論文

Kóczy の線形補間型推論法に関する 2、3 の考察[†]

石 岩* 水本 雅晴*

ファジィルールベースが疎である場合、従来のファジィ推論方法ではうまく適用できない。この問題に対して、Kóczy と Hirota は「線形補間推論法」という推論法を提案した。彼らは「ファジィルール $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$ および観測値 A^* のメンバーシップ関数が三角型である場合、その推論結果のメンバーシップ関数も三角型となる」という結論を得ているが、本論文ではこの結論は必ずしも妥当ではないことを示し、また、推論結果のメンバーシップ関数が三角型になるための条件を見出した。

キーワード：疎なファジィルールベース、ファジィ推論、線形補間型推論

1. はじめに

ファジィ制御やファジィエキスパートシステムにおいて使用されているファジィ推論法のほとんどは入力空間がすべて何らかのファジィ規則に覆われていて、与えられた観測値との一致度を基に推論結果を導くものである[1-3]、しかしながら、ファジィ規則が疎である場合、すなわち、入力空間がどの規則にも覆われていない部分がある場合、その部分に観測値が入力された時ファジィ規則が一つも発火しないことが起こりうる。このような場合、通常のファジィ推論法では推論結果を求めることができない。この問題に対して、Kóczy と Hirota[4,5]はこのような疎なファジィ規則空間におけるファジィ推論法として「線形補間型推論法」を提案し、通常のファジィ推論法では解決できなかった問題を制限付きではあるが解決した。

本論文では、彼らの「線形補間型推論法」によって得られた推論結果は必ずしも理に適ったものではなく、奇妙な形のメンバーシップ関数で得られることがあることを示す。また、「ファジィ規則 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$ および観測値 A^* のメンバーシップ関数が三角型であるならば、その推論結果 B^* のメンバーシップ関数も三角型になる」という彼らの結論は必ずしも妥当ではないことを指摘するとともに、彼らの補間型推論法による推論結果のメンバーシップ関数が三角型になるための十分条件と必要条件を求める。また、「ファジィ規則

$A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1} \Rightarrow B_{11}, B_{21}, \dots, B_{n1}; A_{12}, A_{22}, \dots, A_{m2} \Rightarrow B_{12}, B_{22}, \dots, B_{n2}$ および観測値 $A^*_1, A^*_2, \dots, A^*_m$ のメンバーシップ関数が三角型であるとき、その推論結果 $B^*_1, B^*_2, \dots, B^*_n$ のメンバーシップ関数も三角型になる」という多次元の場合の彼らの結論も一般に成り立たないことを示す。また、推論結果のメンバーシップ関数が三角型になるための必要条件を簡単に議論する。

2. 疎な規則空間でのファジィ推論

トマトの問題[1]を前提として、次のような2つの形のファジィ推論を考えてみよう。

ファジィ推論 1 :

R : もしトマトが赤ければ、トマトは熟している

O : このトマトは非常に赤い

C : このトマトは非常に熟している

ここで、 R はファジィ規則、 O はファジィ観測値、 C はファジィ推論結果である。

ファジィ推論 2 :

$R1$: もしトマトが赤ければ、トマトは熟している

$R2$: もしトマトが緑ならば、トマトは熟していない

O : このトマトは黄色

C : このトマトは ???

ファジィ推論 1 と違い、ファジィ推論 2 では図 1 のように入力空間(トマトの色)が規則 1, 2 の前件部「緑」「赤」に覆われていない部分があり、この部分に入力される観測値「黄」は前件部とは全く交わっていない。この場合、従来のファジィ推論法では推論結果を求めることができない。しかしながら、われわれ人間の直観からすれば、ファジィ推論 2 の結論は次のよ

[†] Some Considerations on Kóczy's Linear Interpolative Reasoning Method

Yan SHI and Masaharu MIZUMOTO

* 大阪電気通信大学 情報工学部

Division of Information and Computer Sciences, Osaka Electro-Communication University

うに求めることができるであろう。黄色は緑色と赤色の中間にあるので、トマトの熟し方は“熟している”と“熟していない”との中間、すなわち、“このトマトは半熟である”という結論が人間の推論過程に合うであろう。つまり、疎なファジィ規則空間において、もし観測値が予め与えられた2つの規則の前件部の中間にあるならば、その推論結果も対応している後件部の中間にあるべきであろうということである(図1参照)。

このような疎なファジィ規則空間における補間方法がKóczyとHirotaによって以下のように提案されている[4,5]。

定義1 : $A, B \in P(X)$ ($P(X)$ は集合 X におけるすべての正規凸ファジィ集合の集合)とする。もし任意の $\alpha (\in (0,1])$ に対して、つぎの条件

$$\inf\{A\alpha\} < \inf\{B\alpha\}, \sup\{A\alpha\} < \sup\{B\alpha\}$$

を満足すれば、 A は B より小さい ($A < B$) という。ここで、 $A\alpha, B\alpha$ はそれぞれ A, B の α -レベル集合である。すなわち

$$A\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}, B\alpha = \{x | \mu_B(x) \geq \alpha\}$$

また、 $\inf\{A\alpha\}$ は $A\alpha$ の下限を、 $\sup\{A\alpha\}$ は $A\alpha$ の上限を表す。

定義2 : A_1, A_2 を X における正規凸ファジィ集合とし、 $A_1 < A_2$ とする。 A_1 の α -レベル集合 $A_1\alpha$ と A_2 の α -レベル集合 $A_2\alpha$ の下限距離、上限距離はそれぞれ以下のように定義される。

$$d_L(A_1\alpha, A_2\alpha) = \inf\{A_2\alpha\} - \inf\{A_1\alpha\} \quad (1)$$

$$d_U(A_1\alpha, A_2\alpha) = \sup\{A_2\alpha\} - \sup\{A_1\alpha\} \quad (2)$$

定義3 : A_1, A_2 を X における、 B_1, B_2 を Y における正規凸ファジィ集合とする。 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$ を $X \times Y$ において互いに交わらない2つのファジィ規則とする。観測値 A^* が条件 $A_1 < A^* < A_2$ を満足すれば、2つのファジィ規則による推論結果 B^* は次のように与えられる(図2参照)[4,5]。

$$\begin{aligned} d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) : d_L(A^*\alpha, A_2\alpha) \\ = d_L(B_1\alpha, B^*\alpha) : d_L(B^*\alpha, B_2\alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} d_U(A_1\alpha, A^*\alpha) : d_U(A^*\alpha, A_2\alpha) \\ = d_U(B_1\alpha, B^*\alpha) : d_U(B^*\alpha, B_2\alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

この比例式から(便宜上、 $B_1 < B^* < B_2$ とする)

$$d_L(B_1\alpha, B^*\alpha) = \inf\{B^*\alpha\} - \inf\{B_1\alpha\}$$

$$d_L(B^*\alpha, B_2\alpha) = \inf\{B_2\alpha\} - \inf\{B^*\alpha\}$$

であることに注意すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \inf\{B^*\alpha\} = \\ \frac{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) \inf\{B_2\alpha\} + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha) \inf\{B_1\alpha\}}{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)} \end{aligned} \quad (5)$$

