論文

ファジィデータに基づく帰属度関数の確率論的推定[†]

藤本 由紀夫* 新宅 英司*

本研究はファジィ帰属度関数を用いて主観的分類情報を定量化する確率モデルを提案した。まず、三角形の面積認識実験を行って主観値のばらつきが客観値の関数になること、および主観値の平均が客観値に対してずれを生じることを明らかにした。次に、主観的分類境界を導入して人間が主観値を分類表現する過程を考察し、分類特性がファジィ帰属度関数で評価できることを示した。また、数十のファジィデータから帰属度関数を推定する確率モデルを提案した。提案手法の有効性を三角形の面積認識実験で得られたファジィデータに適用して検証するとともに、この確率モデルが従来提案されている三角形や台形など多くの帰属度関数の形状も含むものであることを示した。

この帰属度関数はファジィデータから確率的に決定されるので、以降の信頼性解析に通常の客観情報と同様に使用できる。

キーワード：ファジィ帰属度関数、ファジィデータ、確率密度関数、主観的分類、分類境界、尤度関数、信頼性解析

1. 緒言

時間的あるいは経済的理由から、多数の客観データを観測や計測によって収集することが困難な場合、我々は専門家の主観を利用して状態を推定する。たとえば、構造物の品質管理や使用中の保守・点検では、多数の部材を限られた時間内に検査するという理由から、工作精度や欠陥の程度、変形、亀裂あるいは腐食損傷度などを主観によって判断する^{1),2)}。

人間の主観は良い、普通、悪い、などの粗い分類情報として利用することが多い。主観的分類情報は一般に誤差やあいまいさを含んでおり、また、個人差があるのが普通である。従って、主観的判断を工学的に利用する背景には、判断する人間の主観と客観値との整合性のある程度認めるという前提条件が存在している。

しかし、さらに積極的に主観情報を活用しよう

とする場合、例えば主観を信頼性解析などの数値解析に利用しようとする場合には、主観と客観値との対応関係を明らかにしておく必要がある³⁾。客観値と対応のとれた主観ならば、たとえ粗い分類情報であっても客観的な情報価値を有している^{4),5),6)}。

このような観点から本研究では、ファジィ帰属度関数を用いて主観的分類情報を定量化する方法を提案する。まず、三角形の面積認識実験を行って人間が物理量を主観的に分類する過程の一モデルを提案する。次に実験結果に基づいて、主観—客観関係式としてのファジィ帰属度関数の決定手法を提案する。提案手法の有効性は三角形の面積認識実験で得られたデータを用いて検討する。

2. 三角形の面積認識実験

人間が計測を行わず客観量を主観的に認識するとき、そこで生じる主観のばらつきや客観量との誤差を検討するため、三角形の面積認識実験を行った。

[†] Probabilistic Estimation of Membership Function Based on Fuzzy Data

* Yukio FUJIMOTO and Eiji SHINTAKU

広島大学工学部エンジニアリングシステム教室

Department of Engineering systems, Faculty of Engineering, Hiroshima University

2.1 実験方法

実験には面積が 20 cm^2 から 1 cm^2 毎に 100 cm^2 まで変化させた 81 枚の三角形を準備した。三角形は最長辺(底辺)が 5 cm から 20 cm で、高さを所定の面積になるように決めた後、頂点の位置を底辺の寸法内で一様乱数発生により決めてケント紙から切り抜いたものである。実験は K 君と T 君の 2 名の学生に対してそれぞれ次の 2 通りを行った。

実験 1 : 図 1 に示すように、三角形を一度に一枚づつ被験者に提示し、一枚当たり約 10 秒観察時間を与え、面積を主観的に言ってもらう。記録者はその面積を記録する。また、 44 cm^2 以下と言った三角形は Small と書いた箱に、 45 から 74 cm^2 の範囲と言った三角形は Medium の箱に、また 75 cm^2 以上と言った三角形は Large の箱に入れる。

