論文

証拠と信念に基づくファジィ論理の一構成[†]村井 哲也^{*1} 宮腰 政明^{*2} 新保 勝^{*2}

Dempster-Shafer の証拠理論に基づく信念様相論理を利用したファジィ論理の一構成について論じる。まず、真理値の客観的解釈と主観的解釈の相違を確認した上で、Dempster-Shafer の証拠理論における plausibility 関数が形成する信念様相論理に基づいて客観的真理値の可能性を限定できることを示し、Belnap-Dunn の四値論理を再構成する。次に、同じ考え方をファジィ論理に適用し、客観的真理値を証拠に基づく信念によって限定する考え方に基づくファジィ論理の一構成を提案する。この定式化の結果、ファジィ論理は主観的な古典論理の単なる拡張としてではなく、客観的古典論理と証拠に基づく信念の両者から構成されるという解釈が可能となる。これは vagueness の意味に対する一つの論理的基礎付けを与えるといえる。

キーワード：ファジィ論理、信念様相論理、Dempster-Shafer の証拠理論、測度に基づく様相論理の意味論、証拠に基づく真偽限定。

1. 序論

本論文の目的は証拠が形成する信念論理[13]を用いて、ファジィ論理に対する一つの基礎付けを与えることである。ファジィ理論[3,9,18]では、ファジィ文は主観的に解釈すべき対象であり、エージェントによって、その意味は異なり得るとされる。本論文で提案する定式化では、そのような主観性はエージェントが獲得した証拠に基づいて形成した信念に由来すると解釈できる。換言すれば、意味の違いは各エージェントが獲得した証拠の相違に基づくのである。

ファジィ理論では通常、真理値やグレード値の集合である閉区間 $[0,1]$ を古典論理の真理値集合である $\{0,1\}$ の拡張とみなしている。そのため、ファジィ論理における真理値1と0はそれぞれ、古典論理の真理値1(真)と0(偽)に同一視される。しかし、この考え方には次の矛盾が隠されている。すなわち、古典論理では文の真理値を通常、エージェントの主観とは独立に定まる客観的(存在論的)対象として扱う。ところが、ファジィ論理の真理値は両端の1や0でさえ、エージェントによって変化し得る主観的(認識論的)対象であるから、古典論理の真理値の客観性と矛盾するのである。ファジィ論理の両端の真理値が古典論理の性質を持つのであれば、その古典論理は主観的に解釈されたもの

でなければならない。しかし、主観的な古典論理とは何を意味するのだろうか。

いま論じた客観的および主観的真理値に関する問題は Kleene の三値論理[8]そして Belnap[2]や Dunn[6]の四値論理にもあてはまる。そこでは、文が取り得る客観的真理値の可能性を情報や証拠によって限定する考え方で本問題を解決できるという示唆がある(cf. Dunn[5], 向殿[10], Urquhart[17])。しかしながら、証拠や情報が客観的真理値の限定といかなる理論的關係にあるのかに関しては論じられていない。

本論文では、まず、Dempster-Shafer の証拠理論における plausibility 関数が形成する信念様相論理[13]に基づいて客観的真理値の可能性を限定できることを示し、この点を利用して、Belnap-Dunn の四値論理を再構成する。Kleene の三値論理はここで再構成した四値論理において、特別な証拠の型に対応する場合として把握できる。特に、Dirac 測度を導く証拠の型に対応する論理は古典論理と同型となり、主観的古典論理を表現する。

次に、同じ考え方のファジィ論理への適用を試みる。Belnap-Dunn の四値論理の特徴は、真理値を主観的に解釈する際に、ある文とその否定の真理値を原則として互いに独立に定める点にある。本論文でもこの考え方に従って、まず拡張ファジィ論理と呼ぶ論理を構成する。これは文の真理値を文が真である信念の度合いと偽である度合いの組として表現する論理である。特別な証拠の型の下で、二つの値の独立性が失われ、通常のファジィ論理を得ることが分かる。

以上の定式化の結果、ファジィ論理の真理値集合 $[0,1]$ は古典論理における $\{0,1\}$ の単なる拡張としてではなく、客観的真理値と証拠が形成する信念の両方に基づいて構成されることが分かる。すなわち、ファジィ

[†] A Formulation of Fuzzy Logic by Means of Evidence and Belief

Tetsuya MURAI, Masaaki MIYAKOSHI, and Masaru SHIMBO

^{*1} 北海道大学 工学部 情報図形科学講座

Department of Information and Graphics Sciences, Faculty of Engineering, Hokkaido University

^{*2} 北海道大学大学院 工学研究科 システム情報工学専攻 数理情報工学講座

Division of Systems and Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hokkaido University

ィ論理における真理値 1 はファジィ文を完全に信じることを, 0 はそうでないと完全に信じると解釈できるのである。これはファジィ集合・論理が表現するあいまいさ, すなわち, vagueness に対する一つの論理的基礎付けを与える。

例を挙げれば, あるエージェント, 例えば, Dudley が B_0 の若さのグレードを 1 であると判断するのは, B_0 が若いと Dudley が(完全に)信じるからであり, 一方, Julie の若さのグレードを 0 であるとするのは, Julie は若くないと Dudley が(完全に)信じるからである。これは Dudley の信念を表わす様相演算子 $\mathbf{B}$ を利用して

$$\begin{aligned} V_w(\text{young}(B_0)) &= 1 \\ \Leftrightarrow v(\mathbf{B}\text{young}(B_0), w) &= T, \\ V_w(\text{young}(Julie)) &= 0 \\ \Leftrightarrow v(\mathbf{B}\neg\text{young}(Julie), w) &= T. \end{aligned}$$

と形式化できる。ここで, 客観的な真(偽)を $T(F)$ で, 主観的な真(偽)を $1(0)$ で表現した。 $\neg$ は否定演算子である。 v は基礎となる(二値的)信念様相論理の付値で, 各文と各世界との組に対して T または F の値を取る。 V_w はある世界 w における Dudley の主観を表わすファジィ論理の付値で, $[0, 1]$ の値を取る。詳細は本論で述べる。