図1 ファジィ推論2の説明

図2 式(3)の説明図

$$\begin{aligned} \sup\{B^*\alpha\} = \\ \frac{d_U(A_1\alpha, A^*\alpha) \sup\{B_2\alpha\} + d_U(A^*\alpha, A_2\alpha) \sup\{B_1\alpha\}}{d_U(A_1\alpha, A^*\alpha) + d_U(A^*\alpha, A_2\alpha)} \end{aligned} \quad (6)$$

以上のKóczyとHirotaによる「線形補間型推論法」において、次の結論を得ている[4,5]。

[定理1] もしファジィ規則 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$ および観測値 A^* が三角型メンバーシップ関数で表されるとすると、式(5)(6)を用いて得られる推論結果 B^* も三角型メンバーシップ関数である。

しかし、次節では、この定理は必ずしも成立しないことを指摘し、検討する。

3. Kóczyの補間型推論法の推論結果について

式(5)において、

$$M = \frac{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha)}{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)} \quad (7)$$

とおくと、式(5)は次のように書き換えることができる。

$$\inf\{B^*\alpha\} = M \inf\{B_2\alpha\} + (1-M) \inf\{B_1\alpha\} \quad (8)$$

これより、 $\inf\{B^*\alpha\}$ は $\inf\{B_2\alpha\}$ と $\inf\{B_1\alpha\}$ の線形結合の形をしている。しかしながら、係数 M と $(1-M)$ は一般に (α) の定数ではないことが以下のように

示される。

ファジィ規則 $A_1 \Rightarrow B_1$, $A_2 \Rightarrow B_2$ および観測値 A^* が図3のように三角型メンバーシップ関数で定義されているものとする。すると、ファジィ集合 A_1 , A^* , A_2 , B_1 , B_2 に対する各メンバーシップ関数の左部分はそれぞれ以下の直線式で与えられる[7]。

$$\mu = 1/k_1(x - a_1)$$

$$\mu = 1/k(x - a)$$

$$\mu = 1/k_2(x - a_2)$$

$$\mu = 1/h_1(y - b_1)$$

$$\mu = 1/h_2(y - b_2)$$

ここで, $a_1 = \inf\{A_{10+}\}$, $a = \inf\{A^*_{0+}\}$, $a_2 = \inf\{A_{20+}\}$, $b_1 = \inf\{B_{10+}\}$, $b_2 = \inf\{B_{20+}\}$ である。但し, 記法 $\inf\{A^*_{0+}\}$ は $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \inf\{A^*\alpha\}$ のことであり, もし $\inf\{A^*\alpha\} = k\alpha + a$ の場合, $\inf\{A^*_{0+}\} = a$ となる。

これより

$$x = k_1\mu + a_1 \quad (9)$$

$$x = k\mu + a \quad (10)$$

$$x = k_2\mu + a_2 \quad (11)$$

$$y = h_1\mu + b_1 \quad (12)$$

$$y = h_2\mu + b_2 \quad (13)$$

が得られる。ここで, $\mu \in (0, 1]$ (図3参照)。

推論結果 B^* のメンバーシップ関数の左部分が次のような逆関数の形で与えられるとしよう。

$$y = y(\mu) \quad (14)$$

すると, Kóczy らの補間型推論法を用いることで, 関数(14)は以下のようにして導かれる。

式(9)-(13)は任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して,

$$\inf\{A_1\alpha\} = k_1\alpha + a_1 \quad (15)$$

$$\inf\{A^*\alpha\} = k\alpha + a \quad (16)$$

$$\inf\{A_2\alpha\} = k_2\alpha + a_2 \quad (17)$$

$$\inf\{B_1\alpha\} = h_1\alpha + b_1 \quad (18)$$

$$\inf\{B_2\alpha\} = h_2\alpha + b_2 \quad (19)$$

のように置き換えることができる。

図3 三角型メンバーシップ関数による推論

まず, 式(15), (16), (17)を式(7)に代入すると,

$$M = \frac{(k\alpha + a) - (k_1\alpha + a_1)}{[(k\alpha + a) - (k_1\alpha + a_1)] + [(k_2\alpha + a_2) - (k\alpha + a)]}$$

$$= \frac{(k - k_1)\alpha + (a - a_1)}{(k_2 - k_1)\alpha + (a_2 - a_1)}$$

$$1 - M = \frac{(k_2 - k)\alpha + (a_2 - a)}{(k_2 - k_1)\alpha + (a_2 - a_1)}$$

になり, 明らかに, M と $1 - M$ は一般に α の関数であることが分かる。

さらに, 式(15)-(19)をすべて式(5)に代入すると, 次のようになる。

$$y(\alpha) = \inf\{B^*\alpha\} = \frac{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) \inf\{B_2\alpha\} + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha) \inf\{B_1\alpha\}}{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)}$$

$$= \frac{[(k\alpha + a) - (k_1\alpha + a_1)](h_2\alpha + b_2) + [(k_2\alpha + a_2) - (k\alpha + a)](h_1\alpha + b_1)}{(k_2\alpha + a_2) - (k_1\alpha + a_1)}$$

$$= \frac{[h_1(k_2 - k) + h_2(k - k_1)]\alpha^2 + [b_1(k_2 - k) + b_2(k - k_1) + h_1(a_2 - a) + h_2(a - a_1)]\alpha + [b_1(a_2 - a) + b_2(a - a_1)]}{(k_2 - k_1)\alpha + (a_2 - a_1)} \quad (20)$$

式(20)から, 一般に $y = y(\alpha)$ は α の線形式でないことがわかる。したがって, $\mu (\in (0, 1])$ の任意性のため, $y = y(\mu)$ は μ の線形関数ではないことがわかる。これは, ファジィ規則 $A_1 \Rightarrow B_1$, $A_2 \Rightarrow B_2$ および観測値 A^* が三角型メンバーシップ関数で定義されていても, 推論結果 B^* は必ずしも三角型メンバーシップ関数ではないを意味している。例えば, 図4に示すように推論結果 B^* は三角型ではなく, 歪んだ関数となっていることがわかる。

以上のことをもう少し詳しく検討してみよう。

[例] 図3において $k \neq k_1 = k_2$, $h_1 \neq h_2$ とする。このとき, 式(20)は次のようになる

図4 Kóczy の補間推論の例

$$y(\alpha) = \frac{[(h_2 - h_1)(k - k_1)]\alpha^2 + [h_2(a_2 - a) + h_1(a - a_1)]\alpha + [b_1(a_2 - a) + b_2(a - a_1)]}{(a_2 - a_1)} \quad (21)$$