実験 2 : 机の上に面積が 20 cm^2 、 60 cm^2 および 100 cm^2 の直角 2 等辺三角形 3 枚を見本として置いておく(面積を記入したもの)。被験者にこれらの三角形を見せた状態で実験 1 を行う。

2.2 実験結果

図 2(a), (b) に実験 1 (見本無し) の結果を示す。横軸 X は三角形の真の面積、縦軸 Y は主観的に認識した面積である。破線は $Y=X$ の関係を表す。また実線はデータ Y を最小二乗法で 2 次関数近似したものである。図より、主観値の平均 $\bar{Y}$ と X の間にはずれが生じており、また、ずれには個人差があることがわかる。さらに主観値 Y の分散は X の増加とともに増大しているように見える。そこで、実線の 2 次曲線を基準に Y のばらつきを調べてみた。その結果、 Y の標準偏差は 1 次関数で次式のように表された。

$$\left. \begin{array}{l} K \text{ 君(見本無し)} \quad \sigma(Y) = 0.10 X + 0.11 \\ T \text{ 君(見本無し)} \quad \sigma(Y) = 0.07 X + 3.22 \end{array} \right\} \quad (1)$$

上式の X にかかる係数 0.10 および 0.07 の値は、三角形の面積 X が 0 から 100 cm^2 になると標準偏差が 7 ないし 10 増加することを意味してお

図 1 三角形の面積認識実験。

り、明らかに $\sigma(Y)$ は X に対して増大している。

図 3(a), (b) は実験 2 (見本有り) の結果を示す。図より、比較見本がある場合には主観値の平均 $\bar{Y}$ と客観値 X とのずれが小さくなることがわかる。見本有りの場合の Y の標準偏差は次式のように表された。

$$\left. \begin{array}{l} K \text{ 君(見本有り)} \quad \sigma(Y) = 0.05 X + 2.23 \\ T \text{ 君(見本有り)} \quad \sigma(Y) = 0.07 X + 3.55 \end{array} \right\} \quad (2)$$

すなわち見本がある場合も標準偏差 $\sigma(Y)$ は X の関数となることがわかる。以上を要約すると次のようである。

- (1) 客観値 X を主観的に認識した場合主観値 Y はばらつく。また、 Y の平均 $\bar{Y}$ と X の間にずれが生じる。ずれは比較見本がある場合小さくなる。
- (2) ずれやばらつきには個人差が有り、またずれやばらつきは X によっても変化する。

図2 三角形面積の主観値と客観値の関係(実験1の結果).

図3 三角形面積の主観値と客観値の関係(実験2の結果).

3. 主観的認識過程のモデル

本章では人間が客観量を主観的に認識する過程を表すモデルを提案する。

x を物理的に測定可能な変数 X からのサンプルとする。いま、客観値 x を測定を行わず主観的にとらえた値を y とする。2章の実験結果より、 y はばらつきを有しており、また平均 $\bar{y}$ と x の間にはずれが生じる。そこで、ずれとばらつきを

$\varepsilon(x)$: $\bar{y}$ と x とのずれ

$\omega(x)$: $\bar{y}$ の y まわりのばらつきを表す確率密度関数

で表すと、 x と y の関係は次のようにモデル化することができる。

$$y = x + \varepsilon(x) + \omega(x) \quad (3)$$

すなわち、 x は $\varepsilon(x)$ を伴い、かつばらつき $\omega(x)$ を有する確率密度関数 $f_y(y)$ として主観的に認識されることになる。図4は X を客観尺度上に、 Y を主観尺度上にとって (3) 式の関係を示したものである。 $\varepsilon(x)$ と $\omega(x)$ の関数形は、判断する人間と客観値の示す様相に依存する。

次に、 y が主観的に分類され言語表現される過程を検討する。人間は分類を行う場合、頭の中であるしきい値を設けて分類しているものと考えら

れる。たとえば、主観と客観関係が図5(A)のようであり、しきい値が図中の a_1 と a_2 の2つ場合、主観尺度上では図5(B)のようにクリスプな分類となるが、客観尺度上では図5(C)のように境界があいまいに分類されることになる。

通常主観値は図5(A)のように数量表現されることは少なく一般には分類表現される。図5(C)のように、物理的に測定された客観値 $x_j (j=1, 2, 3, \dots, m)$ について、 $\tilde{S}, \tilde{M}, \tilde{L}$ などの言語で主

図4 主観のずれ $\varepsilon(x)$ とばらつき $\omega(x)$.

