論文

可能性測度による ファジィ最短経路問題の一モデル[†]

伊藤 健* 石井 博昭*

最短経路問題において、ネットワーク内で定義される距離は定数とされてきた。しかし、そのようなことは実社会において稀である。本研究においては、そのような距離をファジィ理論で扱う L - R ファジィ数として問題を設定する。経路の距離に対してはファジィ目標を導入し、経路の距離がある値以下となる可能性が最大であるものを最適(最短)とみなし定式化を行う。また、その解法として、**Dijkstra** のアルゴリズムを拡張した方法を提案する。

キーワード：最短経路問題, L - R ファジィ数, ファジィ目標, 可能性測度, **Dijkstra** 法

1. はじめに

意思決定のための要因が不確実な場合、そのような要素を確率的変動を伴うものとして定式化を行うことが多い。たしかに、確率変数を導入することで適当な解が得られることもあるが、単なる情報量の不足により不確実性が生じているような場合には、それらを確率変数ではなくファジィ数として扱うことが妥当と思われる。そこで、我々は従来の組合せ最適化問題にファジィ要素を取り入れ、いくつかのファジィ組合せ最適化問題を提案してきた[6][7]。

本研究では、ファジィ最短経路問題を扱う。最短経路問題において、ネットワーク中の各アークに設定される距離は定数とされてきたが、現実には、都市間を移動する進行速度や所要時間が時刻、日付、天候等により影響を受けるため、そのような距離をファジィ化することが妥当な場合も考えられる。ファジィ最短経路問題に関する研究は幾つか存在し、[2]においては、最適とされる経路を求めるときにノード間のアークの存在性が無視されるため、解として得られた最短経路が実在しないことがある。[3]はそのような問題点を改善し、最短とされる経路については距離と可能性の要因による非劣解を求めている。我々はネットワーク中の各アークの距離をファジィ数により表現し、ファジィ理論で様相性を議論する際に用いる可能性測度を利用することにより可能性計画問題として定式化を行う。さらに、解法アルゴリズムに **Dijkstra** のアルゴリズム[1]を拡張することで、本研究においても得られた経路の存在性を保証している。

2. 定式化

対象とするネットワークをグラフ $G(N, A)$ で表し、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はノード集合、 A はノード i, j を結ぶアーク $a_{ij} (i, j \in N, i \neq j)$ により構成されるアーク集合とする。ただし、ノード $1, n$ を始点、終点とし、 a_{ij} には次のようなメンバシップ関数により制限される正の L - R ファジィ数[2]として定義された距離 $\tilde{D}_{ij}$ が設定されていると仮定する。

$$\mu_{\tilde{D}_{ij}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_{ij}-x}{\alpha_{ij}}\right) & (x \leq m_{ij}) \\ R\left(\frac{x-m_{ij}}{\beta_{ij}}\right) & (x \geq m_{ij}) \end{cases}$$

ただし、 $\alpha_{ij}, \beta_{ij} > 0$ 、 L は $L(0) = 1$; $L: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ なる狭義減少関数とし、 R も同様の関数とする。したがって、 $\tilde{D}_{ij}$ のメンバシップ関数は m_{ij} において頂点をとる単峰型となる。また、 L - R ファジィ数の性質より、 $\tilde{D}_{ij}$ を $\tilde{D}_{ij} = (m_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})_{LR}$ で表現すれば、 $\tilde{D}_{ij}$ と $\tilde{D}_{jk} = (m_{jk}, \alpha_{jk}, \beta_{jk})_{LR}$ の拡張和 $\tilde{D}_{ij} \oplus \tilde{D}_{jk}$ は

$$\tilde{D}_{ij} \oplus \tilde{D}_{jk} = (m_{ij} + m_{jk}, \alpha_{ij} + \alpha_{jk}, \beta_{ij} + \beta_{jk})_{LR}$$

となる[2]。

本定式化の意図は、始点から終点までのすべての経路のうち、その距離がある値 B 以下となる可能性が最大となるものを選択することである。そのために、次のようなファジィ目標 G を設定する。

G : 「経路の距離はだいたい B 以下である。」

したがって、 G のメンバシップ関数として

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < B) \\ \frac{C-x}{C-B} & (B \leq x \leq C) \\ 0 & (x > C) \end{cases}$$

[†] A Model of Fuzzy Shortest Path by Possibility Measure

* Takeshi ITOH and Hiroaki ISHII

大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻

Department of Applied Physics, Faculty of Engineering,
Osaka University

なる区分的に線形な非増加関数($B \leq x \leq C$ では狭義減少関数)を考える(図1参照)。

経路の距離は、その経路を構成するアークの距離によって決定されるものとし、ファジィ距離の拡張和として定義する。このとき、ノード1からノード*i*への経路集合を P_i 、その要素 p に対する距離を $\tilde{D}(p)$ とし、次のような可能性測度最大化に基づく問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \Pi_{\tilde{D}(p)}(G) \\ & \text{subject to } p \in P_n \end{aligned}$$