本論文の基礎となる信念様相論理の言語 L をあらかじめ構成する。 L を原子文の集合 P から, 論理演算子 $\top$ (恒真), $\perp$ (恒偽), $\neg$ (否定), $\wedge$ (連言), $\vee$ (選言), $\rightarrow$ (質料含意), $\leftrightarrow$ (同値), $\mathbf{B}$ (信念)を利用して, 通常通り構成する。グレード付き信念演算子 $\mathbf{B}_\alpha (\alpha \in (0, 1])$ を追加する場合もある[4, 11, 14]。その場合は, $\mathbf{B}_1$ と前出の $\mathbf{B}$ を同一視する。 L_{PL} を信念演算子を含まない文からなる L の部分言語とする。本論文で扱う多値論理やファジィ論理は言語 L_{PL} に対して構成される。

2. 証拠に基づく信念と Belnap-Dunn の四値論理

2.1 文の真偽限定と Belnap-Dunn の四値論理

古典論理の質料含意がもたらす違和を解決するために提案されたのが適切さの論理(cf.Dunn[5])である。Dunn[6]は適切さの論理に対する意味論の一つとして, 付値 V を

$$V : P \rightarrow 2^{\{T, F\}}$$

によって定義する四値論理を提案し, Belnap[3]はその質問応答システムへの応用を論じた。これを以下, Belnap-Dunn の四値論理(以下, BD4L と略す)と呼ぶ。この論理では,

$$1 = \{T\}, B = \{T, F\}, N = \emptyset, 0 = \{F\}$$

の四値のいずれかが付値の値となる。真理値集合 $\{1, B, N, 0\}$ は 1 を最大元, 0 を最小元とするド・モルガン代数をなす(図 1)。

図1. BD4Lの真理値
($\sim$ はDe Morgan否定を表わす)

付値 V は

$$\begin{aligned} (\neg) T \in V(\neg p) &\Leftrightarrow F \in V(p) \\ F \in V(\neg p) &\Leftrightarrow T \in V(p) \\ (\wedge) T \in V(p \wedge q) &\Leftrightarrow T \in V(p) \text{ かつ } T \in V(q) \\ F \in V(p \wedge q) &\Leftrightarrow F \in V(p) \text{ または } F \in V(q) \\ (\vee) T \in V(p \vee q) &\Leftrightarrow T \in V(p) \text{ または } T \in V(q) \\ F \in V(p \vee q) &\Leftrightarrow F \in V(p) \text{ かつ } F \in V(q) \end{aligned}$$

によって言語 L_{PL} の複合文に拡張される。論理演算子に対する真理表は表 1 の通りである。

表1. BD4Lと論理演算子

p	$\neg p$	$p \wedge q$	$1 \ B \ N \ 0$	$p \vee q$	$1 \ B \ N \ 0$
1	0	1	1 B N 0	1	1 1 1 1
B	N	B	B B 0 0	B	1 B 1 B
N	B	N	N 0 N 0	N	1 1 N N
0	1	0	0 0 0 0	0	1 B N 0

この付値では明らかに, 文に対する真偽の割当が互いに独立である。文の真理値は本来, 真(T)か偽(F)のいずれか一方であり, B や N はそれぞれ情報の過剰や欠如によって一方に限定できない状態であると解釈される。一元集合 $\{T\} (=1)$ は主観的な真を表現し, 客観的な真を表わす T 自体とは区別される。一元集合 $\{F\} (=0)$ と F についても同様の区別ができる。

BD4Lにおいて, B または N の一方を取らないと仮定すれば, Kleene の三値論理を得ることは表 1 から明らかであり, また, 両方とも取らなければ古典論理と同型になることも分かる。本論文では真偽限定の結果として, $\{T\}$ および $\{F\}$ の二値のみを取る場合を主観的古典論理と呼ぶ。

2.2 証拠が形成する信念論理と BD4L

BD4L の付値の値は証拠あるいは情報によって限定された結果としての客観的真理値の集合を表現する。しかし, その結果が証拠からどのように生成されたか

は説明していない。そこで本節では、我々が以前に提案した証拠が形成する信念論理のモデル[13]を利用して、付値と証拠との関係を明らかにする。

証拠が形成する信念論理のモデルはファジィ測度に基づく様相論理の意味論[12]の特別な場合であり、belief 関数および plausibility 関数に基づくモデルがある。本論文ではこのうち、四値論理を表現できる後者を採用する。

Plausibility 関数に基づくモデルは

$$\langle W, \{Pl_w\}_{w \in W}, v \rangle$$

であり、 W は可能世界の有限集合、 Pl_w は各世界 $w (\in W)$ に割り当てた plausibility 関数、 v は原子文の各世界における真偽を与える(二値的)付値である。文 p に対して、その命題 $\|p\|$ を

$$\|p\| = \{w | v(p, w) = T\}$$

で定めるとき、信念文の真偽は

$$v(Bp, w) = T \Leftrightarrow Pl_w(\|p\|) = 1,$$

$$v(Bp, w) = F \Leftrightarrow Pl_w(\|p\|) < 1$$

によって定義する。

我々は plausibility 関数に基づくモデルのクラスに関して、様相論理体系 $EMNP$ が健全かつ完全であることを証明した[13]。この体系は命題論理の公理型と推論規則に加えて公理型

$$M. \quad B(p \wedge q) \rightarrow (Bp \wedge Bq)$$

$$N. \quad B\top$$

$$P. \quad \neg B\perp$$

および推論規則

$$RE. \quad p \leftrightarrow q \text{ から } Bp \leftrightarrow Bq \text{ を推論する}$$