図5 データの主観的分類.

観的分類がされた m 個のデータをファジィデータと呼ぶ。

4. 帰属度関数の計算

図4において、サンプル x が $Small$, $Medium$ あるいは $Large$ に分類される確率は $\tilde{S}, \tilde{M}, \tilde{L}$ などの略号を使用すると次のようになる。

$$\begin{aligned} Pr[\tilde{S}|x] &= F_Y(a_1) \\ Pr[\tilde{M}|x] &= F_Y(a_2) - F_Y(a_1) \\ Pr[\tilde{L}|x] &= 1 - F_Y(a_2) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $F_Y(\cdot)$ は $f_Y(\cdot)$ の確率分布関数である。上式では次の関係が成立している。

$$Pr[\tilde{S}|x] + Pr[\tilde{M}|x] + Pr[\tilde{L}|x] = 1 \quad (5)$$

次に(4)式の確率を計算することを考える。 $\varepsilon(x)$ と $\omega(x)$ の関数形状、および主観的分類境界 a_1, a_2 は全て未知なため、このままでは(4)式の確率は計算できない。そこで、図6に示すように $f_Y(y)$ および a_1, a_2 を関数、

$$y = x + \varepsilon(x) \quad (6)$$

を介して客観尺度上に逆写像して考えることにする。写像後の確率密度関数を $f_X(x)$ とし、 a_1, a_2 を写

図6 $f_Y(y)$ の X 座標への写像.

像した値を客観的分類境界 b_1, b_2 とする。すると、(4)式の確率は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} Pr[\tilde{S}|x] &= F_X(b_1) \\ Pr[\tilde{M}|x] &= F_X(b_2) - F_X(b_1) \\ Pr[\tilde{L}|x] &= 1 - F_X(b_2) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $F_X(x)$ は $f_X(x)$ の確率分布関数である。

種々の x に対して (7) 式の確率を計算し、それらをなめらかに結ぶと図 6 の下に示す 3 本の曲線, $Pr[\tilde{S}|x]$, $Pr[\tilde{M}|x]$, および $Pr[\tilde{L}|x]$ を描くことができる。これらの曲線は x を主観的に分類した場合, それが $\tilde{S}$, $\tilde{M}$ あるいは $\tilde{L}$ に分類される確率を表している。すなわち (7) 式はファジィ数学で使用する直交帰属度関数 $\mu(x)$ (Orthogonal membership function) と同等のものと考えることができる。

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{S}}(x) &= Pr[\tilde{S}|x] \\ \mu_{\tilde{M}}(x) &= Pr[\tilde{M}|x] \\ \mu_{\tilde{L}}(x) &= Pr[\tilde{L}|x] \end{aligned} \quad (8)$$

5. 分類境界 b_1, b_2 および標準偏差 $\sigma(x)$ の決定

(8) 式の帰属度関数の計算には, $f_X(x)$ の分布形を決定するとともに, 未知量 b_1, b_2 および $\sigma(x)$ を明らかにする必要がある。ここですで, $f_X(x)$ について次の仮定と近似を行う。

- (1) $f_X(x)$ の分布形は (9) 式から (11) 式の正規分布, β 分布あるいは一様分布など既存の分布を仮定する。
- (2) $f_X(x)$ の平均 x はサンプル値 x に一致すると近似する。
- (3) $f_X(x)$ の標準偏差 $\sigma(x)$ は x の識別能力の程度を表す量で, x の様相と判断する人間の識別能力に依存すると仮定する。

