (55) の, DP 順序関係を用いる従来よく使われる解法の一つでは, 不等号を伴う制約条件式 (52), (53) のそれぞれを, それぞれに対して意思決定者により選択された「DP 順序関係を用いた制約条件式」(複数でも可) に変換し, さらに任意の $i \in \{m_2 + 1, \dots, m\}$ に対して, その i における等号を伴う制約条件式 (54) を, それに対して意思決定者により選択された

「 $\alpha \in [0, 1]$ および次の式 (83) ~ (86) のいずれかによる『DP 順序関係を用いた 2 つの制約条件式の並立』」(複数でも可) に変換する:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \leq \tilde{B}_i \text{ in } \alpha VW, \\ \tilde{B}_i \leq \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \text{ in } \alpha VW \end{cases} \quad (80)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \leq \tilde{B}_i \text{ in } \alpha MW, \\ \tilde{B}_i \leq \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \text{ in } \alpha MS \end{cases} \quad (81)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \leq \tilde{B}_i \text{ in } \alpha MS, \\ \tilde{B}_i \leq \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \text{ in } \alpha MW \end{cases} \quad (82)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \leq \tilde{B}_i \text{ in } \alpha MS, \\ \tilde{B}_i \leq \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \text{ in } \alpha MS \end{cases} \quad (83)$$

さらに, これらの制約条件式を通常の制約条件式に同値変形し, 得られた問題を解く. この解法を本稿では DP 解法と呼ぶことにする.

この従来の 2 つの解法に関して, 任意の TrFN を伴う LP 問題に対して, DP 解法によって得られる問題となり得る問題の集合は, Dubois らの指標を用いる解法によって得られる問題となり得る問題の集合と等しいことが系 1, 定理 3 よりわかる. また, 「Dubois らの指標およびその下限を用いる解法において, 特に, 各制約条件式をそれぞれ 1 つの制約条件式に変換するという解法」と「DP 解法において, 特に, 不等号を伴う制約条件式はそれぞれ 1 つの制約条件式に, 等号を伴う制約条件式はそれぞれ 1 つの『DP 順序関係を用いた 2 つの制約条件式の並立』に変換するという解法(本稿では DP 解法 2 と表記する)」に関しても同様のことがいえる. この意味において, Dubois らの指標とその下限を用いる制約条件式の取り扱い方法は, DP 順序関係を用いる方法と見なせる.

4.3 従来の解法より優れた点

DP 順序関係と提案する関係との関係を考慮すると, TrFN を伴う LP 問題の従来の解法のひとつである上記 DP 解法 2 は, 新解法 2 の step 2 において, 常に $q_i = 0$ と選択し, さらに, 任意の $i \in \{1, \dots, 2m - m_2\}$ に対して $k_i \in \{1, \dots, 4\}$ を次式:

任意の $i \in \{1, \dots, 2m - m_2\}$ に対して,

$$k_i = k_{i+(m-m_2)} \text{ かつ } k_i \in \{1, 3\}$$

あるいは

$$k_i + k_{i+(m-m_2)} = 5 \text{ かつ } k_i \in \{2, 3\}$$

を満たすように選択することを義務づけられた解法に相当することがわかる. さらに, 新解法 2 において, 意思決定者は, 制約条件に用いる関係を, DP 解法 2 で用いることのできる順序関係(すなわち DP 順序関係となる)より広い範囲から選ぶことがわかる. 従って, 新解法 2 を用いると, 意

思決定者は DP 解法 2 を用いるよりも、自らの意思をより多く反映させて制約条件を取り扱うことができる。例えば、意思決定者は、使用する関係として $Type1(0.5, 0)$ ($Tr \times Tr$ に関して $Type1(0.5, 0)$ と $0.5 VW$ のきびしきは等しい)、あるいはこれよりきびしい $Type1(0.5, 0.3)$ 、あるいはもっときびしい $Type1(0.5, 3)$ (これと等しい DP 順序関係はない) 等の中から意思に従って選択することができる (表 2 参照)。また、提案する解法と DP 解法とに関しても同様のことがいえる。DP 解法を用いると、DP 解法 2 を用いるよりも、意思決定者は、自らの意思をより多く反映させて制約条件式を取り扱うことができるのは明らかである。従って、提案する解法を用いると、意思決定者は、DP 解法や DP 解法 2 よりも、自らの意思をより多く反映させて制約条件式を取り扱うことができる。