によって公理化される。この体系では

$$Bp \rightarrow \neg B \neg p (\leftrightarrow \neg (Bp \wedge B \neg p)),$$

$$\neg B \neg p \rightarrow Bp (\leftrightarrow \neg (\neg Bp \wedge \neg B \neg p))$$

がともに成立しないので、各原子文 p に対して、一般に次の四つの状態が充足可能となる：

$$(1) \quad Bp \wedge \neg B \neg p$$

$$(2) \quad Bp \wedge B \neg p$$

$$(3) \quad \neg Bp \wedge \neg B \neg p$$

$$(4) \quad \neg Bp \wedge B \neg p$$

これから、四値論理の付値を定義できる：

【定義 1】 Plausibility 関数に基づくモデル $\langle W, \{Pl_w\}_{w \in W}, v \rangle$ が与えられたとする。このとき、原子文 $p \in P$ に対して、可能世界 w における四値論理の付値 $V_w : P \rightarrow 2^{(T, F)}$ を

$$T \in V_w(p) \Leftrightarrow v(Bp, w) = T$$

$$F \in V_w(p) \Leftrightarrow v(B \neg p, w) = T$$

によって定義する。

明らかに、次の補題が成り立つ。

【補題 2】 原子文 $p \in P$ に対して、

$$V_w(p) = \begin{cases} 1, & v(Bp \wedge \neg B \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ B, & v(Bp \wedge B \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ N, & v(\neg Bp \wedge \neg B \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ 0, & v(\neg Bp \wedge B \neg p, w) = T \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。

この付値 V_w は前節の定義 $(\neg), (\wedge), (\vee)$ を利用して、 L_{PL} 上に拡張される。

以下では、各世界に同一の plausibility 関数を持つモデルを扱う：

$$\forall w \forall w', \quad Pl_w = Pl_{w'}.$$

すなわち、各世界 w で構成される四値論理の付値 V_w はすべて同一であるから、以下では世界を表わす添え字を省略し、単に、 V で表わす。

2.3. 証拠が生成する plausibility 関数と BD 4 L

2.3.1. 証拠の型

本節では証拠が生成する plausibility 関数と四値論理の真理値との関係を論じる。まず、そのために必要な証拠の型の分類を示す。

エージェントにとって真偽が未知である原子文 $p \in P$ について、 p が真である世界 w_p と p が偽である世界 $w_{\neg p}$ の二つが考えられるから

$$W_p = \{w_p, w_{\neg p}\}$$

とおく。原子文 p に関する証拠は 2^{W_p} 上に定義される基本確率割当[15]によって表現される：

$$bpa_p : 2^{W_p} \rightarrow [0, 1]$$

$$\text{s.t. } bpa_p(\emptyset) = 0, \quad \sum_{X \subseteq W_p} bpa_p(X) = 1.$$

各世界には同一の基本確率割当を与える。この割当から構成される plausibility 関数を Pl_p とする。付値は

$$v(p, w_p) = T, \quad v(p, w_{\neg p}) = F$$

と定める。以上から、原子文 p に関する証拠を表現するモデルを

$$Mp = \langle W_p, Pl_p, v \rangle$$

として構成できる。

四値論理が構成される理由は情報の過剰と欠如である。すなわち、情報の過剰は矛盾を、また情報の欠如は ambiguity を引き起こす。そこで、証拠と信念の状態との関係を考察するために、原子文 p に対する証拠を表現する基本確率割当 bpa_p の型を、矛盾と ambiguity という観点から分類する。ここで、

・ 証拠が矛盾する

⇔ 証拠を表現する基本確率割当に互いに素な焦点要素が存在する

・証拠が ambiguous である

$\Leftrightarrow$ 一元集合以外の焦点要素が存在する
と定義する。なお、焦点要素とは正の基本確率が割り
当てられた部分集合である。

W_p の部分集合に対する bpa_p の値を

$$\begin{aligned} m^+ &= bpa_p(\{w_p\}), \\ m^- &= bpa_p(\{w_{\neg p}\}), \\ m^0 &= bpa_p(W_p) \end{aligned}$$

とおく。明らかに

$$m^+ + m^- + m^0 = 1$$

である。このとき、原子文 p に対する証拠を表わす
 bpa_p は次のいずれかの型に分類できる：

(E 1) 完全に ambiguous であるという証拠，すなわち，
未知を表現する bpa_p ：

$$m^+ = m^- = 0, m^0 = 1$$

(E 2) 矛盾はないが，ambiguous である証拠を表わす
 bpa_p ：

$$(E 2^+) m^+ > 0, m^- = 0, m^0 = 1 - m^+ > 0$$

$$(E 2^-) m^+ = 0, m^- > 0, m^0 = 1 - m^- > 0$$

(E 3) 矛盾も ambiguity もともにない確実な証拠を表
わす bpa_p ：

$$(E 3^+) m^+ = 1, m^- = 0, m^0 = 0$$

$$(E 3^-) m^+ = 0, m^- = 1, m^0 = 0$$

(E 4) 矛盾があり，ambiguous でもある証拠を表わす
 bpa_p

$$m^+ > 0, m^- > 0, m^0 = 1 - m^+ - m^- > 0$$

(E 5) 矛盾はあるが，ambiguity はない証拠を表わす
 bpa_p

$$m^+ > 0, m^- = 1 - m^+ > 0, m^0 = 0.$$

2.3.2. 証拠の型と BD 4 L の真理値

bpa_p が生成する plausibility 関数 Pl_p に基づくモデ
ルを利用して、いま挙げた証拠の型に対応するエー
ジェントの信念状態から、どのような四値論理の真理値
が導かれるかを検討する。

(E 1) 未知を表現する bpa_p からは，vacuous な plausi-
bility 関数 Pl_p が生成される：

$$Pl_p(X) = \begin{cases} 1, & X \neq \phi \text{ のとき} \\ 0, & X = \phi \text{ のとき.} \end{cases}$$

