論文

中心をもつクリーネ代数とドモルガン代数†

張 昆竜*¹ 廣田 薫*² 中川 友紀子*²

クリーネのファジィ論理はクリーネ代数で表現され、クリーネ代数を一般化したものがドモルガン代数である。本論文では、クリーネ代数、ドモルガン代数が中心をもつための必要十分条件と分配束がクリーネ代数、ドモルガン代数になるための条件を考察する。また、中心をもつクリーネ代数とドモルガン代数の構造について述べる。

キーワード：ファジィ論理、クリーネ代数、ドモルガン代数、中心

1. はじめに

本論文は、森岡による結果[1]を一般化し、それについて一般的かつより簡単な証明を与える。また、中心をもつクリーネ代数とドモルガン代数の構造について述べる。

[1]では、完備クリーネ代数と完備ドモルガン代数が中心をもつための必要十分条件が示されている。しかし、そこで用いられた方法ではクリーネ代数とドモルガン代数が完備でない場合はそのままでは証明できない。また、任意のクリーネ代数とドモルガン代数は考察されていないなど、いくつか不満足な点がある。ここでは、代数的な手法を用いて、[1]の結果を拡張した一般的な定理及びそれについての簡単な証明を与える。

[1]に従ってクリーネ代数とドモルガン代数を定義する。代数系 $L = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ がクリーネ代数であるとは、次の(1), (2)を満たすものと定義する。

(1) L は最小元 0 と最大元 1 をもつ分配束；

(2) 写像 $N : L \rightarrow L$ は次の条件を満たす：

任意の $x, y \in L$ に対して

(A0) $N0 = 1$ かつ $N1 = 0$ ；

(A1) $x \leq y$ ならば $Ny \leq Nx$ ；

(A2) $x = N(Nx)$ ；

(A3) $x \wedge Nx \leq y \vee Ny$

注意

(1) 写像 $N : L \rightarrow L$ が全単射であることは公理(A2)から明かである。

(2) N についてドモルガン律が成立する。すなわち、 $N(x \vee y) = Nx \wedge Ny, N(x \wedge y) = Nx \vee Ny$ が成立する。

(3) (A3) から次の性質が得られる：

(A4) $x \wedge y = 0$ ならば $y \leq Nx$ 。

ところで、 $c = Nc$ をみたす要素 c はクリーネ代数の中心と呼ばれる。ドモルガン代数とはクリーネ代数の定義から公理(A3) (クリーネ律)を取り去ったものである。

本論文は、クリーネ代数、ドモルガン代数の数学的構造を調べることを目的としている。第2章においては、クリーネ代数、ドモルガン代数が中心をもつための必要十分条件について考察する。第3章においては、分配束がクリーネ代数になるための条件について考察する。第4章においては、クリーネ代数の構造について考察する。第5章においては、ドモルガン代数の構造については考察する。

2. クリーネ代数、ドモルガン代数が中心をもつための必要十分条件について

[1]では、中心をもつクリーネ代数 L においては、中心の一意性やただ一つの中心をもつ完備ドモルガン代数は完備クリーネ代数であるなどが示されているが、必ずしも代数系の完備性でなくともよい。ここでは、まず、代数的な手法を用いてその結果を拡張した一般的な定理及びそれについての簡単な証明を与える。そのためには、いくつか記号と補助定理を必要とする。

ドモルガン代数 L の部分集合 $W^t, W^{\bar{t}}, W^{\perp}$ を次のように定義する。([1]による)

(1) $W^{\bar{t}} = \{x \in L \mid Nx \leq x\}$

(2) $W^t = \{x \in L \mid Nx \geq x\}$

(3) $W^{\perp} = \{x \in L \mid Nx \parallel x\}$

($a \parallel b$ は a と b のあいだに順序関係が存在しないことを意味する)。

半順序集合 $(P, \leq)$ の部分集合 $m(P), M(P)$ を次の

† On the Kleene Algebra and De Morgan Algebra with Centers
ZHANG KUN-LUN, Kaoru HIROTA and Yukiko NAKAGAWA

