ショートノート

簡略化ファジィ推論を用いた自由曲面の構成[†]

竹澤 邦夫*

従来の自由曲面の設計方法を一般化すると、簡略化ファジィ推論に到達する。これによって、実用性の高い自由曲面の設計が可能になり、自由曲面とノンパラメトリック回帰との関連が明確になる。この方法を用いてトウモロコシの葉形を再現したところ、その優れた特性が明らかになった。

キーワード：簡略化ファジィ推論，自由曲面，トウモロコシ，ノンパラメトリック回帰

1. はじめに

コンピュータ上で自由曲面を構成するためには、これまではベツィエ曲面、B-スプライン曲面、グレゴリ・パッチなどの方法が使われてきた^{1), 2)}。これらは多項式、または多項式を分子と分母とする分数の形をした式を用いたものである。ファジィ推論の立場からこれらの方法を検討すると、こうした方法は簡略化ファジィ推論の特殊な場合と見なされる。

曲面上の点を $\mathbf{y}(\mathbf{u}) = (y_1, y_2, y_3)$ 、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ は $\mathbf{y}$ に対応する媒介変数、多項式などで表される関数を $\mu_j(\mathbf{u})$ 、制御点を $\mathbf{Y}_j^* = (Y_{1j}, Y_{2j})$ 、 $1 \leq j \leq N$ とすると、従来の自由曲面は以下のような形式で表現できる。

$$\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \frac{\sum_j \mathbf{Y}_j^* \mu_j(\mathbf{u})}{\sum_j \mu_j(\mathbf{u})} \quad (1)$$

と書ける。これは、簡略化ファジィ推論に他ならない。すなわち、以下のようなルールを用い、「 $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}_1$ に近い」を表すメンバーシップ関数を $\mu_j(\mathbf{u})$ とした場合の、重心法による推定と等価である。

if $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}_1$ に近い then $\mathbf{y} = \mathbf{Y}_1^*$

if $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}_2$ に近い then $\mathbf{y} = \mathbf{Y}_2^*$

⋮

if $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}_N$ に近い then $\mathbf{y} = \mathbf{Y}_N^*$ (2)

ここでは、このことに基づいて、簡略化ファジィ推論を用いて自由曲面を描く方法が、B-スプラインや NURBS (non-uniform rational B-spline) などのこれまでの方法よりも一般性が高く、実用的にも優れたものであることを示す。応用例として、トウモロコシの葉の形をこの方法で描いたものを示して、生物の形態を描くために、この方法が適していることを明らかにする。

2. 自由曲線の設計

まず、3次元空間における自由曲線について考える。3次元空間における曲線は、媒介変数を用いて以下のような形式で書ける。

$$(y_1, y_2, y_3) = (y_1(u), y_2(u), y_3(u)) \quad (3)$$

ここで、 y_1, y_2, y_3 は曲線上の点の座標で、 u は媒介変数である。ここでは、一般性を失わずに表現を簡略にするために、 $y_1(u)$ だけについて考察する。

B-スプラインは $y_1(u)$ を以下のような式で表現する。

$$y_1(u) = \mathbf{G}(u)^T \mathbf{Y}^* \quad (4)$$

ここで、“ T ” は転置を表し、 $\mathbf{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_N^*)^T$ は制御点を示す。 $\mathbf{G}(u) = (G_1(u), G_2(u), \dots, G_N(u))^T$ は制御点が曲線に与える影響の強さ

[†] Construction of Free-form Surface Using Simplified Fuzzy Logic

* Kunio TAKEZAWA
農林水産省 北陸農業試験場 研究技術情報科
Research Information Section, Hokuriku National Agricultural Experiment Station

を表す。 $G_j(u)$ は u を独立変数とする多項式で表わされ、以下のような、単位の分割と呼ばれる条件を満たす。

$$\sum_j G_j(u) = 1 \quad (5)$$

そこで、(5)を満たすための最も一般的な条件を考えると、以下のようになる。

$$G_j(u) = \frac{\mu_j(u)}{\sum_j \mu_j(u)} \quad (6)$$

すると、(1)と(4)とが等価になる。すなわち、(5)を満たすことだけを条件として自由曲線を設計する方法は、簡略化ファジィ推論を用いて自由曲線を描くことと同等なのである。この方法をB-スプラインと比較すると、B-スプラインの妥当性の根拠であった、直線補間の一般化であること、弾性方程式の解であること、単純な最小問題の解であること、この3つの利点を捨て去ることで、より表現力の高い曲線や曲面を実現したものと言える。現在、自由曲面の実用的な利用において最も広く使われている方法であるNURBSもこうした文脈に沿って開発されたもので、多項式の代わりに分子と分母に多項式を持つ分数の形をした式を用いることで一般性の高い曲線の表現を目指している。この方針をさらに徹底し、単位の分割だけを残し、他の制約を完全に取り去ってしまうことによって実現する方法が簡略化ファジィ推論と等価になる。