これは可能性測度 [19] でもある。明らかに

$$Pl_p(\|p\|) = Pl_p(\|\neg p\|) = 1$$

が成り立つから

$$v(Bp, w) = (B \neg p, w) = T$$

すなわち，

$$v(Bp \wedge B \neg p, w) = T$$

であるから

$$V(p) = \{T, F\} = B$$

を得る。

(E 2) 矛盾はないが，ambiguous ではある証拠を表わ
す bpa_p から生成される plausibility 関数は vacuous
な場合を除いた可能性測度 [19] である。(E 2⁺) は p を
肯定的に支持する証拠がある場合であり，

$$Pl_p(\|p\|) = m^+ + m^0 = 1, Pl_p(\|\neg p\|) = m^0 < 1$$

が成り立つ。よって

$$v(Bp, w) = T, v(B \neg p, w) = F$$

すなわち

$$v(Bp \wedge \neg B \neg p, w) = T$$

であるから

$$V(p) = \{T\} = 1$$

を得る。(E 2⁻) は逆に， p を否定的に支持する場合であ
り，同様に

$$V(p) = \{F\} = 0$$

を得る。

(E 3) 矛盾がなく，ambiguity もない証拠を表わす
 bpa_p からは，Dirac 測度 (cf. [16]) が生成する。(E 2) の
時と同様に，(E 3⁺)，(E 3⁻) に対して，それぞれ

$$V(p) = \{T\} = 1,$$

$$V(p) = \{F\} = 0$$

となる。

(E 4) 矛盾があり，ambiguous でもある証拠を表わす
 bpa_p から生成する plausibility 関数に関して従来，特
別な呼称はない。本論文では，これを後述の議論を踏
まえて，quasi-vagueness 測度と呼ぶ。明らかに

$$Pl_p(\|p\|) = m^+ + m^0 < 1,$$

$$Pl_p(\|\neg p\|) = m^- + m^0 < 1$$

である。よって

$$v(Bp, w) = F, v(B \neg p, w) = F$$

すなわち，

$$v(\neg Bp \wedge \neg B \neg p, w) = T$$

となるから

$$V(p) = \phi = N$$

を得る。

(E 5) 矛盾はあるが，ambiguity はない証拠を表わす
 bpa_p から生成されるのは Dirac 測度を除く確率測度
であり，この場合も (E 4) と同様に

$$V(p) = \phi = N$$

となる。以上の結果をまとめると表 2 を得る。

表2. 証拠の型と主観的真理値

証拠の型	主観的真理値
(E1) 未知	B
(E2) 無矛盾かつambiguous	1 or 0
(E3) 無矛盾かつambiguousでない	1 or 0
(E4) 矛盾かつambiguous	N
(E5) 矛盾かつambiguousでない	N

2.4. 特別な plausibility 関数の場合

本節では, plausibility 関数が可能性測度, 確率測度, Dirac 測度となる場合について, 対応する付値の性質を論じる.

2.4.1. 可能性測度と Kleene の三値論理

可能性測度に基づくモデルのクラスに関して, 体系 *EMFNP* が健全かつ完全であることを証明した[12]. これは前出の *EMNP* に公理型

$$F. \quad B(p \vee q) \rightarrow (Bp \vee Bq)$$

を追加したものである. 体系 *EMFNP* では

$$D_c. \quad \neg B \neg p \rightarrow Bp$$

が定理となり, これは

$$Bp \vee B \neg p$$

と同値であるから, 任意の原子文 p に対して, p および $\neg p$ の少なくとも一方を信じることを意味する. よって, *EMFNP* の信念演算子に基づく付値 V は $N (= \phi)$ を値として取らず, Kleene の三値論理を構成する(表3). 実際, 可能性測度を生成する証拠の型は(E1)および(E2), (E3)であり, 表2の結果と一致する.

表3. 可能性測度に基づく付値

p	$\neg p$	$p \wedge q$	1 B 0	$p \vee q$	1 B 0
1	0	1	1 B 0	1	1 1 1
B	B	B	B B 0	B	1 B B
0	1	0	0 0 0	0	1 B 0

2.4.2. 確率測度と Kleene の三値論理

確率測度に基づくモデルのクラスに関して, 体系 *KD* が健全かつ完全であることが証明済みである[12]. この体系は命題論理の公理型と推論規則に加えて公理型

$$K. \quad B(p \rightarrow q) \rightarrow (Bp \rightarrow Bq)$$

$$D. \quad Bp \rightarrow \neg B \neg p$$

および推論規則

$$RN. \quad p \text{ から } Bp \text{ を推論する}$$

によって公理化できるが, 前出の *EMNP* に

$$C. \quad (Bp \wedge Bq) \rightarrow B(p \wedge q)$$

を公理型として追加した体系 *EMCNP* と一致することも証明されている(cf.[1]). *KD* に更に正負の内省

公理を追加した体系 *KD45* は, Hintikka[7]以来, 合理的信念を表現する様相論理として認められている. 公理型 *D* は Bp が真なら, $B \neg p$ が真にならないことを保証するから, 体系 *KD* の信念演算子に基づく付値 V は $B (= \{T, F\})$ を値として取らず, この場合もまた, Kleene の三値論理を構成する(表5). 実際, 確率測度を生成する証拠の型は(E3)と(E5)であるから, 表2の結果と一致する. ただし, 第3の値は可能性測度の場合と対極の意味を持つ.