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (9)$$

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

$$f_X(x) = \frac{-3}{4(\sqrt{5}\sigma)^3} [x^2 - 2x\bar{x} + \{\bar{x}^2 - (\sqrt{5}\sigma)^2\}] \quad (10)$$

$$\bar{x} - \sqrt{5}\sigma \leq x \leq \bar{x} + \sqrt{5}\sigma$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2(\sqrt{3}\sigma)} \quad (11)$$

$$\bar{x} - \sqrt{3}\sigma \leq x \leq \bar{x} + \sqrt{3}\sigma$$

$f_X(x)$ の標準偏差 $\sigma(x)$ と客観的分類境界 b_1, b_2 についてはファジィデータを用いて以下の手順で決定する。

いま, m 個のデータが主観的に分類される確率を尤度関数 L で表し, その対数をとると次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Log} L &= \sum_{i=1}^{m_1} \log Pr[\tilde{S}|x_i] + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \log Pr[\tilde{M}|x_i] \\ &\quad + \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \log Pr[\tilde{L}|x_i] \end{aligned} \quad (12)$$

上式では, m_1 個のデータが $\tilde{S}$ に, m_1+1 から m_2 が $\tilde{M}$ に, m_2+1 から m_3 が $\tilde{L}$ に分類されていることを表す。

(12) 式の $\text{Log} L$ を最大化する b_1, b_2 および $\sigma(x)$ を決定すればよいが, $\sigma(x)$ は x の関数であるので容易に決定できない。そこで, 分類境界 b_1, b_2 での標準偏差を σ_1, σ_2 とし, 任意の x における $\sigma(x)$ をこの 2 点を結ぶ直線で近似することにする。

$$\sigma(x) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b_2 - b_1} (x - b_1) + \sigma_1 \quad (13)$$

すると, 最適化変数は $b_1, b_2, \sigma_1, \sigma_2$ の 4 つに限定でき, その結果これら 4 変数の最適値を (12) 式から数値的に決定することができる。

6. 帰属度関数の解析例

三角形の面積認識で得られたファジィデータを K 君の場合について図 7(a), (b) に示す。これらのデータを用い, $f_X(x)$ に正規分布, β 分布あるいは一様分布を仮定して, 分類境界 b_1, b_2 および標準偏差 $\sigma(x)$ を計算した。その結果を Table 1 (見本無し) と Table 2 (見本有り) に示す。同表から分類境界や標準偏差は人により異なるが, $f_X(x)$ の分布形にはあまり影響を受けないことがわかる。

次に, 表中の $b_1, b_2, \sigma_1, \sigma_2$ を用いて K 君の三角形の面積認識能力に関する帰属度関数を描いた結果を図 8(a), (b) に示す。図より, $f_X(x)$ が正規分

図7 'K'君の三角形面積認識に関するファジィデータ.

表1 実験1のファジィデータに対する分類境界と標準偏差.

(Without reference triangles)

Judgment by	$f_X(x)$	b_1	σ_1	b_2	σ_2
student 'K'	Normal dist.	48.6	5.88	80.4	11.4
	Beta dist.	48.0	5.50	78.0	12.7
	Uniform dist.	47.5	4.83	76.0	13.3
student 'T'	Normal dist.	60.3	10.7	87.6	6.42
	Beta dist.	60.2	10.5	88.0	5.99
	Uniform dist.	59.9	10.6	88.3	5.73

表2 実験2のファジィデータに対する分類境界と標準偏差.

(With reference triangles)

Judgment by	$f_X(x)$	b_1	σ_1	b_2	σ_2
student 'K'	Normal dist.	42.2	2.58	71.7	6.05
	Beta dist.	42.3	2.46	71.4	5.68
	Uniform dist.	42.4	2.32	71.2	5.51
student 'T'	Normal dist.	46.2	6.98	76.8	9.89
	Beta dist.	46.7	7.13	76.8	9.08
	Uniform dist.	47.0	7.16	76.7	9.26

(a)Student 'K'.(without reference triangles)

(b)Student 'K'.(with reference triangles)

図8 提案手法で計算した三角形面積の帰属度関数.