*¹ 内蒙古大学

Department of Mathematics, Univ. of Inner Mongolia

*² 東京工業大学大学院総合理工学研究科 知能システム科学専攻

Interdisciplinary Graduate School of Tokyo Institute of Technology

ように定義する。

$$(1) m(P) = \{a \in P \mid x \leq a \text{ かつ } x \in P \text{ ならば } x = a\}$$

$$(2) M(P) = \{a \in P \mid x \geq a \text{ かつ } x \in P \text{ ならば } x = a\}$$

補理2.1 ただ一つの中心 c をもつドモルガン代数 L において

$$x \wedge Nx \leq c \leq x \vee Nx (\forall x \in L)$$

が成立する。

証明

$$\begin{aligned} & N((x \wedge Nx) \vee (c \wedge (x \vee Nx))) \\ &= (Nx \vee x) \wedge N(c \wedge (x \vee Nx)) \\ &= (Nx \vee x) \wedge (c \vee (Nx \wedge x)) \\ &= ((Nx \vee x) \wedge c) \vee ((Nx \vee x) \wedge (Nx \wedge x)) \text{ (分配律により)} \end{aligned}$$

$$= ((Nx \vee x) \wedge c) \vee (Nx \wedge x)$$

$$= (x \wedge Nx) \vee (c \wedge (x \vee Nx))$$

である。中心 c の一意性により、

$$(x \wedge Nx) \vee (c \wedge (x \vee Nx)) = c$$

を得る。分配律により、

$$(x \vee Nx) \wedge (c \vee (x \wedge Nx)) = c$$

も成立する。 $c = (x \wedge Nx) \vee (c \wedge (x \vee Nx)) \equiv \text{Sup}\{x \wedge Nx, c \wedge (x \vee Nx)\}$ は $x \wedge Nx$ と $c \wedge (x \vee Nx)$ の最小上界だから、 $x \wedge Nx \leq c \leq x \vee Nx$ が成立する。

定理2.1 中心をもつドモルガン代数 L において以下のことは同値である。

- (1) 中心はただ一つ c ;
- (2) L はクリーネ代数である。

証明

- (1) $\Rightarrow$ (2) 任意の $x, y \in L$ に対して、補助定理2.1により

$$x \wedge Nx \leq c; c \leq y \vee Ny$$

が成立する。よって、 $x \wedge Nx \leq y \vee Ny$ を得る。したがって、 L はクリーネ代数である。

$$(2) \Rightarrow (1) \text{ 明らか。}$$

証明終

本定理は森岡[1]の注意4.3を利用することにより別の方法で証明することができる。

定理2.2 中心をもつクリーネ代数 L において

- (1) $m(W_L)$, $M(W_L)$ は空ではない、
- (2) $m(W_L) = M(W_L)$

が成立する。

証明

L は中心をもつ、 $c \in L$ 中心とすると、 $c \in W_L$ かつ $c \in W_L$ である。任意の $x \in W_L$ に対して、(A3)により、 $c = c \wedge Nc \leq x \vee Nx = x$, ($x \in W_L \Rightarrow Nx \leq x$) を得る。

よって、 $m(W_L) = \{c\} \neq \emptyset$ が成立する。同様に、 $M(W_L) = \{c\} \neq \emptyset$ も明らか。したがって、 $m(W_L) = M(W_L)$ が成立する。