表4. 確率測度に基づく付値

p	$\neg p$	$p \wedge q$	1 N 0	$p \vee q$	1 N 0
1	0	1	1 N 0	1	1 1 1
N	N	N	N N 0	N	1 N N
0	1	0	0 0 0	0	1 N 0

2.4.3. Dirac 測度と主観的古典論理

Dirac 測度に基づくモデルのクラスに関して, 体系 *KD!* が健全かつ完全であることを証明した[12]. *KD!* は *KD* に D_c を公理型として追加した体系であり, *EMNP* に *F* と *C* を公理型として追加した体系 *EMC-FNP* と一致し, *D* および D_c の両者, すなわち,

$$D!. \quad Bp \leftrightarrow \neg B \neg p$$

が成り立つ. これは

$$(Bp \vee B \neg p) \wedge \neg (Bp \wedge B \neg p)$$

と書き換えられるので, 体系 *KD!* では, すべての文について, それ自身か, または, その否定のいずれか一方のみを信じることになる. よって, 体系 *KD!* の信念演算子に基づく付値は古典論理と同型であり(表5), Dirac 測度は主観的古典論理を与えることが分かる.

以上, 本節の結果を表6にまとめる.

表5. Dirac測度に基づく付値

p	$\neg p$	$p \wedge q$	1 0	$p \vee q$	1 0
1	0	1	1 0	1	1 1
0	1	0	0 0	0	1 0

表6. 測度と対応する多値論理

測度	多値論理
plausibility関数	BD4L
可能性測度	Kleeneの三値論理
確率測度	Kleeneの三値論理
Dirac測度	主観的古典論理

2.5. 主観的真理値の客観性に対する信念の限界

体系 $KD!$ では一般に

$$T. \quad Bp \rightarrow p$$

は成立しないので、真であると信じる文が各世界で客観的に真である保証はない。すなわち、 $\{T\}$ または $\{F\}$ であることから直ちに、それぞれ、 T または F であることは含意しないのである。

T を公理型として体系 $KD!$ に付け加えると

$$T_c. \quad p \rightarrow Bp$$

も定理となり (cf. [1], p.143), 得られる体系は $KT!$ と呼ばれる。 $KT!$ では

$$T!. \quad Bp \leftrightarrow p$$

が成り立つため、すべての原子文について、それ自体かまたはその否定のいずれか一方を信じ、かつ、それはその世界で (客観的に) 真である。すなわち、

$$V(p) = 1 \Leftrightarrow v(p, w) = T$$

が成り立つから、主観的真理値 1 は客観的にも真であるとみなすことができる。この意味で、体系 $KT!$ に基づく付値は客観的古典論理を構成する。しかし、測度の性質だけからは、公理型 T が導くことができないため、証拠が形成する信念論理では体系 $KT!$, すなわち、客観的古典論理を表現できないことが分かる。

尚、公理型 T は Hintikka [7] 以来、知識公理と呼ばれ、信念ではなく知識と特徴付けるとされる。その意味では、信念が論理的整合性を持つことで、主観的古典論理をなすことはできても、客観的古典論理を構成するためには信念だけでは不十分であると結論できる。

2.6. Plausibility 関数に基づく四値論理の問題

Plausibility 関数に基づく信念から導かれる主観的真理値の性質と問題点を挙げる：

- ・証拠に矛盾がなければ、ambiguity の程度に関係なく、 $1 (= \{T\})$ または $0 (= \{F\})$ となる。したがって、例えば、 p をわずかにでも肯定的に支持する証拠がある場合と確実に支持する場合の両方ともに真理値 1 で表現されてしまう。
- ・証拠に矛盾があれば、これも ambiguity の程度に関係なく、したがって、わずかでも矛盾の兆候があれば、真理値は N となる。

以上から、plausibility 関数による信念の判断は甘すぎて、非常に弱い証拠と確実な証拠を区別できない。すなわち、四値論理で識別できる ambiguity は vacuous な証拠に対応する完全に未知の場合のみであり、それ以外の ambiguity の程度は識別できないのである。逆に言えば、証拠の ambiguity を反映させるためには、更に真理値が必要であり、そのような論理の一

つとしてファジィ論理の存在理由がある、という構図が浮かび上がる。しかしその際、測度値 1 のときに信じるとした先の信念の定義が強すぎることは明らかであり、信念をより柔軟に、しかも論理的に扱うためには、信念の度合いを考慮したグレード付き信念演算子 [4, 11, 14] が必要である。任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して、グレード付き信念演算子 B_α を含む文は

$$v(B_\alpha p, w) \Leftrightarrow Pl_w(\|p\|) \geq \alpha$$

によって定義される。

次章では、今述べた考え方に基づいて拡張ファジィ論理と呼ぶ論理を構成し、その特別な場合として通常ファジィ論理や主観的古典論理を包含することを示す。尚、各 $\alpha \in (0, 1]$ に対して、plausibility 関数およびその特別な場合が定めるグレード付き演算子 B_α を持つモデルのクラスに関して、表 7 に挙げた体系が健全であることが分かっている。

表7. グレード付き信念演算子と信念論理
(*については完全性も示した[14])

測度	体系
plausibility関数	$EMNP$
可能性測度*	$EMFNP$
確率測度	$EMNP$
Dirac測度*	$KD!$

3. 証拠が形成する信念と拡張ファジィ論理

前章では、BD 4 L の主観的真理値が証拠が形成する信念論理で構成できることを明らかにした。本章では、ファジィ論理についても同様な立場から議論を展開する。

3.1. ファジィ文に対する真偽限定

ファジィ文の真偽限定は通常の議論では、真理値集合 $[0, 1]$ における区間真理値で表現する。したがって、証拠によって限定を受ける台集合は $[0, 1]$ である。これに対し、本論文ではファジィ文の場合も客観的真理値の集合 $\{T, F\}$ 上の限定として構成する。ファジィ文は証拠を十分集めても、 $\{T\}$ または $\{F\}$ の一方のみには限定できない文として特徴付けられる。そのような証拠の状態から導かれる信念の度合こそが、そのファジィ文の真理値を与えると解釈できる。

以上述べた考え方を定式化するために、BD 4 L の真

理値を $\{T, F\}$ 上の特性関数で再表現し (cf. [5, 10]), 特性関数値を以下の順序対で表わす:

$$1 = \langle 1, 0 \rangle, \quad B = \langle 1, 1 \rangle, \\ N = \langle 0, 0 \rangle, \quad 0 = \langle 0, 1 \rangle.$$