布の場合帰属度関数は曲線的であるが、一様分布の場合には帰属度関数が直線的になることがわかる。また、見本がある場合の方が帰属度の分布が左右対称に近いことがわかる。図8の傾向は T 君の場合も同様であった。以上から、帰属度関数は尤度関数を用いて確率的に決定しうることがわかる。

7. 考察

ファジィ理論の応用分野では、三角形や台形など種々の帰属度関数が用いられている⁷⁾。本章では提案手法がこれらの帰属度関数も含むものであることを示す。

いま主観的分類が5段階分類とし、その分類境界が $b_1=20.0$, $b_2=40.0$, $b_3=60.0$, $b_4=80.0$ であるとする。ここで、 $f_X(x)$ として図9に示す6つの分布を考え、 $f_X(x)$ の標準偏差が $\sigma(x)=5.0$ で一定とする。この条件下での帰属度関数を図10に示す。図より、帰属度は仮定した $f_X(x)$ の形状によってなめらかな曲線から三角形、台形、折線、

鋸刃状など種々の形状になることがわかる。また、 $f_X(x)$ が正規分布と二等辺三角形分布の場合では $f_X(x)$ の形状はかなり異なっているが、帰属度関数にはそれほど差がみられない。

次に $f_X(x)$ が正規分布と一様分布の場合について、分類境界を b_1, b_2, b_3, b_4 とし、 $f_X(x)$ の標準偏差 $\sigma(x)$ を図11に示す3通りに変えた場合の帰属度関数を描いてみた。3通りの $\sigma(x)$ はそれぞれ主観的認識能力が X の変域で一定の場合、単調増加する場合、および変域の中央部で最小値をとる場合に相当している。図12(a)は分類境界が不等間隔で $\sigma(x)=5.774$ で一定の場合の帰属度関数、図12(b)は分類境界が等間隔で $\sigma(x)$ が単調増加の場合、図12(c)は中央部で最小値をとる場合の帰属度関数である。図より、帰属度関数の形状は、客観的分類境界の値と $f_X(x)$ の標準偏差 $\sigma(x)$ の関数形に依存して種々の形状になることがわかる。

以上から提案手法が従来使用されている帰属度関数の形状の多くを含むものであることがわかる。

図9 仮定した6通りの $f_X(x)$.

図 10 提案手法で得られた帰属度関数.

図 11 仮定した 3 通りの標準偏差 $\sigma(x)$. 図 12(b) $\sigma(x)$ が増加関数の場合の帰属度関数. 図 12(a) $\sigma(x)$ が一定の場合の帰属度関数の例. 図 12(c) $\sigma(x)$ が減少増加の場合の帰属度関数.

8. 結言

本研究ではファジィ帰属度関数を用いて主観的分類情報を定量化する方法を検討した。まず、三角形の面積認識実験を行って主観値 y と客観値 x の関係が

$$y = x + \varepsilon(x) + \omega(x)$$

で表されることを明らかにした。ここで $\varepsilon(x)$ は主観値の平均 $\bar{y}$ と x とのずれ、 $\omega(x)$ は主観値のばらつきである。

次に人間が主観値を分類表現する過程について考察し、分類特性がファジィ帰属度関数で評価できることを示した。また、数十のファジィデータから帰属度関数を決定する確率モデルを提案した。この帰属度関数は全て確率的に決定されるので、以降の信頼性解析に通常の客観情報と同様に使用できる。

三角形面積の認識実験を通じて得られたファジィデータに本手法を適用してその有効性を明らかにするとともに、三角形や台形など従来提案されている多くの帰属度関数形状も本手法に含まれることを示した。

参 考 文 献

- 1) 藤本, 永井: あいまい推論法の構造部材検査への適用について, 日本造船学会論文集, Vol.162, pp.

494-502 (1987).