証明終

定理2.3 ドモルガン代数 L において

$$m(W_L) \neq \emptyset \iff M(W_L) \neq \emptyset$$

が成立する。

証明

($\Rightarrow$) $m(W_L) \neq \emptyset$ ならば $\exists c \in m(W_L)$ である。 $m(W_L)$ の定義により、任意の $x \in W_L$ に対して、 $x \leq c \Rightarrow x = c$ が成立する。したがって、 $Nx \geq Nc \Rightarrow Nx = Nc$ を得る。 W_L の定義により、 $Nx \leq x$ が成立する。この両辺に N し、 $N(Nx) \geq Nx$ を得る。また、 W_L の定義により、 $Nx \in W_L$ を得る。すなわち、

$$\{Nx \mid x \in W_L\} \subseteq W_L$$

が成立する。

同様に、 $\{Nx \mid x \in W_L\} \subseteq W_L$ も得る。 $N(Nx) = x$ により

$$W_L = \{Nx \mid x \in W_L\}; W_L = \{Nx \mid x \in W_L\}$$

が成立する。

任意の $Nx \in W_L$, ($x \in W_L$) に対して、 $Nc \geq Nx$ が成立することにより、 $Nc \in M(W_L)$ を得る。すなわち、 $M(W_L) \neq \emptyset$ 。

$$(\Leftarrow) \text{ 明らか。 (これは } (\Rightarrow) \text{ の証明と同様である。)}$$

証明終

定理2.4 ドモルガン代数 L において、 $(L, \wedge, \vee, N, 0, 1)$ は完備であれば

$$m(W_L) \neq \emptyset$$

が成立する。

証明

$(L, \wedge, \vee, N, 0, 1)$ は完備束であるから、任意の部分集合 $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq L$ に対して、明らかに

$$N(\bigwedge_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} Nx_i; N(\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigwedge_{i \in I} Nx_i$$

が成立する。

任意の連鎖 $K = \{a_t \mid t \in T\} \subseteq W_L$ に対して、 $\bigwedge_{t \in T} a_t$ が存在し、 a で表す。

任意の $a_i, a_j \in K$ に対して、 W_L の定義により、 $Na_i \leq a_i, Na_j \leq a_j$ が成立する。明らかに、

- (1) $a_j \leq a_i$ のとき、 $Na_j \leq a_j \leq a_i$ が成立する;
- (2) $a_i \leq a_j$ のとき、 $Na_j \leq Na_i \leq a_i$ が成立する;

よって、 $Na_j \leq a_i, (\forall i, j \in T)$ を得る。したがって、

$$a_i \geq \bigvee_{j \in T} Na_j = N(\bigwedge_{j \in T} a_j) = Na, (\forall i \in T)$$

を得る。よって、

$$Na \leq \bigwedge_{i \in T} a_i = a$$

が成立する、すなわち、 $a \in W_L$ である。

故に、 W_L において、 K が下界 a を持つ。ツォルン (Zorn) の補理により、 W_L は極小元を持つ。すなわち、

$$m(W_L) \neq \emptyset$$

が成立する。

証明終

定理2.3により、次の系も成立する

系2.1 ドモルガン代数 L において、 $(L, \wedge, \vee, N, 0, 1)$ は完備であれば

$$M(W_L) \neq \emptyset$$

が成立する。

証明 省略する。

定義 K は束 L の部分集合とする、以下の条件(1), (2)を満たす減少(増加)連鎖 $M \subseteq K$ が存在すれば K は減少(増加)連鎖条件を満たすという

- (1) M は L の中に最小元 $\wedge M$ (最大元 $\vee M$) が存在する、
- (2) $\wedge M > c (\vee M < c)$ とすれば、 $c \in K$

実は、定理2.4の証明の中に、 $(L, \wedge, \vee, N, 0, 1)$ の完備ではなく、 W_L の減少連鎖条件しか使わないから、次の定理が成立する。

定理2.5 ドモルガン代数 L において、次の条件が同値である

- (1) $m(W_L) \neq \emptyset$;
- (2) W_L が減少連鎖条件を満足する;
- (3) $M(W_L) \neq \emptyset$;
- (4) W_L が増加連鎖条件を満足する。