この場合は、 $y(\alpha)$ は α の2次関数となっていることがわかる。

さらに、推論結果 B^* は必ずしも凸ファジィ集合にならないことを示そう。

簡単な例として、図4のように、 $a_1=0$, $a=7$, $a_2=11$, $b_1=0$, $b_2=10$, $k_1=5$, $k=1$, $k_2=2$, $h_1=2$, $h_2=1$ とすると、式(20)から

$$y(\alpha) = (2\alpha^2 + 25\alpha - 70)/(3\alpha - 11) \quad (22)$$

となる。 α が 0^+ , 1のとき、

$$y(0^+) = 70/11, \quad y(1) = 43/8 \quad (23)$$

となり、明らかに、 $y(1) < y(0^+)$ である。すなわち $\inf\{B^*\alpha\} < \inf\{B^*_{0^+}\}$ となっている。これより、 B^* のメンバーシップ関数は図4のように左側がへこんだ形となり、 B^* は通常のファジィ集合になっていないことがわかる。このようにファジィ規則 $A_1 \Rightarrow B_1$, $A_2 \Rightarrow B_2$ および観測値 A^* が三角型メンバーシップ関数で特性づけられていても、推論結果 B^* は必ずしも三角型のメンバーシップ関数で特性づけられないことがわかった。

以上は、メンバーシップ関数の左側についての議論、すなわち、下限距離の場合の議論であったが、同様な方法で、右側(すなわち、上限距離の場合)に対しても議論できる。したがって、式(5)(6)によって得た推論結果 B^* は三角型ではなく、奇妙な形になることがわかる(図4参照)。

しかしながら、ある条件の下では、推論結果 B^* のメンバーシップ関数は三角型になることが示せる。次節ではそのことを示そう。

4. 推論結果 B^* が三角型になるための条件

まず、観測値に制限を付け加えることにより、推論結果が三角型になるための条件(I)を与えよう。

条件(I)

式(8)において、もし $\inf\{B^*\alpha\}$ に対する係数 M が定数であるという条件を満たせば、 $\inf\{B^*\alpha\}$ は $\inf\{B_2\alpha\}$ と $\inf\{B_1\alpha\}$ の線形結合となる。 M を定数 β ($\in [0, 1]$) とおき、式(7)に式(15)–(17)を代入することにより

$$M = \frac{(k - k_1)\alpha + (a - a_1)}{(k_2 - k_1)\alpha + (a_2 - a_1)} = \beta \quad (24)$$

が得られる。

上式を α についての恒等式とみると、 $(k - k_1) = \beta(k_2 - k_1)$, $(a - a_1) = \beta(a_2 - a_1)$ となるので、次式が成り立つ。

$$k = \beta k_2 + (1 - \beta) k_1 \quad (25)$$

$$a = \beta a_2 + (1 - \beta) a_1 \quad (26)$$

このとき、式(20)の $y(\alpha)$ は次のような線形関数になる。

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= \inf\{B^*\alpha\} = \beta \inf\{B_2\alpha\} + (1 - \beta) \inf\{B_1\alpha\} \\ &= \beta(h_2\alpha + b_2) + (1 - \beta)(h_1\alpha + b_1) \\ &= [\beta h_2 + (1 - \beta)h_1]\alpha + [\beta b_2 + (1 - \beta)b_1] \\ &= \{[h_1(a_2 - a) + h_2(a - a_1)]/(a_2 - a_1)\}\alpha \\ &\quad + [b_1(a_2 - a) + b_2(a - a_1)]/(a_2 - a_1) \end{aligned} \quad (27)$$

さらに、一次微分は

$$y'(\alpha) = \beta h_2 + (1 - \beta) h_1 > 0 \quad (28)$$

となり、正の傾きとなる。したがって、この場合、図4の B^* の左側のようなことにはならない。

以上は、各メンバーシップ関数の左側部分について議論してきたが、右側に対しても式(25)と(26)と同様の関係が成立するならば、右側部分も線形となる。これより、推論結果 B^* のメンバーシップ関数は三角型になることがわかる。

[例] $\beta = 1/2$ の時、もし $\inf\{A^*\alpha\}$ のパラメータ k と a が式(25)と(26)を満たす場合、すなわち

$$\begin{aligned} k &= (1/2)k_2 + (1 - 1/2)k_1 \\ &= (k_1 + k_2)/2 \\ a &= (1/2)a_2 + (1 - 1/2)a_1 \\ &= (a_1 + a_2)/2 \end{aligned}$$

である場合、

$$\inf\{B^*\alpha\} = y(\alpha) = [(h_1 + h_2)\alpha + (b_1 + b_2)]/2$$

となる。図5は、式(25), (26)の条件の下での推論結果 B^* を示したものである。ここで、 $k_1=3$, $k_2=1$ より $k=2$ となり、 $a_1=0$, $a_2=11$ より $a=11/2$ となっている。 $h_1=2$, $h_2=1$, $b_1=0$, $b_2=10$ である。これより、 B^* は三角型となり、 $h=3/2$, $b=5$ となっていることが確かめられる。

図5 条件(I)の下での推論結果

この例で示したように定数 β が予め設定されていると、観測値は、ファジィ規則の前件部によって規定されて、只1つしか存在しないことがわかる。すなわち、式(25), (26)によって規定される観測値のみが三角型の推論結果を与え、その他の(自由な)観測値は三角型の推論結果を与えないということである。

次に、ファジィ規則に制限を付け加えることにより、推論結果が三角型になるための条件(II)を示そう。

条件(II)

式(5)を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \inf\{B^*\alpha\} &= \\ & \frac{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha)\inf\{B_2\alpha\} + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)\inf\{B_1\alpha\}}{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)} \\ & \frac{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha)\inf\{B_2\alpha\} + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)\inf\{B_1\alpha\}}{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)} \\ & + \frac{[d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) - d_L(A_1\alpha, A^*\alpha)]\inf\{B_1\alpha\}}{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)} \\ & = \frac{(\inf\{B_2\alpha\} - \inf\{B_1\alpha\})d_L(A_1\alpha, A^*\alpha)}{d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) + d_L(A^*\alpha, A_2\alpha)} + \inf\{B_1\alpha\} \\ & = \frac{d_L(B_1\alpha, B_2\alpha)}{d_L(A_1\alpha, A_2\alpha)}d_L(A_1\alpha, A^*\alpha) + \inf\{B_1\alpha\} \end{aligned} \quad (29)$$

ファジィ規則 $A_1 \Rightarrow B_1$, $A_2 \Rightarrow B_2$ および観測値 A^* が三角型メンバーシップ関数であるとき、つまり $\inf\{A_1\alpha\}$, $\inf\{A^*\alpha\}$, $\inf\{A_2\alpha\}$, $\inf\{B_1\alpha\}$, $\inf\{B_2\alpha\}$ がすべて線形である場合に、推論結果 B^* のメンバーシップ関数が三角型になるためには、次式が定数である必要がある。

$$\frac{d_L(B_1\alpha, B_2\alpha)}{d_L(A_1\alpha, A_2\alpha)} = \gamma \quad (30)$$