ここで、 $\Pi_{\tilde{D}(p)}(G)$ はファジィ目標 G に対する可能性測度であり、

$$\Pi_{\tilde{D}(p)}(G) = \sup_x \min\{\mu_{\tilde{D}(p)}(x), \mu_G(x)\}$$

と定義される。 $\tilde{D}(p)$ のメンバシップ関数が単峰型であるので $\mu_G(x)$ の形状より、 $\Pi_{\tilde{D}(p)}(G)$ は下の図2のように、 $y = \mu_{\tilde{D}(p)}(x)$ の左斜面(型関数 L に対応する増加部分)と $y = \mu_G(x)$ との交点の y 座標値と解釈できる。ただし、以降、図中で用いる経路のメンバシップ関数は、簡単のため三角型で表現する。

すなわち、経路集合 P_n のうちファジィ目標 G の可能性測度を最大にする要素(経路) p を最適経路と見なす。

3. 解法

アークに設定されている距離は正の L - R ファジィ数であるから、非負である。したがって、ある経路にアークを追加すると、拡張和に対応する L - R ファジィ数のメンバシップ関数は加算前の各々のそれと比べて、中央値と左頂点(型関数 L に対応する部分の x 軸との交点)が必ず大きくなる。ゆえに、 $\mu_G(x)$ との交点に対応する可能性測度は減少あるいは変化しないかのどちらかとなるので(図3参照)、次の定理1は明らかである。

定理1

メンバシップ関数が非増加関数として表されるファジィ目標(事象) G について、

$$\Pi_{\tilde{D}(p)}(G) \geq \Pi_{\tilde{D}(p) \oplus \tilde{D}_{ij}}(G) \quad (p \in P_i)$$

である。ただし、 j はノード i に隣接するノードを示す。

定理1は次のように解釈することができる。

補題2

ある経路のファジィ目標 G に対する可能性測度は、そのいかなる部分経路よりも小さい。

図1 ファジィ目標 G のメンバシップ関数

図2 ファジィ目標 G に対する可能性測度

図3 アークの追加による可能性測度の変化

本研究では、解法アルゴリズムにおいて、**Dijkstra** のアルゴリズム[1]を利用する。すなわち、経路のファジィ目標に対する可能性測度を **Dijkstra** 法の距離に対応させ、 $\min$ の手続きを $\max$ に置き換える。補題2が成立するので、このような拡張の正当性が保証されるには、次のような命題が成り立つ必要がある。

命題3

あるノードに対する最適経路について、そのいかなる部分経路も、それ自身、最適経路である。

経路の距離は L - R ファジィ数となるので、以下の様に順序関係を定義すれば半順序となる[4]。

定義4

2つのファジィ数 $\tilde{A}, \tilde{B}$ の中央値 m_A, m_B について

$$1. \quad m_B \leq m_A$$

$$2. \quad \exists c \in [m_B, m_A]:$$

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), x < c$$

$$\mu_A(x) \geq \mu_B(x), x > c$$

が成立すれば、 $\tilde{A}$ は $\tilde{B}$ より大きく、

$$\tilde{B} \geq \tilde{A}$$

例えば、ノード i に対する最適経路 p_i^* と他の経路 p_i の各々にアーク a_{ij} を追加する場合で、 p_i^* と p_i に順序関係 $\succeq$ が存在しない図 4 のような状況を考える。この場合はアークを追加することにより経路の可能性測度の値について、大小が逆転している。

このように命題 3 が必ずしも成り立たないので、**Dijkstra 法** における距離に可能性測度を単純に対応させることはできない。このことを考慮し、**Dijkstra 法** の拡張アルゴリズムを構築するのに有効な定理を示す。

定理 5

L - R ファジィ数 $\tilde{A} = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$, $\tilde{B} = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ ($m_A < m_B$) について、各々のメンバシップ関数が互いの左斜面で交点をもつための必要十分条件は

$$m_B - \alpha_B L^*(0) < m_A - \alpha_A L^*(0)$$

ただし、 $L^*(0) = \inf\{x | L(x) = 0\}$ である。

証明

(十分性)

$$\begin{aligned} m_B - \alpha_B L^*(0) &< m_A - \alpha_A L^*(0) \\ \Leftrightarrow m_B - m_A &< L^*(0) (\alpha_B - \alpha_A) \end{aligned} \quad (1)$$

$m_B - m_A > 0, L^*(0) > 0$ より $\alpha_B > \alpha_A$ 。

$$L\left(\frac{m_A - x}{\alpha_A}\right) = L\left(\frac{m_B - x}{\alpha_B}\right)$$

を満足する x は

$$x_{AB} = \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B}$$

また、各々のメンバシップ関数の左頂点 x_A, x_B は

$$x_A = m_A - \alpha_A L^*(0), x_B = m_B - \alpha_B L^*(0)$$

となること、および

$$\begin{aligned} m_A - \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B} &= \frac{\alpha_A (m_A - m_B)}{\alpha_A - \alpha_B} > 0, \\ \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B} - (m_A - \alpha_A L^*(0)) &= \\ \frac{\alpha_A \{m_B - m_A + L^*(0) (\alpha_A - \alpha_B)\}}{\alpha_A - \alpha_B} &> 0 (\because (1)) \end{aligned} \quad (2)$$