が成立する。

証明 省略する。

定理2.6 クリーネ代数 L が中心をもつための必要十分条件は

$$m(W_L) \cap M(W_L) \neq \emptyset$$

である。

証明 $(\Rightarrow)$ 定理2.2による。

$(\Leftarrow)$ $m(W_L) \cap M(W_L) \neq \emptyset$ ならば $\exists e \in m(W_L) \subseteq W_L$ かつ $e \in M(W_L) \subseteq W_L$ である。 W_L, W_L の定義により

$$Ne \leq e \text{ かつ } Ne \geq e$$

が成立する。よって、 $Ne = e$ は中心である。 証明終

定理2.7 ドモルガン代数 L が中心をもつための必要十分条件は

$$m(W_L) \cap M(W_L) \neq \emptyset$$

である。

証明 $(\Rightarrow)$ L は中心 c をもつので、 $c \in W_L$ かつ $c \in W_L$ である。次に、 $c \in m(W_L)$ であることを示す。任意の $x \in W_L$ に対して、 W_L の定義により

$$Nx \leq x$$

が成立する。また、 $x \in W_L$ と (A1) により、

$$x \leq c = Nc \leq Nx$$

を得る。したがって、 $x \leq c \leq Nx \leq x$ よって、 $x = c$ すなわち $c \in m(W_L)$ は明らか。同様に、 $c \in M(W_L)$ も得る。したがって

$$m(W_L) \cap M(W_L) \neq \emptyset$$

が成立する。

$(\Leftarrow)$ の証明は定理2.6の証明とまったく同じなので省略する。 証明終

定理2.8 ドモルガン代数 L において、 $m(W_L) \neq \emptyset$ ならば 以下のことは同値である

- (1) $|m(W_L)| = 1$;
- (2) L はクリーネ代数である。

証明

(1) $\Rightarrow$ (2) $|m(W_L)| = 1$ であるから $\exists c \in L$ s.t. $m(W_L) = \{c\}$ が成立する。定理2.3及びその証明により $M(W_L) = \{Nc\}$ を得る。

任意の $x, y \in L$ に対して

$$\begin{aligned} & N((x \vee Nx) \wedge (c \vee (x \wedge Nx))) \\ &= (Nx \wedge x) \vee (Nc \wedge (Nx \vee x)) \\ &= ((Nx \wedge x) \vee Nc) \wedge ((Nx \wedge x) \vee (Nx \vee x)); \text{ (分配律により)} \\ &= (x \vee Nx) \wedge ((Nx \wedge x) \vee Nc) \\ &\leq (x \vee Nx) \wedge (c \vee (x \wedge Nx)), (c \in W_L) \end{aligned}$$

が成立する。 W_L の定義により

$$(x \vee Nx) \wedge (c \vee (x \wedge Nx)) \in W_L$$

を得る。また、 c は W_L のただ一つの極小元であるから $(x \vee Nx) \wedge (c \vee (x \wedge Nx)) \geq c$ を得る。したがって

$$x \vee Nx \geq c$$

を得る。同様に $y \vee Ny \geq c$ も成立し、(A1) により

$$y \wedge Ny \leq Nc$$

を得る。 $Nc \leq c$ であるから

$$y \wedge Ny \leq Nc \leq c \leq x \vee Nx$$

が成立する。よって、 L はクリーネ代数である。

(2) $\Rightarrow$ (1) L はクリーネ代数であるから、 $a, b \in m(W_L)$ ならば $Na, Nb \in M(W_L)$ である。(1) $\Rightarrow$ (2) の証明により $a \wedge (b \vee Na) \in W_L$ かつ $b \wedge (a \vee Nb) \in W_L$ が得る。よって、

$$a \geq a \wedge (b \vee Na) \in W_L \text{ かつ} \\ b \geq b \wedge (a \vee Nb) \in W_L$$