5. 数値例

本節では、前節で紹介した TrFN を伴う LP 問題に対する新解法 2 による求解過程を数値例によって示す。

次のような、TrFN を係数とする LP 問題を考える：

$$\max \quad (3, 4, 5, 6)x_1 + (19, 21, 24, 25)x_2 + (18, 22, 25, 26)x_3 \quad (84)$$

$$\text{s.t.} \quad (12, 13, 14, 15)x_1 + (16, 17, 18, 19)x_2 + (20, 22, 24, 26)x_3 \leq (250, 275, 300, 350) \quad (85)$$

$$(8, 9, 10, 11)x_1 + (7, 9, 11, 14)x_2 + (11, 12, 13, 14)x_3 \geq (50, 60, 70, 90) \quad (86)$$

$$(6, 8, 10, 11)x_1 + (19, 21, 24, 25)x_2 + (18, 25, 26, 27)x_3 = (200, 250, 300, 400) \quad (87)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (88)$$

前節で提案した解法による求解過程は次のようになる：

step 1 : (85) ~ (87) の 3 個の式を次の (89) ~ (92) の 4 個の式に変換する：

$$(12, 13, 14, 15)x_1 + (16, 17, 18, 19)x_2 + (20, 22, 24, 26)x_3 \leq (250, 275, 300, 350) \quad (89)$$

$$(8, 9, 10, 11)x_1 + (7, 9, 11, 14)x_2 + (11, 12, 13, 14)x_3 \geq (50, 60, 70, 90) \quad (90)$$

$$(6, 8, 10, 11)x_1 + (19, 21, 24, 25)x_2 + (18, 25, 26, 27)x_3 \leq (200, 250, 300, 400) \quad (91)$$

$$(6, 8, 10, 11)x_1 + (19, 21, 24, 25)x_2 + (18, 25, 26, 27)x_3 \geq (200, 250, 300, 400) \quad (92)$$

step 2 : 任意の $i \in \{1, \dots, 4\}$ に対して、 $k_i \in \{1, \dots, 4\}$, $\alpha_i \in [0, 1]$ および $q_i \in \mathbf{R}$ を選ぶことにより、(89) ~ (92) の各式で用いる順序関係を選択する。例えば

$$k_1 = 4, \alpha_1 = 0.7, q_1 = 1.2,$$

$$k_2 = 1, \alpha_2 = 0.4, q_2 = 0.3,$$

$$k_3 = 2, \alpha_3 = 0.2, q_3 = 0,$$

$$k_4 = 3, \alpha_4 = 0.5, q_4 = -0.2$$

と選んで式 (89) で用いる $Type4(0.7, 1.2)$ 、式 (90) で用いる $Type1(0.4, 0.3)$ 、式 (91) で用いる $Type2(0.2, 0)$ 、および式 (92) で用いる $Type3(0.5, -0.2)$ を選択する。