から

$$\begin{aligned} \max(m_A - \alpha_A L^*(0), m_B - \alpha_B L^*(0)) \\ < \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B} < \min(m_A, m_B) \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち

$$\max(x_A, x_B) < x_{AB} < \min(m_A, m_B)$$

がいえるので、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ のメンバシップ関数は互いの左斜面に交点をもつ。

図4 測度に関する大小の逆転

(必要性)

逆に (2) が成り立つことから、 $\alpha_A < \alpha_B$ 。

$$m_B - \alpha_B L^*(0) < \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} (m_B - \alpha_B L^*(0)) (\alpha_A - \alpha_B) &> \alpha_A m_B - \alpha_B m_A \\ \Leftrightarrow m_B - \alpha_B L^*(0) &< m_A - \alpha_A L^*(0) \end{aligned}$$

□

また L - R ファジィ数の拡張和について、次のような性質が成り立つ。

定理 6

L - R ファジィ数 $\tilde{A} = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$, $\tilde{B} = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ ($\alpha_A \neq \alpha_B$) について、メンバシップ関数 $y = \mu_A(x)$, $y = \mu_B(x)$ の左斜面による交点の y 座標の値は、共通のものである限り、各々にいかなる L - R ファジィ数が加算されても変化しない。右斜面に関しても同様である ($\beta_A \neq \beta_B$)。

証明

$\tilde{C} = (m_C, \alpha_C, \beta_C)_{LR}$ との拡張和を考える。定理 5 の証明から、 $y = \mu_A(x)$, $y = \mu_B(x)$ 各々の左斜面による交点 (x_{AB}, y_{AB}) 、および $y = \mu_{A \oplus C}(x)$, $y = \mu_{B \oplus C}(x)$ 各々の左斜面による交点 (x_{ACBC}, y_{ACBC}) について

$$\begin{aligned} x_{AB} &= \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B} \\ x_{ACBC} &= \frac{(\alpha_A + \alpha_B)(m_B + m_C)}{(\alpha_A + \alpha_C) - (\alpha_B + \alpha_C)} \\ &\quad - \frac{(\alpha_B + \alpha_C)(m_A + m_C)}{(\alpha_A + \alpha_C) - (\alpha_B + \alpha_C)} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} y_{AB} &= L\left(\frac{m_A - x_{AB}}{\alpha_A}\right) = L\left(\frac{m_A - m_B}{\alpha_A - \alpha_B}\right) y_{ACBC} \\ &= L\left(\frac{m_A + m_C - x_{ACBC}}{\alpha_A + \alpha_C}\right) \\ &= L\left(\frac{m_A - m_B}{\alpha_A - \alpha_B}\right) \end{aligned}$$

となる。右斜面についても同様に示すことができる。

□

補題 7

L - R ファジィ数 $\tilde{A} = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$, $\tilde{B} = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ ($\alpha_A \neq \alpha_B$) について、メンバシップ関数 $y = \mu_A(x)$, $y = \mu_B(x)$ の左斜面による交点の x 座標の値は、各々に共通の正の L - R が加算されると正方向に増加する。

証明

正の L - R ファジィ数 $\tilde{C} = (m_C, \alpha_C, \beta_C)_{LR}$ との拡張和 $\tilde{A} \oplus \tilde{C}$, $\tilde{B} \oplus \tilde{C}$ を考える。各々の左斜面による交点が存在するので、定理 6 の証明より、

$$0 < L\left(\frac{m_A - m_B}{\alpha_A - \alpha_B}\right) < 1$$

つまり

$$\frac{m_A - m_B}{\alpha_A - \alpha_B} < L^*(0)$$

また、 $\tilde{C}$ の左頂点 $m_C - \alpha_C L^*(0)$ は正であるので、

$$\begin{aligned} x_{ACBC} - x_{AB} \\ = m_C - \frac{\alpha_C (m_A - m_B)}{\alpha_A - \alpha_B} > m_C - \alpha_C L^*(0) > 0 \end{aligned}$$

□

定理 6 および補題 7 より、前述した可能性測度の逆転現象が起こり得るのは、2 つの経路のメンバシップ関数がお互いの左斜面で交点をもち、その交点が $y = \mu_C(x)$ より下方に位置するときである。つまり、定理 5 の条件を満たし、

$$L\left(\frac{m_A - x_{AB}}{\alpha_A}\right) < \mu_C(x_{AB})$$

すなわち

$$\begin{aligned} L\left(\frac{m_A - m_B}{\alpha_A - \alpha_B}\right) \\ < \frac{C(\alpha_A - \alpha_B) - (\alpha_A m_B - \alpha_B m_A)}{(C - B)(\alpha_A - \alpha_B)} \end{aligned} \quad (3)$$

の場合である。また、一対の経路について、そのような逆転現象が起こるのは高々一回であることが分かる。したがって、ファジィ目標 G に対する可能性測度の値をテンポラリーラベルとして **Dijkstra** 法を拡張するには、パーマネントラベルを受けた直後のノード(カレントノード)に隣接するノードのテンポラリーラベルを変更する際に、始点からカレントノードまでの全経路のうち可能性測度の値が逆転する恐れのあるものを考慮する必要がある。しかし、そのような総当たりの探索を行うと計算効率が悪くなるため、更なる対象の絞り込みを行わなければならない。