3次元空間の中に存在する $\{(Y_{1j}, Y_{2j}, Y_{3j})\} (1 \leq j \leq N)$ という N 個のデータ点を補間して自由曲線を得るためには、これらの点を $Y_{1j}=y_1(U_j)$ 、 $Y_{2j}=y_2(U_j)$ 、 $Y_{3j}=y_3(U_j)$ と表す。通常は、 $U=\{U_j\}$ において $U_j=j$ とすればよいが、 U_j を等間隔に配置しないことも可能である。ここでも、式を単純にするために $Y=(Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1N})^T$ について議論する。求める $y_1(u)$ を(4)で表すためには以下のような条件を満たしていなければならない。

$$Y = GY^* \quad (7)$$

ここで G はそれぞれの制御点がデータに与える

影響の強さを示す $N \times N$ の行列であり、以下のようにかける。

$$G = [G_{ij}] = [G_j(U_i)] \quad (8)$$

したがって、以下の式が得られる。

$$Y^* = G^{-1}Y \quad (9)$$

ここで $Z \equiv G^{-1}$ とすると、補間によって得られる関数は以下のようにかける。

$$\begin{aligned} y_1(u) &= G(u)^T Z Y \\ &= (Z^T G(u))^T Y \\ &= H(u)^T Y \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $H(u) (\equiv Z^T G(u))$ は、 Y が $y_1(u)$ の上の点に与える影響の強さを表わしているもので、Equivalent kernel³⁾である。これによって、全てのデータ点を通る曲線を得ることができる。通常、簡略化ファジィ推論のルールを求める場合はルールの数よりもかなり多数のデータを用いて $\{Y^*\}$ を計算するが、この場合はデータの数かルールの数と同数なので補間が実現する。一方、データの数よりも少ない数のルールを求めることは平滑化に相当する。

3. 自由曲面の設計

前節で述べた自由曲線の構成方法を自由曲面の設計に応用することは容易である。

まず、曲面を以下のように表わす。

$$(y_1, y_2, y_3) = (y_1(u, v), y_2(u, v), y_3(u, v)) \quad (11)$$

ここで、 y_1, y_2, y_3 は3次元空間に存在する曲面上の点を示し、 u と v は媒介変数である。ここでも、表現を単純にするために、 $y_1(u, v)$ についてだけ議論する。

自由曲面を表す場合は(4)は以下のようにになる。

$$y_1(u, v) = G(u, v)^T Y^* \quad (12)$$

さらに、(10)は以下のものになる。

$$y_1(u, v) = H(u, v)^T Y \quad (13)$$

従来の方法では、制御点は u と v が張る格子が交差する点(格子点)に存在しなければならなかった。例えば、ベツィエ曲面は以下のように書ける²⁾。

$$y_1(u, v) = \sum_{j,k} B_j(u) B_k(v) Y_{jk}^* \quad (14)$$

ここで、 $B_j(u)$ はバーンスタインの多項式であり、 Y_{jk}^* は格子点の上に位置する制御点である。(14)における $B_j(u) B_k(v)$ をより一般性の高い形である $G_j(u, v)$ に置き換えると(12)が得られ、制御点をどのような位置に置くことも可能になる。

また、 $G_j(u, v)$ に対する制限が弱められたため、 $G_j(u, v)$ としてどのような関数を用いるかは実用的な観点から検討することが可能になった。例えば、得られる曲面が美的な観点から満足できるものであること、 $\{H_j(u, v)\}$ が Equivalent kernel として妥当なものであること、 $\{H_j(u, v)\}$ などを求める際に数値的に安定性であること、などのこれまでの制限の強い方法では対応できなかった要求に応えられるようになった。さらに、(12)は特殊な場合としてベツィエ曲面、B-スプライン曲面、NURBS 曲面などを含んでいるので、近似や変換などを行わずに、この新しい形式の下で従来の曲面を扱うことができる点も実用的に大きな利点となる。

4. トウモロコシの葉形の構成

動物や植物は複雑な形のものが多く、格子点上のデータを得ることは困難であるため、生物の形態から得られたデータを使って曲面を描く際に従来の方法を用いると、複雑な手続きを必要とすることが多い。ここで提案する方法はこうした要求に十分に応えるものであることを示す。

用いたデータは一枚のトウモロコシの葉の3次元空間内の座標を3次元デジタイザ(3SPACE Isotrak Polhemus Co.Ltd)を用いて測定したものである。トウモロコシの葉は不規則な曲面を構成しているので、その特徴をよく表す点は格子点上には位置していない。したがって、このデータから簡単な手続きで曲面を構成することは従来の方法では不可能である。

3次元空間における葉の位置は132点で測定され、それらの点は葉の両端と葉の中央の曲線の3本の曲線に沿っている。構成される曲面は以下の

ように書ける。

$$(y_1, y_2, y_3) = (y_1(u, v), y_2(u, v), y_3(u, v)) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1) \quad (15)$$