が成立する。 L はクリーネ代数であるから

$$Na = N \wedge a \leq Nb \vee b = b; \\ Nb = Nb \wedge b \leq Na \vee a = a$$

が成立する。 a, b は W_L の極小元であるから

$$a = a \wedge (b \vee Na) = a \wedge b \\ = b \wedge (a \vee Nb) = b$$

を得る。すなわち、 $|m(W_L)| = 1$ は明らかである。

証明終

定理2.3と定理2.6により次の結果を得る。

定理2.9 ドモルガン代数 L において、 $M(W_L) \neq \emptyset$ ならば、以下のことは同値である。

- (1) $|M(W_L)| = 1$;
- (2) L はクリーネ代数である。

証明 省略する。

証明終

3. 分配束がクリーネ代数になるための条件について

まず、分配束がドモルガン代数になるための条件について考察する。

定義 束 $(L, \leq)$ において、順序関係 $\leq_c$ を

$$a \leq_c b \iff b \leq a$$

で定義する。明らかに、 $(L, \leq_c)$ も束であり、 $(L, \leq_c)$ は $(L, \leq)$ の双対束という。簡単に、 L^c で表す。

定理3.1 最小元0と最大元1をもつ分配束 L において、 $P, Q \subseteq L$ かつ

- (1) $P \cup Q = L$, かつ $P \cap Q \neq \emptyset$; P, Q は L の部分束
- (2) $a \in P, c \leq a \Rightarrow c \in P$; $x \in Q, x \leq y \Rightarrow y \in Q$
- (3) $(P, \leq) \stackrel{f}{\cong} (Q, \leq_c)$, $((Q, \leq_c)$ は $(Q, \leq)$ の双対束である.)
- (4) 任意の $x \in P \cap Q$ に対して、 $f(x) \in P \cap Q, f(f(x)) = x$.

ならば、 L はドモルガン代数になる。

証明

分配束 L において、 $N: L \rightarrow L$ を

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in P \\ f^{-1}(x) & x \in Q \end{cases}$$

で定義する。任意の $x \in P \cap Q$ に対して

$$f(x) = f(ff^{-1}(x)) = ff(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$$

であるから、 $N: L \rightarrow L$ の写像となる。定理の仮定(2)により、 $0 \in P, 1 \in Q$ であるから、 $N(0) = f(0) = 1$, $N(1) = f^{-1}(1) = 0$ となる、(A0)。また、 $x \leq y$ ならば

- (1) $x, y \in P$ (or Q) のとき

$$N(x) = f(x) \text{ (or } f^{-1}(x)) \geq f(y) \text{ (or } f^{-1}(y)) = N(y)$$

となる。

- (2) $x \in P, y \in Q$ のとき、 $P \cap Q \neq \emptyset$ により

$$\exists a \in P \cap Q$$

分配律により、 $x \leq (x \vee a) \wedge y = (y \wedge a) \vee x \leq y$ である。条件(2)により、 $x \vee a \in Q$ 、また、 Q は L の部分束であるから

$$(x \vee a) \wedge y \in Q$$

を得る。同様に、 $(y \wedge a) \vee x \in P$ も成立する。よって、

$$d = (x \vee a) \wedge y = (y \wedge a) \vee x \in P \cap Q$$

である。(1)の結果を用いて、 $x \leq d \leq y$ よって、 $Nx \geq Nd \geq Ny$ を得る。(A1)

N の定義と仮定(4)により、(A2)もみたす。すなわち、 (L, N) はドモルガン代数である。

証明終

束 L の部分集合 $[A]$, $[A]$ を次のように定義する、 $(A \subseteq L)$

$$[A] = \{x \in L \mid \exists a \in A \text{ s.t. } x \leq a\};$$

$$[A] = \{x \in L \mid \exists a \in A \text{ s.t. } a \leq x\}$$

$A = \{a\}$ のとき、簡単のために、 $(\{a\}) = [a]$, $[\{a\}] = [a]$.