例えば図 5 のような状況を考える。 C をカレントノ

図 5

ードとし、5 のテンポラリーラベルを更新する際、 C までの最適経路(4 を経由する太線)と比較した場合に、アーク a_{C5} を追加することにより可能性測度値が逆転する恐れのあることを考慮すべき経路は、性質上二通りに分かれる。すなわち、 C に隣接するノードのうち、パーマネントラベルをもつノード(図中二重丸)を終端とする経路(1 に到達する太線)、あるいはパーマネントラベルをもたないノードを終端とする経路(2, 3 を含む経路)各々に C までのアーク(a_{1C})を追加したものである。

後者については、仮にアーク a_{C5} を追加することで 5 までの最適経路になるとして、矛盾を導く。補題 2 より、その経路内の全ての部分経路はファジィ目標 G に対する可能性測度値がその経路より大きいはずであることに注意すると、その経路を最適経路として決定するために一番大きなテンポラリーラベルをもつノードを選択する際、5 以外のノード(例えば 2)が選ばれることとなり、矛盾が生じる。したがって、後者については考慮対象から除外できる。すなわち、前者のみを考慮対象とすればよいことが示された。

また、図 5 の状態から 2, 3 の順にパーマネントラベルが付加された場合を考える。このとき、上記の考え方の正当性を保つためには、3 までの最適経路にアーク a_{3C} を追加した経路と C までの最適経路のメンバシップ関数を比較し、可能性測度値の逆転が起こり得る場合は 5, 6 のテンポラリーラベルを更新する必要がある。

つまり、オリジナルの **Dijkstra** 法ではカレントノードに隣接するノードのうち、テンポラリーラベルをもつもののみを手続き対象としているが、本研究で取り扱う問題にアルゴリズムを拡張するにはパーマネントラベルをもつものについても考慮する必要がある。

以上のことから、われわれは次のようなアルゴリズムを提案する。アルゴリズム中で用いられている「+」は経路にアークが追加されることを意味する。

Algorithm

Step 0 テンポラリーラベル $l_i (i=1, 2, \dots, n)$ 等を以

下のように設定する。ただし、始点はすでにパーマネントラベル l_i^* を有するものとする。

$$l_i = \begin{cases} \Pi_{\bar{D}_i}(G) & (a_{1i} \in A) \\ -\infty & (a_{1i} \notin A) \end{cases}$$

$$S(i) = \{\text{ノード } i \text{ に隣接するノード}\}$$

$$Par(i) = \begin{cases} \{a_{1i}\} & (a_{1i} \in A) \\ \phi & (a_{1i} \notin A) \end{cases}$$

$$U = \phi$$

Step 1 $l_k = \max_i l_i$ なる k を選択する。

l_k をパーマネントラベル l_k^* とし、このときの始点からの経路を p_k^* とする。

終点 n にパーマネントラベル l_n^* があれば終了。

Step 2 p_k^* 上の k の隣接点を m とし、

$$Par(k) = Par(k) \cup \{p + a_{mk} | p \in Par(m)\}$$

Step 3 $i \in S(k) \setminus \{m, l^*\}$ をもたないノードについて

$$\overline{Par(k)} = \{p_k^* \text{ と定理 5 の条件を満たし, (3) 式を満足する } p \in H_1\}$$

$$Par(i) = Par(i) \cup \{p_i^* \text{ と定理 5 の条件を満たし, (3) 式を満足する } p \in H_2\}$$

とする。ただし、

$$H_1 = \{p_i^* + a_{ik}\} \cup \{p + a_{ik} | p \in Par(i)\}$$

$$H_2 = \{p_k^* + a_{ki}\} \cup \{p + a_{ki} | p \in Par(k)\}$$

である。これに伴い $Par(i)$ が変化した場合、ノード i を含む最適経路 t_i (p_i^* だけとは限らない) 上において

$$U = \{l^* \text{ をもつ始点以外のノード}\}$$

とし、 $j \in U$ について

$$Par(j) = Par(j) \cup \{p + \bar{a}_{ij} | p \in Par(i)\}$$

とする。ただし、 $\bar{a}_{ij}$ は t_i 上の i から j への部分経路である。

さらに、

$$Par(k) = Par(k) \cup \overline{Par(k)}$$

Step 4 $i \in U$ について、 $j \in S(i) \setminus \{l^* \text{ をもつノード}\}$ に対して

$$l_j = \max(l_j, \max_{p \in Par(i)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_j}(G))$$

$i \in S(k) \setminus \{l^* \text{ をもつノード}\}$ について

$$l_i = \max(l_i, \Pi_{\bar{D}(p_k^*) \oplus \bar{D}_i}(G)),$$

$$\max_{p \in Par(k)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_i}(G))$$