ここで、 $\gamma(>0)$ は定数である。式(15), (17)-(19)を式(30)に代入すると、

$$\frac{(h_2 - h_1)\alpha + (b_2 - b_1)}{(k_2 - k_1)\alpha + (a_2 - a_1)} = \gamma$$

となる。この式を α の恒等式とみると

$$(b_2 - b_1) = \gamma(a_2 - a_1) \quad (31)$$

$$(h_2 - h_1) = \gamma(k_2 - k_1) \quad (32)$$

が得られる。このとき、式(15)-(19), (31), (32)より $y(\alpha)$ は次のような線形関数になる。

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= \inf\{B^*\alpha\} \\ &= [(h_1 + \gamma(k - k_1))\alpha + [b_1 + \gamma(a - a_1)]] \\ &= \{[(a_2 - a_1)h_1 + (b_2 - b_1)(k - k_1)] \\ & \quad / (a_2 - a_1)\}\alpha \\ & \quad + [b_1(a_2 - a) + b_2(a - a_1)] / (a_2 - a_1) \end{aligned} \quad (33)$$

$$y'(\alpha) = h_1 + \gamma(k - k_1) \quad (34)$$

$\inf\{B^*\alpha\}$ が単調増加になるためには、 $y'(\alpha) \geq 0$, すなわち

$$h_1 + \gamma(k - k_1) \geq 0$$

が成り立つことが必要である。 $\gamma = (b_2 - b_1)/(a_2 - a_1) > 0$ であるので、結局、

$$k \geq k_1 - h_1/\gamma \quad (35)$$

となる必要がある。

[例] $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 9$; $h_1 = 2$, $h_2 = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = 10$ とする。このとき、条件(30)によって $\gamma = 1$ になり、条件(31), (32)が成り立っている。例えば、 $k = 2$, $a = 5$ のとき、その k は条件(35)を満たすので、推論結果は次のように求められる(図6参照)。

$$\begin{aligned} \inf\{B^*\alpha\} &= y(\alpha) \\ &= [(h_1 + \gamma(k - k_1))\alpha \\ & \quad + [(b_1 + \gamma(a - a_1)]] \\ &= [2 + (2 - 3)]\alpha + [1 + (5 - 0)] \\ &= \alpha + 6 \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha \in (0, 1]$ である。

メンバーシップ関数の右側についても同様であり、もし右側に対しても条件(31), (32), (35)と同様の条件が成り立つとすると、 B^* の右側は線形になる。したがって、推論結果 B^* のメンバーシップ関数は三角型になる。

以上、Kóczyの「線形補間型推論法」による推論結果 B^* のメンバーシップ関数が三角型になるための十分条件を二つ与えた。次に条件(I)および条件(II)が必要条件になることを示す。

まず、線形補間型推論法による推論結果 B^* のメンバーシップ関数が三角型で表示されたとすると、 $\inf\{B^*\alpha\}$ は α の線形関数となり

$$\inf\{B^*\alpha\} = h\alpha + b, \quad (h > 0, b_2 \geq b \geq b_1) \quad (36)$$

と表すことができる。

一方、式(20)によって、

$$\begin{aligned} \inf\{B^*\alpha\} &= \frac{(h_2 - h_1)\alpha + (b_2 - b_1)}{(k_2 - k_1)\alpha + (a_2 - a_1)} [(k - k_1)\alpha \\ & \quad + (a - a_1)] + (h_1\alpha + b_1) \end{aligned}$$

であることが分かる。したがって、恒等式

図6 条件(II)の下での推論結果

$$\frac{(h_2 - h_1)\alpha + (b_2 - b_1)}{(k_2 - k_1)\alpha + (a_2 - a_1)} [(k - k_1)\alpha + (a - a_1)] \\ = (h - h_1)\alpha + (b - b_1)$$

すなわち,

$$[(h_2 - h_1)\alpha + (b_2 - b_1)][(k - k_1)\alpha + (a - a_1)] \\ = [(h - h_1)\alpha + (b - b_1)][(k_2 - k_1)\alpha + (a_2 - a_1)] \quad (37)$$

が得られる. 恒等式(37)を解くと, パラメータ k, a, h, b に関する3つの方程式が得られる.

$$(h_2 - h_1)(k - k_1) = (h - h_1)(k_2 - k_1) \quad (38)$$

$$(h_2 - h_1)(a - a_1) + (k - k_1)(b_2 - b_1) \\ = (h - h_1)(a_2 - a_1) + (k_2 - k_1)(b - b_1) \quad (39)$$

$$(b_2 - b_1)(a - a_1) = (b - b_1)(a_2 - a_1) \quad (40)$$

式(38), (39), (40)から, これらのパラメータ k, a, h, b 間の関係について議論しよう.

ケース(I): $k_1 \neq k_2$

式(38), (40)によって, h と k の関係式と b と a の関係式

$$h = \frac{(h_2 - h_1)}{(k_2 - k_1)}(k - k_1) + h_1 \quad (41)$$

$$b = \frac{(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)}(a - a_1) + b_1 \quad (42)$$

が導かれる. 式(41)と(42)を式(39)に代入すると, k と a の関係式

$$(h_2 - h_1)(a - a_1) + (k - k_1)(b_2 - b_1) \\ = \frac{(h_2 - h_1)}{(k_2 - k_1)}(k - k_1)(a_2 - a_1) \\ + \frac{(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)}(k_2 - k_1)(a - a_1) \quad (43)$$

が得られる.

記号

$$H = (h_2 - h_1), \quad K = (k_2 - k_1),$$

$$B = (b_2 - b_1), \quad A = (a_2 - a_1)$$

を採用すると, 式(43)は次のように書き直される.

$$KAH(a - a_1) + KAB(k - k_1) \\ = HAA(k - k_1) + BKK(a - a_1)$$

整理すると,

$$A(KB - HA)(k - k_1) \\ = K(KB - HA)(a - a_1) \quad (44)$$

となる.

(1) $(KB - HA) \neq 0$ の場合:

この場合, $(k_2 - k_1)(b_2 - b_1) \neq (h_2 - h_1)(a_2 - a_1)$ であり, 式(44)によって, k と a の関係式は次のように簡単に書き直される.

$$k = \frac{(k_2 - k_1)}{(a_2 - a_1)}(a - a_1) + k_1 \quad (45)$$

もし

$$\beta = \frac{(b - b_1)}{(b_2 - b_1)}$$

とすると(明らかに, $\beta \in [0, 1]$ かつ定数である), 式(41), (45)を用いて, 次の結果が得られる.

$$k = \beta k_2 + (1 - \beta)k_1$$

$$a = \beta a_2 + (1 - \beta)a_1$$

これは条件(I)が成り立つことを意味している.