定理3.2 最小元0と最大元1をもつ分配束 L において、 $P, Q \subseteq L$ かつ

- (1) $P \cup Q = L$, かつ $P \cap Q \neq \emptyset$; P, Q は L の部分束
- (2) $a \in P, c \leq a \Rightarrow c \in P$;

$$x \in Q, x \leq y \Rightarrow y \in Q$$

- (3) $(P, \leq) \stackrel{f}{\cong} (Q, \leq_c)$ かつ $(P \cap Q, f)$ はクリーネ代数

- (4) 任意の $x \in (W_{P \cap Q}^+]$, $y \in [W_{P \cap Q}^-]$ に対して $x \leq y$ ならば、 L はクリーネ代数になる。

証明

$N: L \rightarrow L$ は定理3.1の証明と同じように定義する。定理3.1を用いて、仮定(1), (2), (3)により、 (L, N) はドモルガン代数となる。

$(P \cap Q, f)$ はクリーネ代数であるから、束 $P \cap Q$ は最小元 b と最大元 a をもつ、条件(2)により、 $[a] \subseteq P$, $[a] \subseteq Q$ が成立する。任意の $x \in P$ に対して P は L の部分束であることにより、

$$b \leq a \leq x \vee a \in P$$

が成立する。したがって、条件(2)により

$$x \vee a \in Q$$

を得る。よって、 $x \vee a \in P \cap Q$ が成立する。 a は $P \cap Q$ の最大元であるから

$$x \vee a = a$$

を得る。したがって、 $x \leq a$ となる、すなわち $x \in (a)$ を得る。よって、 $(a) = P$ が成立する、同様に、 $(b) = Q$ も成立する。任意の $y \in L$ に対して、 $b \leq a$ により

$$b \leq (y \vee b) \wedge a \leq a; b \leq (y \wedge a) \vee b \leq a$$

が成立する。よって、 $(y \vee b) \wedge a, b \leq (y \wedge a) \vee b \in P \cap Q$ である。

任意の $x \in L = P \cup Q$ に対して

(i) $x \in P$ のとき、 $Nx \in Q$ となる。また、 $P = (a), Q = (b)$ により、 $x \leq a, Nx \geq b$ が成立する。このとき

$$\begin{aligned} x \vee Nx &= (x \vee Nx) \vee b \geq ((x \vee Nx) \vee b) \wedge a \\ &= ((x \vee b) \wedge a) \vee ((Nx \vee b) \wedge a); \\ &\quad (\text{分配律により}) \\ &= ((x \vee b) \wedge a) \vee ((Nx \wedge a) \vee b); \\ &\quad (\text{分配律により}) \\ &= ((x \vee b) \wedge a) \vee N((x \vee b) \wedge a); \\ &\in W_{P \cap Q}^-.((x \vee b) \wedge a \in P \cap Q) \end{aligned}$$

が成立する。 $[W_{P \cap Q}^-]$ の定義により

$$x \vee Nx \in [W_{P \cap Q}^-]$$

を得る。同様に、(ii) $x \in Q$ のとき、 $x \vee Nx \in [W_{P \cap Q}^-]$ も成立する。

任意の $y \in L = P \cup Q$ に対して

(i) $y \in P$ のとき、 $Ny \in Q$ となる。また、 $P = (a), Q = (b)$ により、 $y \leq a, Ny \geq b$ が成立する。このとき

$$\begin{aligned} y \wedge Ny &= y \wedge Ny \wedge a \leq ((y \wedge Ny) \wedge a) \vee b \\ &= ((y \wedge a) \vee b) \wedge ((Ny \wedge a) \vee b); \\ &\quad (\text{分配律により}) \\ &= ((y \wedge a) \vee b) \wedge ((Ny \vee b) \wedge a); \\ &\quad (\text{分配律により}) \\ &= ((y \wedge a) \vee b) \wedge N((y \wedge a) \vee b); \\ &\in W_{P \cap Q}^+.((y \wedge a) \vee b \in P \cap Q) \end{aligned}$$