とし、**Step 1** へ。

このアルゴリズムの正当性については上述の議論より明らかである。ただし、本研究における設定では命題 3 が必ずしも成り立たないため、**Step 1** でパーマネントラベルを付加するノードとそのノードに対する最適経路を選択する際、直前のカレントノードに対する最適経路を拡張したものが選ばれるとは限らない。つまり、 l_i にその値がどの経路に基づくものであるかという情報を付加しておかなければ、選択したパーマネントラベルに対応する最適経路が、如何なるノードを経由しているものなのかを特定することができない。そのため、実際にプログラミングを行う際には、**Step 4** における $l_i(l_j)$ の更新に寄与した経路を、 l_i と対応させて記憶しておくような工夫が必要である。また、定理 6、補題 7 から得られる性質、可能性測度の大小が一回逆転すればそれ以後その経路の対は逆転を起こさないということから、計算効率を幾分改善する方法として、**Step 1** において選択された l_k が **Step 4** で $Par(\cdot)$ に属する経路を基に更新されたものであれば、**Step 2** での $Par(k)$ の更新前に $Par(m)$ からその経路を取り除いておくことが考えられる。

4. 数値例

図 6 に示すネットワークについて考える。図中、各アークに付した数値は対応する L - R ファジィ数の (m, α) であり、簡単のため関数 $L(x)$ は線形関数

$$L(x) = -x + 1$$

とする。また、ファジィ目標 G については、そのメンバーシップ関数を

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 4) \\ \frac{14-x}{10} & (4 \leq x \leq 14) \\ 0 & (x > 14) \end{cases}$$

とする。

図6

Step 0

$$l_2=1, l_3=0.907, l_4=\dots=l_9=-\infty$$

$$Par(2)=\{a_{12}\}, Par(3)=\{a_{13}\}$$

$$Par(1)=Par(4)=\dots=Par(9)=\phi$$

とし、 $S(i)$ については例えば、 $S(5)=\{2,3,7,8\}$ のように図から明らかであるので省略する。

Step 1 $\max(l_2, \dots, l_9)=l_2$ より、 l_2 を l_2^* 、 $p_2^*=a_{12}$ とする。

Step 2 $k=2$ の p_2^* 上の隣接点は $m=1$ で、 $Par(1)=\phi$ なので $Par(2)$ の更新は行わない。

Step 3 $S(2)\setminus\{1,4,5\}=\phi$ なので、そのまま、次ステップへ。

Step 4 $U=\phi, S(2)\setminus\{1\}=\{4,5\}, Par(2)=\{a_{12}\}$ より

$$l_4=\max(l_4, \Pi_{\bar{D}(p_2^*) \oplus \bar{D}_{24}}(G)),$$

$$\max_{p \in Par(2)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{24}}(G))$$

$$=\max(-\infty, 0.845, 0.845)=0.845$$

$$l_5=\max(l_5, \Pi_{\bar{D}(p_2^*) \oplus \bar{D}_{25}}(G)),$$

$$\max_{p \in Par(2)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{25}}(G))$$

$$=\max(-\infty, 0.752, 0.752)=0.752$$

Step 1 $\max(l_3, \dots, l_9)=l_3$ より、 l_3 を l_3^* 、 $p_3^*=a_{13}$ とする。

Step 2 $k=3$ の p_3^* 上の隣接点は $m=1$ で、 $Par(1)=\phi$ なので $Par(2)$ の更新は行わない。

Step 3 $S(3)\setminus\{1,5,6\}=\phi$ なので、そのまま、次ステップへ。

Step 4 $U=\phi, S(3)\setminus\{1\}=\{5,6\}, Par(3)=\{a_{13}\}$ より

$$l_5=\max(l_5, \Pi_{\bar{D}(p_3^*) \oplus \bar{D}_{35}}(G)),$$

$$\max_{p \in Par(3)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{35}}(G))$$

$$=\max(0.752, 0.750, 0.750)=0.752$$

$$l_6=\max(l_6, \Pi_{\bar{D}(p_3^*) \oplus \bar{D}_{36}}(G)),$$

$$\max_{p \in Par(3)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{36}}(G))$$

$$=\max(-\infty, 0.664, 0.664)=0.664$$

Step 1 $\max(l_4, \dots, l_9)=l_4$ より、 l_4 を l_4^* 、 $p_4^*=p_2^*+a_{24}$ とする。

Step 2 $k=4$ の p_4^* 上の隣接点は $m=2$ で、 $Par(2)=\{a_{12}\}$ なので

$$Par(4)=\phi \cup \{a_{12}+a_{24}\}=\{a_{12}+a_{24}\}$$

Step 3 $S(4)\setminus\{2,7\}=\phi$ なので、そのまま、次ステップへ。

Step 4 $U=\phi, S(4)\setminus\{2\}=\{7\}, Par(4)=\{a_{12}+a_{24}\}$ より

$$l_7=\max(l_7, \Pi_{\bar{D}(p_4^*) \oplus \bar{D}_{47}}(G)),$$

$$\max_{p \in Par(4)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{47}}(G))$$