ここで、 (y_1, y_2, y_3) は3次元空間に位置する曲面上の点を示し、 u と v は媒介変数である。曲面は u の値を0.0から1.0まで変化させることによって得られる。これは、葉の中央の線に沿った移動に相当する。また、 v も0.0から1.0まで変化させる。 v が0.0のときが左側の端、0.5のときが中央、1.0のときが右端に、それぞれ相当する(図1)。 $\mu_j(u, v)$ は以下のようなものとした。

$$\mu_j(u, v) = \exp(-a(u - U_j)^2 - b(v - V_j)^2) \quad (16)$$

$$a = 1.0 \quad (17)$$

$$b = 1000.0 \quad (18)$$

$\mu_j(u, v)$ が最大値をとる点である $\{(U_j, V_j)\}$ ($1 \leq j \leq 132$) にデータをとった点を対応させた。 U_j の値はデータ点の間の距離にほぼ比例するようにし、 V_j は葉の左の端で0.0、中央で0.5、右端で1.0にした。 a と b の値は、いくつかの値を組合せて曲面を描き、最も妥当と思われるものを採用した。式(17)と(18)を比べると、 b の値が a よりもかなり大きい。これは、 v 方向には $v=0.0, 0.5, 1.0$ の3つの値に対応したデータしかないため、データからは想像できないような凹凸が発生するのを防ぐためである。式(16)における a や b のような

図1 トウモロコシの葉の上で測定して得られた点

変数の役割は平滑化と補間とで異なる。平滑化においては、こうした変数はスプーニング・パラメータと呼ばれ、滑らかさの程度を変化させる役割を果たす。一方、補間においては、 a や b の値を変化させることで、全てのデータ点を通る、という条件を満たしたままで曲面の表情を変えることができるのである。

図2は、式(16)を用いて式(12)における Y^* (制御点) を求めて得られた曲面(式(15)における (y_1, y_2, y_3)) である。したがって、この曲面上には測定した全ての点が位置する。こうした曲面は、葉の受光の様子を表すシミュレーションや植物の生長を示すモデルの結果を表すために重要な役割を果たすであろう。

図2 図1を補間して得られた曲面

5. おわりに

入力と出力(独立変数と従属変数)の間の関係を滑らかな曲面で表す、という目的において、ファジィ推論と自由曲面の設計は密接な関連を持つ。にもかかわらず、これまでは、この二つの分野の方法を比較、検討するような議論が行われてこなかった。表面的な問題設定の違いのために本質的な共通性が捉えにくくなっていたことは、双方にとって不幸なことだったと言える。しかし、ここで示したように、自由曲面の設計における基本的な形式を一般化すると簡略化ファジィ推論と同等になるので、自由曲面の設計を簡略化ファジィ推

論の文脈で捉え直すことによって、より実用性の高い自由曲面の設計が実現する。今後は、言語や感覚の表現を出発点として発展してきたファジィ推論が、より表現力の高い自由曲面の創出に役立つこともあり得るのではないだろうか。

謝 辞

この論文の第3節における、測定・計算・作図は、農林水産省 農業環境技術研究所 計測情報科の研究員だった森永慎介氏によって行われた。そのことを感謝する言葉を伝えることが出来なくなってしまったことは残念でならない。

参 考 文 献

- (1) H. Chiyakura: Solid modeling with DESIGN-BASE, Addison-Wesley, Reading, 1988.
- (2) G. Farin: Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide. Academic Press, CA, U.S.A., 1990. (日本語版は、木村、山口 訳: 「CAGDのための曲線・曲面理論」, 共立出版, 1991)
- (3) 竹澤: ノンパラメトリック回帰からみたファジィ推論, 日本ファジィ学会誌, Vol.5, No.6, 1273-1279, 1993.

(1994年9月16日 受付)

[問い合わせ先]

〒943-01 新潟県上越市稲田1-2-1
農林水産省 北陸農業試験場
研究技術情報科
竹澤 邦夫
☎: 0255-26-3214
☎: 0255-24-8578
E-Mail: takezawa@inada.affrc.go.jp

 著 者 紹 介

竹澤 邦夫 (たけざわ くにお)

農林水産省 北陸農業試験場 研究技術情報科

1984年 名古屋大学大学院 工学研究科 応用物理学専攻 前期課程修了。同年より、1995年3月まで、農林水産省 農業環境技術研究所に勤務し、ノンパラメトリック回帰、ファジィ推論などを用いた、地球環境、気象、農業生産などの解析とモデル化の研究に従事。1995年4月より現職。日本ファジィ学会、情報処理学会、応用統計学会、日本計量生物学会、日本農業気象学会などの会員。農学博士。

Construction of Free-form Surface Using Simplified Fuzzy Logic

by

Kunio TAKEZAWA

Abstract :

Generalization of conventional methods of free-form surface design results in simplified fuzzy logic. This yields a flexible free-form surface construction method, and relates free-form surface with nonparametric regression. Reconstruction of a corn leaf using this algorithm illustrates its superior performance.

Keywords : Corn, Free-form Surface, Nonparametric Regression, Simplified Fuzzy Logic

Contact Address : **Kunio Takezawa**

*Research Information Section, Hokuriku National Agricultural Experiment Station
Inada 1-2-1, Jyoetu, Niigata 934-01, Japan*

TEL : 0255-26-3214

FAX : 0255-24-8578

E-Mail: takezawa@inada.affrc.go.jp