すなわち, 原子文 p に対して

$$V(p) = \begin{cases} \langle 1, 0 \rangle, & v(Bp \wedge \neg B \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ \langle 1, 1 \rangle, & v(Bp \wedge B \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ \langle 0, 0 \rangle, & v(\neg Bp \wedge \neg B \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ \langle 0, 1 \rangle, & v(\neg Bp \wedge B \neg p, w) = T \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. また, 論理演算子に関して, 第2章で挙げた定義 ($\neg$), ($\wedge$), ($\vee$) から

$$V(p) = \langle t(p), f(p) \rangle \quad (t(p), f(p) \in \{1, 0\}), \\ V(q) = \langle t(q), f(q) \rangle \quad (t(q), f(q) \in \{1, 0\})$$

のとき,

$$V(\neg p) = \langle f(p), t(p) \rangle, \\ V(p \wedge q) = \langle \min(t(p), t(q)), \max(f(p), f(q)) \rangle, \\ V(p \vee q) = \langle \max(t(p), t(q)), \min(f(p), f(q)) \rangle$$

と書き直すことができる.

3.2. ファジィ真偽限定と拡張ファジィ論理

前章では, 証拠が導く plausibility 関数に基づいて四値論理を構成する際, 測度値 1 のみを利用したため, 四値論理が先に論じたすべての型の証拠を識別できなかった. そこで, 本章では中間の値を利用するグレード付き信念演算子 B_α に基づく真偽限定を定義する. 測度値 1 の場合との類推から, plausibility 関数値 $Pl_p(\|p\|)$ と $Pl_p(\|\neg p\|)$ がそれぞれ, p に対する肯定的および否定的信念の度合いとなるように定義したい. そのために, 各レベル $\alpha \in (0, 1]$ において, クリस्प文の場合と同様な真偽限定を行い, それらの総合として付値を定める.

最初に, 原子文に対する α -レベルの付値 $V_\alpha: P \rightarrow 2^{\{T, F\}}$ を

$$T \in V_\alpha(p) \Leftrightarrow v(B_\alpha p, w) = T, \\ F \in V_\alpha(p) \Leftrightarrow v(B_\alpha \neg p, w) = T$$

によって定義する. このとき, 各レベル α で,

$$V_\alpha(p) = \begin{cases} \langle 1, 0 \rangle, & v(B_\alpha p \wedge \neg B_\alpha \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ \langle 1, 1 \rangle, & v(B_\alpha p \wedge B_\alpha \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ \langle 0, 0 \rangle, & v(\neg B_\alpha p \wedge \neg B_\alpha \neg p, w) = T \text{ のとき} \\ \langle 0, 1 \rangle, & v(\neg B_\alpha p \wedge B_\alpha \neg p, w) = T \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する. かような α -レベルの真偽限定を総合するために, 真偽限定が成立するレベルの上限を取る. すなわち,

$$\tilde{t}(p) = \sup\{\alpha \mid T \in V_\alpha(p)\}, \\ \tilde{f}(p) = \sup\{\alpha \mid F \in V_\alpha(p)\}.$$

とし, p の付値をこれら二つの値の組として表現する:

$$\tilde{V}(p) = \langle \tilde{t}(p), \tilde{f}(p) \rangle$$

明らかに次の補題が成り立つ:

【補題 3】

- (1) $\tilde{t}(p) = Pl_p(\|p\|)$,
- (2) $\tilde{f}(p) = Pl_p(\|\neg p\|)$,
- (3) $0 \leq \tilde{t}(p) + \tilde{f}(p) \leq 2$.

また, 複合文に対して, 四値論理のときと同様な結果が成り立つ.

【補題 4】 $\tilde{V}(p) = \langle \tilde{t}(p), \tilde{f}(p) \rangle$, $\tilde{V}(q) = \langle \tilde{t}(q), \tilde{f}(q) \rangle$ のとき,

- (1) $\tilde{V}(\neg p) = \langle \tilde{f}(p), \tilde{t}(p) \rangle$,
- (2) $\tilde{V}(p \wedge q) = \langle \min(\tilde{t}(p), \tilde{t}(q)), \max(\tilde{f}(p), \tilde{f}(q)) \rangle$,
- (3) $\tilde{V}(p \vee q) = \langle \max(\tilde{t}(p), \tilde{t}(q)), \min(\tilde{f}(p), \tilde{f}(q)) \rangle$.

本節で定義した付値 $\tilde{V}$ が規定する論理を拡張ファジィ論理と呼ぶ.

3.3. 特別な plausibility 関数が導く論理

特別な plausibility 関数が導く付値と対応する論理について述べる.

(1) 可能性測度の場合, 任意の原子文 p に対して

$$\max(\tilde{t}(p), \tilde{f}(p)) = 1$$

が成り立つ. この種の付値に対応する論理は現在のところ知られていないと思われる.

(2) 確率測度の場合, 任意の原子文 p に対して

$$\tilde{t}(p) + \tilde{f}(p) = 1$$

が成り立つから, 肯定的および否定的信念の度合いが互いに独立ではない. よって, 両者の組で表現する必要がなく, 例えば, 肯定的信念の度合いだけで表現できる:

$$\tilde{V}(\neg p) = 1 - \tilde{t}(p), \\ \tilde{V}(p \wedge q) = \min(\tilde{t}(p), \tilde{t}(q)), \\ \tilde{V}(p \vee q) = \max(\tilde{t}(p), \tilde{t}(q)).$$

これは, 通常のファジィ論理の付値と同一であり, その基礎となる plausibility 関数は確率測度である. ここで, 一般に行われるファジィ対確率の議論は本結果とはまったく関係がないことを強調する.