(2) $(KB - HA) = 0$ の場合:

この場合, $(k_2 - k_1)(b_2 - b_1) = (h_2 - h_1)(a_2 - a_1)$ であり, 次のような式が得られる.

$$\frac{(h_2 - h_1)}{(k_2 - k_1)} = \frac{(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)} \quad (46)$$

もし

$$\gamma = \frac{(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)}$$

とすると(明らかに, $\gamma > 0$ かつ定数である), 式(46)によって, 次の結果が得られる.

$$(b_2 - b_1) = \gamma(a_2 - a_1)$$

$$(h_2 - h_1) = \gamma(k_2 - k_1)$$

これは条件(II)が成り立つことを意味している.

ケース(II): $k_1 = k_2$

式(38)によって,

$$(h_2 - h_1)(k - k_1) = 0 \quad (47)$$

この場合には, $(h_2 - h_1) = 0$ 或いは $(k - k_1) = 0$ である.

(1) $(k - k_1) = 0$ の場合:

$k = k_1 = k_2$ のため, 任意の定数 β に対して, 関係式

$$k = \beta k_2 + (1 - \beta)k_1$$

が成り立つことが分かる. 特に, 式(42)で

$$\beta = \frac{(b - b_1)}{(b_2 - b_1)}$$

と置くと(明らかに, $\beta \in [0, 1]$ かつ定数である), 条件(I)の結果が得られる. すなわち

$$k = \beta k_2 + (1 - \beta)k_1$$

$$a = \beta a_2 + (1 - \beta)a_1$$

(2) $(h_2 - h_1) = 0$ の場合:

$h_2 = h_1$, $k_2 = k_1$ より, 任意の定数 γ に対して, 関係式

$$(h_2 - h_1) = \gamma(k - k_1) \quad (k \geq k_1 - h_1/\gamma)$$

が常に成り立つことが分かる. 特に,

$$\gamma = \frac{(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)}$$

と置くと(明らかに, $\gamma > 0$ かつ定数である), 条件(II)の結果が得られる.

$$(b_2 - b_1) = \gamma(a_2 - a_1)$$

$$(h_2 - h_1) = \gamma(k_2 - k_1)$$

ケース(I)とケース(II)を纏めると,「線形補間型推論法」による推論結果 B^* のメンバーシップ関数が三角型で表されたとすると, 条件(I)と条件(II)のどちらかが成立することが分かる. すなわち, 条件(I)と条件(II)も必要条件である.

以上は, Kóczy と Hirota の線形補間型ファジィ推論法について一次元の場合について論議した. 次節では, 多次元の場合に対する彼らのファジィ補間型推論法について検討する.

5. 多次元の場合における Kóczy のファジィ補間型推論法について

多次元ファジィ推論の形式(ただし, 規則が2個の場合)は次のように与えられる.

$$R1: A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1} \Rightarrow B_{11}, B_{21}, \dots, B_{n1}$$

$$R2: A_{12}, A_{22}, \dots, A_{m2} \Rightarrow B_{12}, B_{22}, \dots, B_{n2}$$

$$O: A^*_1, A^*_2, \dots, A^*_m$$

$$\hline C \quad B^*_1, B^*_2, \dots, B^*_n$$

ここで, A_{i1}, A_{i2}, A^*_i は $X_i (i=1, 2, \dots, m)$ における, B_{j1}, B_{j2} は $Y_j (j=1, 2, \dots, n)$ におけるファジィ集合である. $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1} \Rightarrow B_{11}, B_{21}, \dots, B_{n1}; A_{12}, A_{22}, \dots, A_{m2} \Rightarrow B_{12}, B_{22}, \dots, B_{n2}$ は $X \times Y$ (ただし, $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m; Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$) において互いに交わらない2つのファジィ規則であり, 観測値 $A^*_1, A^*_2, \dots, A^*_m$ は条件 $A_{i1} < A^*_i < A_{i2}; B_{j1} < B^*_j < B_{j2}$ を満足するものとする.

一次元の場合と同じように, 与えられた観測値 $A^*_1, A^*_2, \dots, A^*_m$ に対して, それぞれの一次元空間 $X_i (i=1, 2, \dots, m)$ での下限距離から, 次のような m 個の距離対が得られる.

$$(d_{Li1}(A_{i1}\alpha, A^*_i\alpha), d_{Li2}(A^*_i\alpha, A_{i2}\alpha)), \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (48)$$

同様に, 上限距離に対しても, m 個の距離対が得られる.

$$(d_{Ui1}(A_{i1}\alpha, A^*_i\alpha), d_{Ui2}(A^*_i\alpha, A_{i2}\alpha)), \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (49)$$

多次元の場合の補間型推論法の推論結果は一次元の場合を拡張して, 次のように与えられる[5].

$$\inf\{B^*_j\alpha\} = \frac{W_{1L}\alpha \inf\{B_{j1}\alpha\} + W_{2L}\alpha \inf\{B_{j2}\alpha\}}{W_{1L}\alpha + W_{2L}\alpha} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (50)$$

$$\sup\{B^*_j\alpha\} = \frac{W_{1U}\alpha \sup\{B_{j1}\alpha\} + W_{2U}\alpha \sup\{B_{j2}\alpha\}}{W_{1U}\alpha + W_{2U}\alpha} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (51)$$

ここで, 重み $W_{1L}\alpha, W_{2L}\alpha, W_{1U}\alpha, W_{2U}\alpha$ は図7のように与えられる距離の逆数であり, 次のようである.

$$W_{1L}\alpha = \left(\sum_{i=1}^m d_{Li1}(A_{i1}\alpha, A^*_i\alpha)^2 \right)^{-1/2} \quad (52)$$

$$W_{2L}\alpha = \left(\sum_{i=1}^m d_{Li2}(A^*_i\alpha, A_{i2}\alpha)^2 \right)^{-1/2} \quad (53)$$

$$W_{1U}\alpha = \left(\sum_{i=1}^m d_{Ui1}(A_{i1}\alpha, A^*_i\alpha)^2 \right)^{-1/2} \quad (54)$$

$$W_{2U}\alpha = \left(\sum_{i=1}^m d_{Ui2}(A^*_i\alpha, A_{i2}\alpha)^2 \right)^{-1/2} \quad (55)$$

多次元の場合の Kóczy と Hirota の「線形補間型推論法」において, 次の結論を得ている[5].

[定理2] もしファジィ規則 $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1} \Rightarrow B_{11}, B_{21}, \dots, B_{n1}; A_{12}, A_{22}, \dots, A_{m2} \Rightarrow B_{12}, B_{22}, \dots, B_{n2}$ および観測値 $A^*_1, A^*_2, \dots, A^*_m$ が三角型メンバーシップ関数で表されているとすると, 式(50), (51)を用いて得られる推論結果 $B^*_1, B^*_2, \dots, B^*_n$ も三角型メンバーシップ関数である.

しかし, 次の例では, この定理は成立しないことが示される.