$$=\max(-\infty, 0.712, 0.712)=0.712$$

Step 1 $\max(l_5, \dots, l_9)=l_5$ より、 l_5 を l_5^* 、 $p_5^*=p_2^*+a_{25}$ とする。

Step 2 $k=5$ の p_5^* 上の隣接点は $m=2$ で、 $Par(2)=\{a_{12}\}$ なので

$$Par(5)=\phi \cup \{a_{12}+a_{25}\}=\{a_{12}+a_{25}\}$$

Step 3 $S(5)\setminus\{2,7,8\}=\{3\}$ である。 $H_1=\{p_3^*+a_{35}\}$ であるが、 $p_3^*+a_{35}(\in H_1)$ と p_5^* の中央値は両方とも7であり、 p_5^* とともに定理5の条件を満たす $p \in H_1$ が存在しないので、 $\overline{Par(5)}=\phi$ 。また、 $H_2=\{p_5^*+a_{53}\}$ であるが、 $p_5^*+a_{53}(\in H_2)$ と p_3^* の(中央値, 左頂点)はそれぞれ(9, 5.7), (5, 4.2)であり、 p_3^* とともに定理5の条件を満たす $p \in H_2$ が存在しないので、 $Par(3)$ は変化なし。したがって、 U および $Par(5)$ は変化なし。

Step 4 $U=\phi, S(5)\setminus\{2,3\}=\{7,8\}, Par(5)=\{a_{12}+a_{25}\}$ より

$$l_7=\max(l_7, \Pi_{\bar{D}(p_5^*) \oplus \bar{D}_{57}}(G)),$$

$$\max_{p \in Par(5)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{57}}(G))$$

$$=\max(0.712, 0.524, 0.524)=0.712$$

$$l_8=\max(l_8, \Pi_{\bar{D}(p_5^*) \oplus \bar{D}_{58}}(G)),$$

$$\max_{p \in Par(5)} \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{58}}(G))$$

$$=\max(-\infty, 0.618, 0.618)=0.618$$

Step 1 $\max(l_6, \dots, l_9)=l_7$ より、 l_7 を l_7^* 、 $p_7^*=p_4^*+a_{47}$ とする。

Step 2 $k=7$ の p_7^* 上の隣接点は $m=4$ で、 $Par(4)=\{a_{12}+a_{24}\}$ なので $Par(7)=\phi \cup \{a_{12}+a_{24}+a_{47}\}=\{a_{12}+a_{24}+a_{47}\}$

Step 3 $S(7)\setminus\{4,9\}=\{5\}$ である。 $H_1=\{p_5^*+a_{57}\}$ であるが、 $p_5^*+a_{57}(\in H_1)$ と p_7^* の(中央値, 左頂点)はそれぞれ(10, 7.4), (8, 3.9)であり、 p_7^* とともに定理5の条件を満たす $p \in H_1$ が存在しないので、 $\overline{Par(7)}=\phi$ 。また、 $H_2=\{p_7^*+a_{75}\}$ であるが、 $p_7^*+a_{75}(\in H_2)$ と p_5^* の(中央値, 左頂点)はそれぞれ(11, 5.6), (7, 4.9)であり、 p_5^* とともに定理5の条件を満たす $p \in H_2$ が存在しないので、 $Par(5)$ は変化なし。したがって、 U および $Par(7)$ は変化なし。

Step 4 $U = \phi, S(7) \setminus \{4, 5\} = \{9\}, Par(7) = \{a_{12} + a_{24} + a_{47}\}$ より

$$l_9 = \max(l_9, \Pi_{\tilde{D}(p_7^*) \oplus \tilde{D}_{79}}(G),$$

$$\begin{aligned} & \max_{p \in Par(7)} \Pi_{\tilde{D}(p) \oplus \tilde{D}_{79}}(G) \\ & = \max(-\infty, 0.545, 0.545) = 0.545 \end{aligned}$$

Step 1 $\max(l_6, l_8, l_9) = l_6$ より、 l_6 を $l_6^*, p_6^* = p_3^* + a_{36}$ とする。

Step 2 $k=6$ の p_6^* 上の隣接点は $m=3$ で、 $Par(3) = \{a_{13}\}$ なので

$$Par(6) = \phi \cup \{a_{13} + a_{36}\} = \{a_{13} + a_{36}\}$$

Step 3 $S(6) \setminus \{3, 8\} = \phi$ なので、そのまま、次ステップへ。

Step 4 $U = \phi, S(6) \setminus \{3\} = \{8\}, Par(6) = \{a_{13} + a_{36}\}$ より

$$l_8 = \max(l_8, \Pi_{\tilde{D}(p_6^*) \oplus \tilde{D}_{68}}(G),$$

$$\begin{aligned} & \max_{p \in Par(6)} \Pi_{\tilde{D}(p) \oplus \tilde{D}_{68}}(G) \\ & = \max(0.618, 0.613, 0.613) = 0.618 \end{aligned}$$

Step 1 $\max(l_8, l_9) = l_8$ より、 l_8 を $l_8^*, p_8^* = p_5^* + a_{58}$ とする。

Step 2 $k=8$ の p_8^* 上の隣接点は $m=5$ で、 $Par(5) = \{a_{12} + a_{25}\}$ なので

$$\begin{aligned} Par(8) &= \phi \cup \{a_{12} + a_{25} + a_{58}\} \\ &= \{a_{12} + a_{25} + a_{58}\} \end{aligned}$$