(3) Dirac 測度の場合, 任意の原子文 p に対して, $\tilde{t}(p), \tilde{f}(p) \in \{0, 1\}$ であり, しかも

$$\tilde{t}(p) + \tilde{f}(p) = 1$$

だから, 付値は $1 = \langle 1, 0 \rangle$ と $0 = \langle 0, 1 \rangle$ の二値しか取らず, 主観的な古典論理となる. Dirac 測度は確率測度の特別な場合であるから, ファジィ論理は主観的古典

論理の拡張として把握できる。すなわち、図2の対応関係が成立する。

4. 議論

4.1. クリस्प文の真偽限定

クリस्प文 p の真理値は証拠を十分集成すれば最終的には、 $\{T\}$ または $\{F\}$ のいずれか一方に限定されるべき対象である。もし、 p と $\neg p$ の両方を部分的に支持する (E 4) や (E 5) の型の証拠が獲得されたならば、 $\{T\}$ または $\{F\}$ のいずれか一方を確実に支持する (E 3) の型の証拠と結合されなければ、本来、持つはずである真理値に限定できない。むしろ、クリस्पな文に対しては、(E 4) や (E 5) の型の証拠があるならば、それらの妥当性を疑うべきである。この点は証拠における dissonance は証拠評価における誤りの兆候であるとする Cohen や Shackle の考え方 (cf. Shafer [15], p. 223) と一致する。

更に、我々はここで、むしろ矛盾がない証拠が特徴付けるものがクリस्प文であると主張する。クリस्प文の真偽限定の過程は矛盾しない証拠を結合しつつ、したがって、(E 2) の型の証拠に対応する基本確率割当を経由して、最終的に ambiguity のない (E 3) の型、したがって Dirac 測度を生成する型に至る (少なくとも、めざす) 過程であると考えるのである (図 3)。

図3. クリस्प文の真偽限定

4.2. ファジィ文の真偽限定

矛盾のない証拠とクリस्प文という対応から逆に、ファジィ文を特徴付けるものこそが矛盾する証拠であると考えることができる。すなわち、ファジィ文の真偽限定の過程は (E 4) の型の証拠に基づく矛盾し、かつ ambiguous な基本確率割当を経て、最終的には ambiguity のない (E 5) の型、すなわち確率測度を生成する型の証拠に至る (少なくとも、めざす) 過程であるときめさせる (図 4)。確率測度が vagueness を表現するとい

う観点から、(E 4) に対応する plausibility 関数を前述のように、quasi-vagueness 測度と呼ぶことができる。

図4. ファジィ文の真偽限定

4.3. Vagueness と ambiguity

次に本論文で展開した論点から、vagueness と ambiguity との関係について論じる。一般に、ファジィ集合およびファジィ測度という二つの概念は互いに双対な概念であり、共通点は同じ区間の数値を用いるだけであって、各々の意味するところは全く異なるとされる。その観点は、前者は vagueness を、後者は ambiguity を表わすものであるという解釈で図式化される。例えば菅野・室伏 [16] は、vagueness の例として、「古い壺」かどうかは Yes-No では答えられないことを、また、ambiguity の例として、「壺が作られた年」は明確に定まっているはずであるが、情報の不完全さから特定できないことを挙げる。しかし、前者でも $\{\text{Yes}, \text{No}\}$ という限定が期待される集合が存在し、しかも、そのどちらにも限定できない状態を表わすファジィ測度、すなわち、確率測度が存在する。すなわち、vagueness も形式的観点からは ambiguity と共通の枠組で把握することができる。vagueness と ambiguity の相違は、それぞれを基礎付ける測度の特徴の相違に由来するのである。

5. 結論

本論文では二値的な信念様相論理を基礎に、ファジィ測度、より詳しくは、plausibility 関数を利用して、ファジィ論理の一構成を与えた。これは真理の客観性と主観性を峻別し、前者は古典論理、後者はファジィ測度から生じるとする一種の二元論に立脚する。したがって、ファジィ文 p であっても、基礎となる可能世界を構成するために必要な記号は p と $\neg p$ の二つだけである。二値では割り切れない主観性は両記号の上の、一方のみには偏ることのできない重みとして表現される。

現実の自然言語でも原則としては、かような肯定形と否定形の二つが基本であって、無限多値に対応する記号は用意されてない。例えば、「Dudley は若い」と言いながらも、釈然としない、割り切れないものを感じることがある。その部分をファジィ測度で表現するのが本論文の考え方である。自然言語でも肯定形と否定

形の二つが基本であると述べたが、もちろん、それだけしかないとは断定したわけではない。そのような主観性を記号に反映する方法として、「とても」あるいは「大体」などの言語ヘッジがある。主観性を表現するファジィ測度が言語ヘッジにどのように係わるかに関しては今後の課題とする。

最後に、本論文ではBD4Lを考察の出発点とし、証拠が形成する信念という考え方を利用して、文の真偽の程度が独立に定まる拡張ファジィ論理を導いた。一方、向殿・菊池(cf.[10])は拡張区間真理値という概念を提案し、そこから文の真偽の程度が独立に定まるファジィ・インターバル論理を導出した。これから、証拠が形成する信念論理と拡張区間真理値との間の密接な関係が示唆されるが、その具体的検討も今後の課題としたい。

謝辞。本研究の一部に関して、国際ファジィ工学研究so(LIFE)で開催されたワークショップ：ファジィ・データベース(1993年11月)において、ご討論や有益な示唆をいただきました。同ワークショップを主催された宮本定明先生(筑波大学)、馬野元秀先生(大阪府立大学)をはじめ、参加された諸先生に深く謝意を表します。また、査読者の一人から大変貴重なご助言をいただきましたことに対して深謝致します。尚、本研究の一部は平成七、八年度文部省科学研究費(奨励研究(A)07780297, 08780321)の援助を受けた。