[例] 簡単のため, $m=2, n=1$ と仮定する. もし $\inf\{A_{11}\alpha\} = 7\alpha, \inf\{A^*_1\alpha\} = \alpha + 9, \inf\{A_{12}\alpha\} = \alpha + 12, \inf\{A_{21}\alpha\} = \alpha + 2, \inf\{A^*_2\alpha\} = \alpha + 5, \inf\{A_{22}\alpha\} = \alpha + 8, \inf\{B_{11}\alpha\} = \alpha + 6, \inf\{B_{12}\alpha\} = \alpha + 12$ であり, また $\sup\{A_{11}\alpha\} = -\alpha + 8, \sup\{A^*_1\alpha\} = -\alpha + 11, \sup\{A_{12}\alpha\} = -\alpha + 14, \sup\{A_{21}\alpha\} = -\alpha + 4, \sup\{A^*_2\alpha\} = -\alpha + 7, \sup\{A_{22}\alpha\} = -4\alpha + 13, \sup\{B_{11}\alpha\} = -\alpha + 8, \sup\{B_{12}\alpha\} = -\alpha + 14$ であるとする, 式(50), (51)から, 推論結果 B^* は次のように求められる(図8参照).

図7 重みパラメータ $W_{1L}\alpha$ の説明図 ($m=2$ の場合)

$$\begin{aligned}
\inf\{B_1^* \alpha\} &= \frac{[(-6\alpha+9)^2+9]^{-1/2}(\alpha+6)+18^{-1/2}(\alpha+12)}{[(-6\alpha+9)^2+9]^{-1/2}+18^{-1/2}} \\
&= \frac{18^{1/2}(\alpha+6)+[(-6\alpha+9)^2+9]^{1/2}(\alpha+12)}{18^{1/2}+[(-6\alpha+9)^2+9]^{1/2}} \\
\sup\{B_1^* \alpha\} &= \frac{18^{-1/2}(-\alpha+8)+[(-3\alpha+6)^2+9]^{-1/2}(-\alpha+14)}{18^{-1/2}+[(-3\alpha+6)^2+9]^{-1/2}} \\
&= \frac{[(-3\alpha+6)^2+9]^{1/2}(-\alpha+8)+18^{1/2}(-\alpha+14)}{[(-3\alpha+6)^2+9]^{1/2}+18^{1/2}}
\end{aligned}$$

図8で示されたように、推論結果 B^* のメンバーシップ関数は歪んだ形になっていて、三角形でないことがわかる。これは Kóczy らの結論は必ずしも正しくないことを意味している。

次に、 $m=2$, $n=1$ の場合の式(50)を議論しよう。この場合、規則 $A_{11}, A_{21} \Rightarrow B_1$; $A_{12}, A_{22} \Rightarrow B_2$ と観測値 A_1^*, A_2^* ($A_{i1} < A_i^* < A_{i2}$; $B_1 < B^* < B_2$) に対して、そのメンバーシップ関数の左側をそれぞれ

$$\inf\{A_{11}\alpha\} = k_{11}\alpha + a_{11} \quad (56)$$

$$\inf\{A_1^* \alpha\} = k_1\alpha + a_1 \quad (57)$$

$$\inf\{A_{12}\alpha\} = k_{12}\alpha + a_{12} \quad (58)$$

$$\inf\{A_{21}\alpha\} = k_{21}\alpha + a_{21} \quad (59)$$

$$\inf\{A_2^* \alpha\} = k_2\alpha + a_2 \quad (60)$$

$$\inf\{A_{22}\alpha\} = k_{22}\alpha + a_{22} \quad (61)$$

$$\inf\{B_1\alpha\} = h_1\alpha + b_1 \quad (62)$$

$$\inf\{B_2\alpha\} = h_2\alpha + b_2 \quad (63)$$

とする。これらを式(52), (53)に代入すると、式(50)は次のようになる。

図8 2次元の場合の補間推論の例

$$\begin{aligned}
\inf\{B^* \alpha\} &= \frac{W_{1L}\alpha \inf\{B_1\alpha\} + W_{2L}\alpha \inf\{B_2\alpha\}}{W_{1L}\alpha + W_{2L}\alpha} \\
&= \frac{\{[(k_1 - k_{11})\alpha + (a_1 - a_{11})]^2 + [(k_2 - k_{21})\alpha + (a_2 - a_{21})]^2\}^{1/2}(h_2\alpha + b_2) + \{[(k_{12} - k_1)\alpha + (a_{12} - a_1)]^2 + [(k_{22} - k_2)\alpha + (a_{22} - a_2)]^2\}^{1/2}(h_1\alpha + b_1)}{\{[(k_1 - k_{11})\alpha + (a_1 - a_{11})]^2 + [(k_2 - k_{21})\alpha + (a_2 - a_{21})]^2\}^{1/2} + \{[(k_{12} - k_1)\alpha + (a_{12} - a_1)]^2 + [(k_{22} - k_2)\alpha + (a_{22} - a_2)]^2\}^{1/2}} \quad (64)
\end{aligned}$$

明らかに、式(64)から分かるように $\inf\{B^* \alpha\}$ は一般に α の線形関数ではないことがわかる。

式(50)において、係数 $W_{1L}\alpha/(W_{1L}\alpha + W_{2L}\alpha)$ と $W_{2L}\alpha/(W_{1L}\alpha + W_{2L}\alpha)$ は α について一般に定数ではないから、結論 $\inf\{B^* \alpha\}$ は $\inf\{B_{j1}\alpha\}$ と $\inf\{B_{j2}\alpha\}$ ($j=1, 2, \dots, n$) の線形結合にならないことがわかる。つまり、 $\inf\{B_{j1}\alpha\}$ と $\inf\{B_{j2}\alpha\}$ ($j=1, 2, \dots, n$) が線形関数の形であっても、 $\inf\{B^* \alpha\}$ は線形関数の形にはなれないことを示している。上限距離に対する式(51)に対しても同様な論議ができる。したがって、一般に、推論結果 $B^* \alpha$ ($j=1, 2, \dots, n$) は三角型でないことがわかる。

次は推論結果 B^* のメンバーシップ関数が三角型になるための必要条件を議論しよう。線形補間型推論法による推論結果 B^* のメンバーシップ関数が三角型で表示されたとすると、 $\inf\{B^* \alpha\}$ は α の線形関数となり

$$\begin{aligned}
\inf\{B^* \alpha\} &= h\alpha + b, \\
(h > 0, b_2 \geq b \geq b_1) \quad (65)
\end{aligned}$$

と表すことができる。これを式(64)に代入すると、次の恒等式が得られる。

$$\begin{aligned}
&[(h - h_2)\alpha + (b - b_2)]^2 \{[(k_1 - k_{11})\alpha + (a_1 - a_{11})]^2 + [(k_2 - k_{21})\alpha + (a_2 - a_{21})]^2\} \\
&= [(h - h_1)\alpha + (b - b_1)]^2 \{[(k_{12} - k_1)\alpha + (a_{12} - a_1)]^2 + [(k_{22} - k_2)\alpha + (a_{22} - a_2)]^2\} \quad (66)
\end{aligned}$$