Step 3 $S(8) \setminus \{5, 9\} = \{6\}, H_1 = \{p_6^* + a_{68}\}, H_2 = \{p_8^* + a_{86}\}$ である。 $p_6^* + a_{68} (\in H_1)$ と p_8^* の(中央値, 左頂点)はそれぞれ $(10, 4.5), (9, 5.9)$ であり、これらは定理 5 の条件を満たし、(3)式が

$$L\left(\frac{1}{2.4}\right) < \frac{14 \cdot 2.4 - (5.5 \cdot 9 - 3.1 \cdot 10)}{10 \cdot 2.4}$$

として成立するので、

$$\overline{Par(8)} = \{a_{13} + a_{36} + a_{68}\}$$

となる。また、 $p_8^* + a_{86}$ と p_6^* の(中央値, 左頂点)はそれぞれ $(11, 4.2), (8, 6.2)$ であり、これらも定理 5 の条件を満たし、(3)式が

$$L\left(\frac{2}{5}\right) < \frac{14 \cdot 5 - (6.8 \cdot 8 - 1.8 \cdot 11)}{10 \cdot 5}$$

として成立するので、

$$Par(6) = \{a_{13} + a_{36}, a_{12} + a_{25} + a_{58} + a_{86}\}$$

となる。ノード 6 は最適経路 $a_{13} + a_{36}$ 上にあるので

$$Par(3) = \{a_{13}, a_{12} + a_{25} + a_{58} + a_{86} + a_{63}\}$$

とし、 $U = \{3\}$ 、さらに

$$Par(8) = \{a_{12} + a_{25} + a_{58}, a_{13} + a_{36} + a_{68}\}$$

とする。

Step 4 $U = \phi$ であるが、 $S(3) \setminus \{1, 5, 6\} = \phi$ なので $i \in S(8) \setminus \{5, 6\} = \{9\}$ についてのみ手続きを行う。

$$Par(8) = \{a_{12} + a_{25} + a_{58}, a_{13} + a_{36} + a_{68}\} \text{ より}$$

$$l_9 = \max(l_9, \Pi_{\tilde{D}(p_8^*) \oplus \tilde{D}_{89}}(G),$$

$$\begin{aligned} & \max_{p \in Par(8)} \Pi_{\tilde{D}(p) \oplus \tilde{D}_{89}}(G) \\ & = \max(0.545, 0.546, 0.552) = 0.552 \end{aligned}$$

Step 1 l_9 を $l_9^*, p_9^* = p_8^* + a_{89}$ とし、終了。

以上より、得られた始点終点間の最適経路は $p_9^* = a_{13} + a_{36} + a_{68} + a_{89}$ で、この経路の可能性測度は 0.552 である。

5. おわりに

本研究では、アークの距離がファジィ数として設定されているネットワークに対して、可能性測度を利用することで意思決定者が選択すべき最適経路の導出法を提案した。ファジィ要素を取り扱った場合に生じる問題として「あいまいさの爆発」があるが、本モデルにおいてもファジィ数の拡張和を利用しているため、例外ではない。しかし、あいまいなデータにあいまいなデータを合成した場合、データのファジィ性が減少しないことは明らかであり、この種の問題はファジィの分野における永遠の課題であると我々は考える。本研究の目的は 2 点間の距離が「ある値以下」である可能性が最大となる経路を客観的に選択することであり、「あいまいさの爆発」に可能性測度の値が影響を受けても、機械的に最大のものを選択することは本来の意図からすれば何ら問題がないと考える。また、本研究においては正のファジィ数を対象にしているため、拡張和を繰り返すことにより「あいまいさ」が大きくなって可能性測度の値は徐々に小さくなってゆく。しかしながら、「あいまいさの爆発」が生じれば、的確な意思決定を行う判断基準が存在しないことになるので、何らかの客観的な基準が必要になる。つまり、「あいまいさの爆発」の影響を受けた測度の値も、客観的、数理的に処理することで、客観的判断基準のない状況下の意思決定者に一つの選択肢を提供することができる。このような目標に基づき本モデルを一方法として提案したが、アルゴリズムについては以下の 2 つの問題がある。

一つはアルゴリズムの実行時間が大きくなる恐れがあるということである。その原因としてはファジィ目標およびそのメンバシップ関数の状態が考えられる。今回、メンバシップ関数の同定を主題としておらず、

始点、終点間に対する意思決定者の要求する基準により、本研究では適当なメンバシップ関数が割り当てられていることを前提としている。しかし、このことが計算時間に影響するので、吟味しておく必要がある。