参 考 文 献

- [1] B.F.Chellas, Modal Logic: An Introduction. Cambridge Univ.Press, 1980.
- [2] N.D.Belnap, A Useful Four-Valued Logic. J.M.Dunn and G.Epstein(eds.), Modern Uses of Multiple-Valued Logic, D.Reidel, 1977, pp.8-37.
- [3] D.Dubois and H.Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application. Academic Press, 1980.
- [4] D.Dubois, H.Prade, and C.Testemale, In Search of a Modal System for Possibility Theory. Proc.of 8th ECAI, 1988, pp.501-506.
- [5] J.M.Dunn, Relevance Logic and Entailment. D.Gabbay and F.Guenther(eds.), Handbook of Philosophical Logic: Vol.3, D.Reidel, 1986, pp.117-224.
- [6] J.M.Dunn, An Intuitive Semantics for First-Degree Entailments and Coupled Trees. Philosophical Studies, Vol.29(1976), pp.149-168.
- [7] J.Hintikka, Knowledge and Belief. Cornell Univ. Press, 1962.
- [8] S.C.Kleene, Introduction to Meta-Mathematics. North-Holland, 1952.
- [9] G.J.Klir and T.A.Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information. Prentice-Hall, 1988.
- [10] 向殿政男, ファジィ論理. 日刊工業新聞社, 1993.
- [11] T.Murai, M.Miyakoshi, and M.Shimbo, Fuzzifications of Modal Operators from the Standpoint of Fuzzy Semantics. Preprints of 2nd IFSA Congress, 1987, pp.430-433.
- [12] T.Murai, M.Miyakoshi, and M.Shimbo, Measure-Based Semantics for Modal Logic. R.Lowen and M.Roubens(eds.), Fuzzy Logic: State of the Art, Kluwer Academic, 1993, pp.395-405.
- [13] T.Murai, M.Miyakoshi, and M.Shimbo, Soundness and Completeness Theorems between the Dempster-Shafer Theory and Logic of Belief. Proc.of 3rd FUZZ-IEEE(WCCI), 1994, pp.855-858.
- [14] 村井哲也, 宮腰政明, 新保勝, ミニマル・モデルの族としてのファジィ測度モデルとグレード付き様相演算子. 日本ファジィ学会誌, Vol.6(1994), pp.661-668.
- [15] G.Shafer, A Mathematical Theory of Evidence. Princeton Univ.Press, 1976.
- [16] 菅野道夫, 室伏俊明, ファジィ測度. 日刊工業新聞社, 1993.
- [17] A.Urquhart, Many-Valued Logic. D.Gabbay and F.Guenther(eds.), Handbook of Philosophical Logic: Vol.3, D.Reidel, 1986, pp.71-116.
- [18] L.A.Zadeh, Fuzzy Sets. Information and Control, Vol.8(1965), pp.338-353.
- [19] L.A.Zadeh, Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems, Vol.1(1978), pp.3-28.

(1994年6月27日 受付)

[問い合わせ先]

〒060 札幌市北区北13条西8丁目

北海道大学工学部情報図形科学講座

村井 哲也

TEL : 011-706-6757

FAX : 011-706-7840

E-mail : murahiko@huie.hokudai.ac.jp

著者紹介

村井 哲也 (むらい てつや)

北海道大学 工学部 情報図形科学講座
1983年北大・理・数学卒。1985年北大院・工・修士課程修了。1987年同博士後期課程を中退し、札幌医科大学衛生短期大学部講師、北海道教育大学助教授を経て、1995年北大・工・助教授、現在に至る。博士(工学)。様相論理、証拠と信念、情報検索、データベースなどに興味を持つ。IFSA, ASIS, IEEE, ACM, AAAI他各会員。

宮腰 政明 (みやこし まさあき)

北海道大学大学院 工学研究科 システム情報工学専攻
昭45年北大・工・電子卒。昭54年北大院 工学研究科単位取得退学。同年北大・工・助手、助教授を経て、現在、北大院・工・教授(数理情報工学講座)。工学博士。電子情報通信学会会員。

新保 勝 (しんぼ まさる)

北海道大学大学院 工学研究科システム情報工学専攻

1961年東京大学工学部応用物理学科卒。1966年同大大学院博士課程単位取得退学。同年東大・工・助手。1973年北大・工・講師、助教授を経て、1979年同教授(情報処理工学講座)。1995年北大院・工・教授(数理情報工学講座)。1980～1981年米国コーネル大学客員教授、1981年連合王国サイエンス・リサーチ・カウンシル上級客員研究員。工学博士。情報処理、特に心理物理認識の研究に従事。情報処理学会、電子情報通信学会他各会員。

A Formulation of Fuzzy Logic by Means of Evidence and Belief

by

Tetsuya MURAI, Masaaki MIYAKOSHI and Masaru SHIMBO

Abstract :

Fuzzy logic is formulated by means of Dempster-Shafer-theory-based models for modal logic of belief. Emphasis is put on the difference between objective and subjective truth values. A way to restrict possible objective truth values is introduced using states of belief formed in modal logic of belief based on plausibility functions derived from evidence. Then, it is shown that the set of subjective truth values, $[0,1]$, of fuzzy logic is not a simple extension of the set of classical values, $\{0,1\}$. Extreme values, 1 and 0, of fuzzy sentences can be regarded as representing full belief and full disbelief for the sentences, respectively.

Keywords : Fuzzy Logic, Modal Logic of Belief, the Dempster-Shafer Theory of Evidence, Measure-Based Semantics for Modal Logic, Evidence-Based Truth Restriction

Contact Address : **Tetsuya MURAI**

*Department of Information and Graphics Sciences,
Faculty of Engineering, Hokkaido University
Kita 13, Nishi 8, Kita-ku, Sapporo 060, JAPAN
TEL : 011-706-6757
FAX : 011-706-7840
E-mail : murahiko@huie.hokudai.ac.jp*