恒等式(66)を解くと、以下の3つの方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
(h - h_2)^2 [(k_1 - k_{11})^2 + (k_2 - k_{21})^2] &= (h - h_1)^2 [(k_{12} - k_1)^2 + (k_{22} - k_2)^2] \quad (67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h - h_2)(b - b_2) [(k_1 - k_{11})(a_1 - a_{11}) &+ (k_2 - k_{21})(a_2 - a_{21})] \\
= (h - h_1)(b - b_1) [(k_{12} - k_1)(a_{12} - a_1) &+ (k_{22} - k_2)(a_{22} - a_2)] \quad (68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b - b_2)^2 [(a_1 - a_{11})^2 + (a_2 - a_{21})^2] &= (b - b_1)^2 [(a_{12} - a_1)^2 + (a_{22} - a_2)^2] \quad (69)
\end{aligned}$$

$\inf\{B^* \alpha\}$ は α の線形関数である条件を満たすパラメータ k_1, a_1, k_2, a_2 間の関係を議論しよう。

式(67), (69)によって, 次の式得られる.

$$h - h_2 = \frac{(h - h_1) [(k_{12} - k_1)^2 + (k_{22} - k_2)^2]^{1/2}}{[(k_1 - k_{11})^2 + (k_2 - k_{21})^2]^{1/2}} \quad (70)$$

$$b - b_2 = \frac{(b - b_1) [(a_{12} - a_1)^2 + (a_{22} - a_2)^2]^{1/2}}{[(a_1 - a_{11})^2 + (a_2 - a_{21})^2]^{1/2}} \quad (71)$$

式(70), (71)を式(68)に代入して整理すると, $\inf\{B^*\alpha\}$ が α の線形関数になるための必要条件が次のように得られる.

$$\begin{aligned} & [(k_{12} - k_1)^2 + (k_{22} - k_2)^2] [(a_{12} - a_1)^2 + (a_{22} - a_2)^2] \\ & [(k_1 - k_{11})(a_1 - a_{11}) + (k_2 - k_{21})(a_2 - a_{21})]^2 \\ & = \\ & [(k_1 - k_{11})^2 + (k_2 - k_{21})^2] [(a_1 - a_{11})^2 + (a_2 - a_{21})^2] \\ & [(k_{12} - k_1)(a_{12} - a_1) + (k_{22} - k_2)(a_{22} - a_2)]^2 \end{aligned} \quad (72)$$

式(72)から分かるように, 一次元の場合と違って, 簡単な式でパラメータ k_1, a_1, k_2, a_2 間の関係を表すことは非常に困難である. 一般に, 多次元の場合(ファジィ規則 $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1} \Rightarrow B_{11}, B_{21}, \dots, B_{n1}; A_{12}, A_{22}, \dots, A_{m2} \Rightarrow B_{12}, B_{22}, \dots, B_{n2}$ および観測値 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*$ が三角型メンバーシップ関数である場合), 式(50)における $\inf\{B_j^*\alpha\}$ が α の線形関数になるための必要条件是さらに複雑になることが予想される.

条件(I)と同様に, 多次元の場合, 式(50)中の係数 $W_{1L}\alpha/(W_{1L}\alpha + W_{2L}\alpha)$ と $W_{2L}\alpha/(W_{1L}\alpha + W_{2L}\alpha)$ を定数とすることが可能であるが, 以上議論したように一次元の場合と違って, かなり複雑である(付録参照). したがって, Kóczyらの補間型ファジィ推論法の推論結果が三角型になるための条件(I)と条件(II)は多次元の場合では適用性がないことがわかる.

6. 結論

本論文では, ファジィ規則 $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1} \Rightarrow B_{11}, B_{21}, \dots, B_{n1}; A_{12}, A_{22}, \dots, A_{m2} \Rightarrow B_{12}, B_{22}, \dots, B_{n2}$ および観測値 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*$ のメンバーシップ関数が三角型のとき, 式(50), (51)(一次元の場合では, (5), (6))によって得られる推論結果 $B_1^*, B_2^*, \dots, B_n^*$ (一次元の場合では, B^*)のメンバーシップ関数は必ずしも三角型でないことを示した. また, 三角型になるための十分条件と必要条件を一次元の場合では求めた. しかしながら, これらの条件は非常に厳しすぎるし, 特に多次元の場合には適用できないので, 自由な観測値に対しては, Kóczyらの「線形補間型推論法」は必ずしも満足のいく方法ではないことがわかった.

今後の課題として, 三角型の観測値に対する推論結果が三角型になるための新たな推論方法を提案するこ

とが必要と思われる. また, 一般に, ファジィ規則 $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{m1} \Rightarrow B_{11}, B_{21}, \dots, B_{n1}; A_{12}, A_{22}, \dots, A_{m2} \Rightarrow B_{12}, B_{22}, \dots, B_{n2}$ および観測値 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*$ のメンバーシップ関数が“正規凸ファジィ集合”のとき, その推論結果 $B_1^*, B_2^*, \dots, B_n^*$ も“正規凸ファジィ集合”となるような新たなファジィ推論法を考えだすことも必要であろう.

参考文献

- [1] M. Mizumoto and H. J. Zimmermann, Comparison of fuzzy reasoning methods, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.8, No.3, (1982) 253-283.
- [2] 水本雅晴, ファジィ推論(1), 日本ファジィ学会誌, Vol. 4, No.2, (1992) 256-264.
- [3] 水本雅晴, ファジィ推論(2), 日本ファジィ学会誌, Vol. 4, No.3, (1992) 35-46.
- [4] L. T. Kóczy and K. Hirota, Interpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rule bases, *Information Sciences*, Vol.71, No.1 & 2, (1993) 169-201.
- [5] L. T. Kóczy and K. Hirota, Approximate reasoning by linear rule interpolation and general approximation, *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol.9, No.3, (1993) 197-225.
- [6] 石岩, 水本雅晴, 疎なファジィルールベースにおけるKóczyの補間型推論法について, 第10回ファジィシステムシンポジウム講演論文集(1994), 221-224
- [7] A. Kaufmann and M. M. Gupta, *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Elsevier Science Publisher B.V. (1988)

(1994年10月20日 受付)

(1995年3月1日 再受付)

付録: $\inf\{B^*\alpha\}$ が α の線形関数になるための十分条件($m=2, n=1$ の場合)