本研究では1種類だけのファジィ目標しか設定していないので、計算過程において経路を構成するアークの数が少ない段階では、その可能性測度の値が1となる経路が複数現れ、計算時間を増大させる恐れがある。適当な B の設定にもかかわらず最終的に測度の値が1となる経路が得られても、それは意思決定者の要求する基準を十分に満足しているということで、採用できるものである。一方、アルゴリズムの途中で測度の値が一度0になれば、最後までその値は0のままである。したがって、 C の値に関しては解の導出に大きく影響してくるが、この値は意思決定者の経路に対する上限距離に相当するので、そのような場合は意思決定者の要求に見合う解が存在しないと解釈できる。つまり、ファジィ目標で言及されている値 B, C の設定により、計算時間や問題のもつ意味が大きく左右されることになる。数値例で用いたメンバシップ関数は B を4、 C を14としているが、この場合の意思決定者の要求としては、例えば「始点終点間の距離をできるだけ短く、悪くても14までに抑えたい。」のようなものが考えられる。このような要求をファジィ目標に反映させるため B を4と決定することは、論理的には妥当でないかもしれないが、数理的には都合が良い。すなわち、可能性測度は距離のメンバシップ関数の左斜面が関係するため、始点に接続するアーク間で最も小さい中央値を B とすることで上記のような状況を避けることができる。

もう一つの問題はアルゴリズムが複雑になっていることである。解法アルゴリズムは経路に対応するファジィ数間で特定の大小関係が成立しない場合には解の候補として残しておき、最終的にそれらの中からファジィ目標に対する可能性測度の値が最大となるものを選んでいくが、このような手続きは結果的に一部の非劣解の集合から、可能性測度を重みとして最適解を選択しているとも解釈できる。そのための手続き、および計算手間の削減によりアルゴリズムが複雑なものになっている。

今後の課題としては、上で述べたアルゴリズムの複雑性を改善することが挙げられる。そのためには、経路にアークを追加して測度の大きさが逆転した場合でも、経路間の関係が保存される順序関係を見だし、命題3の成立を常に保証する最適化基準を探る必要がある。あるいは、本研究ではDijkstra法の拡張を試みているが、可能性測度の適用性に優れた他のアルゴリズムの利用を検討することも考えられる。

最後に、本研究は文部省科学研究費一般C 07680462によるものであることを付記しておく。

参 考 文 献

- [1] E.W.Dijkstra, "A note on two problem in connection with graphs", Numerische Mathematik 1, pp. 269-271 (1959).
- [2] D.Dubois H.Prade, "Fuzzy sets and systems", Academic Press, New York (1980).
- [3] C.M.Klein, "Fuzzy shortest paths", Fuzzy Sets and Systems 39, pp.27-41 (1991).
- [4] 中島, 竹田, 石井, "ファジィ理論入門", 裳華房 (1994).
- [5] 井田, 玄, "ファジィ係数を伴う二目的最短経路問題の一解法", 日本ファジィ学会誌 7, pp. 142-152 (1995).
- [6] T.Itoh H.Ishii, "An approach to the fuzzy spanning tree problem by maximizing the possibility measure", Proceedings of APORS'94, July 26-29 1994, Fukuoka, pp.523-530 (1995).
- [7] 伊藤, 石井, "必然性測度に基づくファジィスパニングツリー問題の一解法", 日本OR学会論文誌 39, pp.247-257 (1996).

(1996年2月29日 受 付)

(1996年7月16日 再 受 付)

(1996年9月17日 再々受付)

[問い合わせ先]

〒565 吹田市山田丘2-1

大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻

伊藤 健

TEL : 06-879-7870

FAX : 06-878-1385

E-mail : takeshi@ap.eng.osaka-u.ac.jp

著者紹介

伊藤 健 (いとう たけし)

大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻

1992年、大阪教育大学教育学部教養学科卒業。同年、岡山大学大学院工学研究科修士課程情報工学専攻に入学、1994年、修了。同年、大阪大学大学院工学研究科博士後期課程応用物理学専攻に入学し、現在に至る。ファジィ数理計画に興味をもち、ファジィ組合せ最適化の研究に従事。日本ファジィ学会、日本OR学会、システム制御情報学会、日本数理科学協会会員。

石井 博昭 (いしい ひろあき)

大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻

1976年、京都大学大学院工学研究科数理工学専攻修了。同年、大阪大学工学部助手、1984年、同助教授となる。岡山大学工学部教授を経て、1993年、大阪大学工学部教授となり、1995年、現職となる。数理計画法、特に組合せ最適化、確率計画法、ファジィ理論、スケジューリング理論などの研究に従事。日本ファジィ学会、日本OR学会、数学会、国際数理計画法学会、電子情報通信学会、IFSA各会員。工学博士。

A Model of Fuzzy Shortest Path by Possibility Measure

by

Takeshi ITOH and Hiroaki ISHII

Abstract :

For shortest path problems, the distances associated with networks are assumed to be constant. But, in the real world, such case is rare. This paper formulates the problem in which such distances are L-R fuzzy numbers. The aim is to find the path which the corresponding possibility that its distance is larger than a certain threshold is maximum. That is, we introduce a fuzzy goal, and attempt to maximize the possibility measure, which is a kind of fuzzy measure. Further, we propose an efficient algorithm solving the problem by extending {bf Dijkstra}'s algorithm.

Keywords : Shortest Path Problem, L-R Fuzzy Number, Fuzzy goal, Possibility Measure, Dijkstra's Algorithm

Contact Address : **Takeshi ITOH**

Department of Applied Physics, Faculty of Engineering, Osaka University

2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka 565, Japan

TEL : 06-879-7870

FAX : 06-878-1385

E-mail : takeshi@ap.eng.osaka-u.ac.jp