step 3 : (89) ~ (92) の各式をそれぞれ次の式に変換する。

$$(12, 13, 14, 15)x_1 + (16, 17, 18, 19)x_2 + (20, 22, 24, 26)x_3$$

$$(\leq Type4(0.7, 1.2)) (250, 275, 300, 350) \quad (93)$$

$$(8, 9, 10, 11)x_1 + (7, 9, 11, 14)x_2 + (11, 12, 13, 14)x_3 \quad (94)$$

$$(6, 8, 10, 11)x_1 + (19, 21, 24, 25)x_2 + (18, 25, 26, 27)x_3$$

$$(\leq Type2(0.2, 0)) (200, 250, 300, 400) \quad (95)$$

$$(200, 250, 300, 400) (\leq Type3(0.5, -0.2))$$

$$(6, 8, 10, 11)x_1 + (19, 21, 24, 25)x_2 + (18, 25, 26, 27)x_3 \quad (96)$$

step 4 : (93) ~ (96) の各式をそれぞれ実数係数を持つ次の通常の式に同値変形する：

$$11.82x_1 + 15.82x_2 + 19.64x_3 \leq 350.5 \quad (97)$$

$$9.94x_1 + 11.3x_2 + 12.94x_3 \geq 62.4 \quad (98)$$

$$10.2x_1 + 24.2x_2 + 26.2x_3 \leq 380 \quad (99)$$

$$6.3x_1 + 19.1x_2 + 20.5x_3 \geq 200 \quad (100)$$

step 5 : 式 (85) ~ (87) の代わりに、通常の制約条件 (97) ~ (100) を持つ次の LP 問題を解く：

$$\max (3, 4, 5, 6)x_1 + (19, 21, 24, 25)x_2 + (18, 22, 25, 26)x_3 \quad (101)$$

$$\text{s.t. (97) } \sim (100), (88) \quad (102)$$

(101), (102)のように目的関数がファジィ係数を伴う計画問題の解法は様々に提案されている。ここでは簡単のため、“目的関数のファジィ係数をその0.7レベル集合の右端の実数に置き換えて得られる関数を目的関数とする問題の解をもって基の問題の解とする”という解法を用いる。すなわち問題(101), (102)の解を次の問題を解くことによって求める：

$$\max 5.3x_1 + 24.3x_2 + 25.3x_3 \quad (103)$$

$$\text{s.t. (97) } \sim (100), (88) \quad (104)$$

この問題の解は

$$x_1 = 0, x_2 = 15.7025, x_3 = 0 \quad (105)$$

である。よって問題(84)～(88)の解は(105), そのときの目的関数値は

$$(298.348, 329.753, 376.86, 392.563) \quad (106)$$

となる。

6. おわりに

本稿では、3つのパラメータにより定まる、台形型ファジィ数(TrFN)の新しい関係を提案した。さらに、提案する関係が、DuboisとPradeによって提案された不等号関係指標から自然に導かれる順序関係を含んでいることを示した。また、提案する関係を用いて制約条件式を取り扱う台形型ファジィ係数を伴う線形計画(LP)問題の解法を提案した。さらに、この解法を用いると、意思決定者は不等号関係指標から導かれる順序関係を用いて制約条件式を取り扱う解法よりも、自らの意思をより多く反映させて制約条件式を取り扱うことができることを明かにした。

参考文献

- [1] C. V. Negoita; The Current Interest in Fuzzy Optimization, *Fuzzy Sets Syst.*, 6, 3, pp.261-269(1980).
- [2] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and H. Tanaka; Fuzzy programming : a survey of recent developments, in *Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*, pp.45-68(1990), R. Slowinski and J.Teghem(eds.), Kluwer Academic publishers, Printed in the Netherlands.
- [3] D. Dubois and H. Prade; Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, *Information Science*, 30, pp.183-224(1983).
- [4] D. Dubois; Linear programming with fuzzy data in J.C.Bezek(ed.), *Analysis of Fuzzy Information*, Volume 3 : Applications in Engineering and Science, CRC Press, Boca Raton, FL, pp.241-263(1987).
- [5] 石淵久生, 田中英夫; 区間係数をもつ線形計画問題の定式化とその解析, 日本経営工学会誌, 40, 5, pp.320-329(1989).
- [6] 中原陽三, 佐々木正仁, 井田憲一, 玄 光男; 区間係数を伴う0-1線形計画問題の効率的な一解法, 日本経営工学会誌, 42, 5, pp.345-351(1991).
- [7] Y. Nakahara, M. Sasaki, M. Gen and K. Ida; An Effective Method for Large-Scale 0-1 Linear Programming Problem with Interval Coefficients, *Proceedings in the Conference of IFIP*, pp.110-111(1991).
- [8] Y. Nakahara, M. Sasaki and M. Gen; On the Linear Programming Problems with Interval Coefficients, *Proceedings of the 14th Annual Conference on Computers and Industrial Engineering*, 23, Nos 1-4, pp.301-304(1992).
- [9] 中原陽三, 玄 光男; 区間係数を伴う De Novo 整数計画問題の UNIX ネットワーク環境における並列分散的な一解法, 日本経営工学会秋季研究大会予稿集, pp.291-292(1992.11).
- [10] Y. Nakahara and M. Gen; A Method for Solving Linear Programming Problems with Triangular Fuzzy Coefficients Using New Ranking Index, *Proceedings of the 15th Annual Conference on Computers and Industrial Engineering*, 25, Nos 1-4, pp.1-4(1993).
- [11] 中原陽三, 玄 光男; 台形型ファジィ数の新たな順序関係とその線形計画問題への応用, 第9回ファジィシステムシンポジウム予稿集, pp.193-196(1993).
- [12] 中原陽三, 玄 光男; 三角形ファジィ数の新たな順序関係とそのファジィ線形計画問題への応用, 日本経営工学会春季研究大会予稿集, pp.88-89(1993.5).
- [13] Y. Nakahara and M. Gen; Formulation and Analysis of Fuzzy Linear Programming Problems by User Oriented Ranking Criteria, *Proceedings of 16th International Conference on Computers and Industrial Engineering*, pp.305-308(1994).
- [14] Y. Nakahara and M. Gen; Constraints with Interval Coefficients and Strictness Probability Index, *Proceedings of Third IEEE Interna-*