この場合, ファジィ規則 $A_{11}, A_{21} \Rightarrow B_1; A_{12}, A_{22} \Rightarrow B_2$ と観測値 A_1^*, A_2^* ($A_{i1} < A_i^* < A_{i2}; B_1 < B^* < B_2$)に対して, そのメンバーシップ関数の左側はそれぞれ

$$\inf\{A_{11}\alpha\} = k_{11}\alpha + a_{11} \quad (A-1)$$

$$\inf\{A_1^*\alpha\} = k_1\alpha + a_1 \quad (A-2)$$

$$\inf\{A_{12}\alpha\} = k_{12}\alpha + a_{12} \quad (A-3)$$

$$\inf\{A_{21}\alpha\} = k_{21}\alpha + a_{21} \quad (A-4)$$

$$\inf\{A_2^*\alpha\} = k_2\alpha + a_2 \quad (A-5)$$

$$\inf\{A_{22}\alpha\} = k_{22}\alpha + a_{22} \quad (A-6)$$

$$\inf\{B_1\alpha\} = h_1\alpha + b_1 \quad (A-7)$$

$$\inf\{B_2\alpha\} = h_2\alpha + b_2 \quad (A-8)$$

とする. 式(50)により

$$\inf\{B^*\alpha\} = \frac{1/W_{2L}\alpha \inf\{B_1\alpha\} + 1/W_{1L}\alpha \inf\{B_2\alpha\}}{1/W_{1L}\alpha + 1/W_{2L}\alpha}$$

となる。係数 $(1/W_{2L}\alpha)/(1/W_{1L}\alpha+1/W_{2L}\alpha)$ を定数 δ (明らかに, $\delta \in [0,1]$) とする(この時, $(1/W_{1L}\alpha)/(W_{1L}\alpha+W_{2L}\alpha) = (1-\delta)$)。式(A-1)–(A-8)を用いて式(52), (53)によって,

$$\delta = \frac{\{[(k_1-k_{11})\alpha + (a_1-a_{11})]^2 + [(k_2-k_{21})\alpha + (a_2-a_{21})]^2\}^{1/2}}{\{[(k_1-k_{11})\alpha + (a_1-a_{11})]^2 + [(k_2-k_{21})\alpha + (a_2-a_{21})]^2\}^{1/2} + \{[(k_{12}-k_1)\alpha + (a_{12}-a_1)]^2 + [(k_{22}-k_2)\alpha + (a_{22}-a_2)]^2\}^{1/2}} \quad (\text{A-9})$$

が得られる。式(A-9)を整理すると,

$$(1-\delta)\{[(k_1-k_{11})\alpha + (a_1-a_{11})]^2 + [(k_2-k_{21})\alpha + (a_2-a_{21})]^2\}^{1/2} = \delta\{[(k_{12}-k_1)\alpha + (a_{12}-a_1)]^2 + [(k_{22}-k_2)\alpha + (a_{22}-a_2)]^2\}^{1/2} \quad (\text{A-10})$$

となり, 次の恒等式が得られる。

$$(1-\delta)^2\{[(k_1-k_{11})\alpha + (a_1-a_{11})]^2 + [(k_2-k_{21})\alpha + (a_2-a_{21})]^2\} = \delta^2\{[(k_{12}-k_1)\alpha + (a_{12}-a_1)]^2 + [(k_{22}-k_2)\alpha + (a_{22}-a_2)]^2\} \quad (\text{A-11})$$

この恒等式を解くと, パラメータ k_1, a_1, k_2, a_2 間の関係式は次のようになる。

$$(1-\delta)^2[(k_1-k_{11})^2 + (k_2-k_{21})^2] = \delta^2[(k_{12}-k_1)^2 + (k_{22}-k_2)^2] \quad (\text{A-12})$$

$$(1-\delta)^2[(k_1-k_{11})(a_1-a_{11}) + (k_2-k_{21})(a_2-a_{21})] = \delta^2[(k_{12}-k_1)(a_{12}-a_1) + (k_{22}-k_2)(a_{22}-a_2)] \quad (\text{A-13})$$

$$(1-\delta)^2[(a_1-a_{11})^2 + (a_2-a_{21})^2] = \delta^2[(a_{12}-a_1)^2 + (a_{22}-a_2)^2] \quad (\text{A-14})$$

以上示したように, 式(A-12), (A-13), (A-14)は二次元の場合 $\inf\{B^*\alpha\}$ が α の線形関数になるための十分条件である。

[問い合わせ先]

〒572 大阪府寝屋川市初町18-8
大阪電気通信大学情報工学部
情報工学科水本研究室
石 岩 (SHI Yan)
TEL : 0720-20-4569
FAX : 0720-24-0014
E-mail : shi@mzlab.osakac.ac.jp

著 者 紹 介

石 岩 (SHI Yan)

大阪電気通信大学大学院工学研究科情報工学専攻博士後期課程

1982年、中国東北重型機械学院基礎工学部応用数学科卒業。同年、同大学応用数学科助手。1988年、中国大連海事大学大学院修士課程応用数学専攻終了。同年、東北重型機械学院応用数学科講師。1991年4月来日、山形大学工学部客員研究員、大阪電気通信大学工学部客員研究員を経て、1994年4月より、大阪電気通信大学大学院情報工学専攻博士後期課程に在学中。主として、ファジィ推論、ファジィシステムモデリングに関する研究に従事。

水本 雅晴 (みずもと まさはる)

大阪電気通信大学情報工学部情報工学科
1966年、大阪大学基礎工学部電気工学科卒業。1971年、同大学院博士課程修了。工学博士。同年、同大学情報工学科助手。1978年、大阪電気通信大学工学部経営工学科助教授。1980年、同大学教授となり、現在に至る。1980～81年、フンボルト奨学生としてドイツ・アーヘン工科大学に滞在。現日本ファジィ学会理事、バイオメディカルファジィ学会副会長、前日本ファジィ学会誌編集委員長。ファジィ理論とその応用、特に、ファジィ推論、ファジィ制御法、ファジィ・ニューロ、ファジィ演算、ファジィ数などの研究に従事。著書に「ファジィ理論とその応用」(サイエンス社)など。日本ファジィ学会、国際ファジィシステム学会、計測自動制御学会、システム制御情報学会、人工知能学会、電子情報通信学会、情報処理学会の会員。

Some Considerations on Kóczy's Linear Interpolative Reasoning Method

by

Yan SHI and Masaharu MIZUMOTO

Abstract :

When the fuzzy rule base is sparse, conventional fuzzy reasoning methods do not work well because of the lack of inference evidence. To tackle this problem, Kóczy and Hirota proposed a fuzzy reasoning method called a linear interpolative method. In this paper, we analyze the Kóczy and Hirota's reasoning method and find out that the reasoning consequences by the method are sometimes abnormal fuzzy sets. Moreover, the reasoning conditions of the reasoning method are also discussed analytically.

Keywords : Sparse Fuzzy Rule Base, Fuzzy Reasoning, Linear Interpolative Reasoning

Contact Address : **Yan SHI**

Division of Information and Computer Sciences,

Osaka Electro-Communication University

18-8, Hatsucho, Neyagawa, Osaka 572

TEL : 0720-20-4569

FAX : 0720-24-0014

E-mail : shi@mzlab.osakac.ac.jp