- 2) 伊藤, 板垣: 構造信頼性評価に対するファジー情報の導入, 構造物の健全性のファジー評価, HPI セミナー, 日本高圧力協会, pp.53-68 (1990).
- 3) 奥田, 古殿, 浅居: ファジィ観測データに基づく統計的推定, 計測自動制御学会論文集, Vol.26, No.5, pp.564-571 (1990).
- 4) 鬼沢: 信頼性解析リスク解析へのファジィの応用の現状と展望, 日本ファジィ学会誌, Vol.5, No.5, pp.935-948 (1993).
- 5) 北森: あいまいさに対する方法論的考察—とくに計測制御工学の立場から—, 日本ファジィ学会誌, 第3巻, 第1号, pp.27-34 (1991).
- 6) 仁木: 確率の立場から見たファジィ理論, 日本ファジィ学会誌, Vol.3, No.4, pp.15-31 (1991).
- 7) たとえば寺野, 浅居, 菅野: ファジィシステム入門, オーム社 (1987).

(1994年7月15日 受 付)

(1994年10月29日 再 受 付)

(1994年12月10日 再々受付)

[問い合わせ先]

〒739 広島市鏡山1-4-1

広島大学工学部

エンジニアリングシステム教室

藤本 由紀夫

TEL: 0824-24-7813

FAX: 0824-22-7194

E-mail: fujimoto@naoe.hiroshima-u.ac.jp

著 者 紹 介

藤本 由紀夫 (ふじもと ゆきお)

広島大学工学部エンジニアリングシステム教室

1975年 広島大学工学部船舶工学科卒業。1982年 大阪大学大学院工学研究科博士課程後期修了。同年 広島大学工学部助手, 助教授を経て, 1993年より同学部教授。この間, 1986~87年 コロンビア大学土木工学科客員研究員。1984年 関西造船協会賞, 1993年 日本造船学会論文賞, 1995年 国際海洋極地工学会最優秀論文賞受賞。現在, 構造物の保守検査計画, 構造モニタリング, 構造物の安全評価に関する研究に従事。

新宅 英司 (しんたく えいじ)

広島大学工学部エンジニアリングシステム教室

1989年 九州大学工学部造船学科卒業。1994年 九州大学大学院工学研究科博士後期課程単位取得退学。同年より広島大学工学部助手。現在, 構造物の検査ロボットの開発および制御に関する研究, 構造モニタリング, 構造物の安全評価に関する研究に従事。

Probabilistic Estimation of Membership Function Based on Fuzzy Data

by

Yukio FUJIMOTO and Eiji SHINTAKU

Abstract :

A probabilistic model for the determination of membership function based on fuzzy data is proposed. First, an experiment on the perception of triangle area by human is carried out in order to see the relationship between subjective value y , and objective value x . It is found that the subjective value can be expressed by a probability density function $f_Y(y)$, in which mean of $f_Y(y)$ has a distance from x and standard deviation of $f_Y(y)$ is a function of x . By introducing subjective classification boundaries, the process of subjective classification is expressed by a probabilistic model. In the model, membership grade, which is same as the probability that an objective data x is classified into small, medium or large, can be calculated by the integration of $f_Y(y)$ in the range between respective classification boundaries.

Actual calculation of membership grade is carried out on objective coordinate. The $f_Y(y)$ and the subjective classification boundaries are all mapped onto objective coordinate and a probability density function $f_X(x)$ and objective classification boundaries are newly introduced. Normal, beta and uniform distributions are assumed for $f_X(x)$. The mean of $f_X(x)$ is approximated by the objective value x . The standard deviation of $f_X(x)$ and the objective classification boundaries are determined from the fuzzy data by the likelihood analysis.

The proposed method is applied to the fuzzy data obtained by the experiments on the perception of triangle area. It is concluded the membership function can be determined for every type of $f_X(x)$. Further, it is found that the proposed method can generate triangle and trapezoid membership functions too.

Keywords : Fuzzy membership function, Fuzzy data, Probability density function, Subjective classification, Classification boundary, Likelihood function, Reliability analysis

Contact Address : **Yukio FUJIMOTO**

*Department of Engineering systems, Faculty of Engineering,
Hiroshima University
Kagamiyama 1-4-1, Higashi-Hiroshima, 739
TEL : 0824-24-7813
FAX : 0824-22-7194
E-mail : fujimoto@naoe.hiroshima-u.ac.jp*