tional Conference on Fuzzy Systems, Vol.3,
pp.1883-1888(1994).

(1994年5月12日 受付)
(1995年3月1日 再受付)

[問い合わせ先]

〒425 焼津市本中根549番1
静岡精華短期大学商学科
中原 陽三
☎: 054-623-7000(代)
FAX: 054-623-7453

著者紹介

中原 陽三 (なかはら ようぞう)

静岡精華短期大学商学科

昭和58年 慶大・工・数理卒。平成1年 同大学院博士課程修了。平成1～2年 静岡県立大・経情助手。平成2～4年 産能短大非常勤講師。平成3～5年 埼玉女子短大非常勤講師。平成3～7年 足利工業大非常勤講師。平成4年 静岡精華短大専任講師。平成6年 同助教授。工修。ファジィシステム最適化手法、並列分散処理に関する研究およびそのソフトウェア開発などに従事。日本オペレーションズ・リサーチ学会、電子情報通信学会、日本経営工学会、日本ファジィ学会等各会員。

玄 光男 (げん みつお)

足利工業大学工学部経営工学科

昭和44年 工学院大学電子工学科卒業。昭和49年 同大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了。昭和49年 足利工業大学経営工学科講師。昭和55年 同助教授。昭和62年 同教授。現在に至る。平成5年～7年足利工業大学情報科学センター長。昭和56年～57年 米国 University of Nebraska-Lincoln 客員助教授。工学博士。ファジィシステム最適化、ファジィ多目的計画法、遺伝的アルゴリズムおよびニューラルネットワークの応用に関する研究に従事。IEEE, IIE, 日本オペレーションズ・リサーチ学会、電子情報通信学会、電子情報通信学会、日本ファジィ学会、日本経営工学会、情報処理学会等会員。

New Relations of Trapezoidal Fuzzy Numbers and Its Application to Fuzzy Linear Programming Problems

by

Yozo NAKAHARA and Mitsuo GEN

Abstract :

In this paper, we will propose new relations of trapezoidal fuzzy numbers(TrFNs) each of which is defined using three parameters. And we will show that the proposed relations include the order relations produced by using both any cutting level $\alpha \in [0, 1]$ and anyone of the indices by Dubois and Prade. Moreover, we will propose a method for solving linear programming(LP) problems with TrFN coefficients, using the proposed relations. We will demonstrate that in this method decision maker(DM) can treat the constraint with more reflection of DM's intention than in the method using the order relations by indices proposed by Dubois and Prade.

Keywords : Trapezoidal fuzzy numbers, Relations, Parameters, Linear programming problems, Decision maker

Contact Address : **Yozo NAKAHARA**

Business Administration, Shizuoka Seika College
Yaidu-shi, 425, Japan
TEL : 054-623-7000
FAX : 054-623-7453