が成立する。 $(W_{P \cap Q}^+)$ の定義により

$$y \wedge Ny \in (W_{P \cap Q}^+)$$

を得る。同様に、(ii) $y \in Q$ のとき、 $y \wedge Ny \in (W_{P \cap Q}^+)$ も成立する。したがって、仮定(4)により、 $y \wedge Ny \leq x \vee Nx$ (任意の $x, y \in L$ に対して) が成立する。よって、 (L, N) はクリーネ代数である。証明終

4. クリーネ代数の構造について

まず、いくつかのクリーネ代数の例を示しておく。

例4.1 $L = [0, 1], x, y \in L$

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \quad x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$N_1 x = 1 - x$$

$$N_2 x = 1 - 3x, (x \in [0, \frac{1}{4}]); \frac{1-x}{3}, (x \in [\frac{1}{4}, 1])$$

で定義する。このとき、明らかに (L, N_1) と (L, N_2) はクリーネ代数となる。しかし、 (L, N_1) の中心は $\frac{1}{2}$ であり、 (L, N_2) の中心は $\frac{1}{4}$ である。つまり、分配束は同じで、写像 N によって、中心は様々である。

例4.2 $L = [0, 1] \setminus (\{4^{-1} \times 3^{-k}, 1 - (4^{-1} \times 3^{-k}) \mid k = 0, 1, 2, 3, \dots\})$

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \quad x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$N_1 x = 1 - x$$

$$N_2 x = 1 - 3x, (x \in [0, \frac{1}{4}]); \frac{1-x}{3}, (x \in (\frac{1}{4}, 1])$$

で定義する。このとき、明らかに (L, N_1) と (L, N_2) はクリーネ代数となる。しかし、 (L, N_1) の中心は $1/2$ であり、 (L, N_2) は中心をもたない。

定理4.1 クリーネ代数 L において、以下の(1)–(4)が成立する。

(1) $W_L^N \cong (W_L)^c((W_L)^c \text{ は } W_L \text{ の双対})$

(2) 任意の $x \in W_L, y \in W_L$ に対して、 $y \leq x$ が成立する

(3) $\exists$ 半順序集合 $P, Q \subseteq W_L$ s.t. $P \cap Q = \emptyset, P \cup Q = W_L, P \cong Q^c(Q^c \text{ は } Q \text{ の双対})$

(4) 任意の $x \in P$ に対して、 $x \vee Nx \in W_L$ が成立する。

証明

(1) 定理2.3の証明により、 $W_L = \{Nx \mid x \in W_L\}$ であるから、任意の $x, y \in W_L$ に対して $x \leq y$ とすると(A1)により、 $Nx \geq Ny$ である。また、 N は全単射であるから、 $((W, \leq) \cong (W, \leq_c) = W_L)$ が成立する。

(2) 任意の $x \in W_L, y \in W_L$ に対して、 $Nx \leq x, Ny \geq y$ であるから、(A3)により

$$y = y \wedge Ny \leq x \vee Nx = x$$

が成立する。

(3) W_L において、選択公理により

$$\varphi: 2^{W_L \setminus \{\emptyset\}} \rightarrow W_L$$

$$A \mapsto \varphi(A) \in A$$

が存在する。

$$P = \{\varphi(\{x, Nx\}) \mid x \in W_L\}, Q = W_L \setminus P$$

とおく、明らかに、 $P \cap Q = \emptyset$ かつ $P \cup Q = W_L$ である。また、任意の $x \in W_L$ に対して、 $\varphi(\{x, Nx\}) \in \{x, Nx\}$ であるから

$$\varphi(\{x, Nx\}) = x \text{ あるいは } \varphi(\{x, Nx\}) = Nx$$

が成立する。すなわち、 $Q = \{Nx | x \in P\}$ となる。(A1)と N の全単射の性質により、 $P \cong Q$ が成立する。(4)は(A3)により成立する。証明終

クリーネ代数の構造は図4.1に示す。

$$W_L^0 = P \cup Q$$

$$P \cong Q^c$$

$$x \vee Nx \in W_L, (\forall x \in P)$$

この定理と第2章の結果を用いることにより、次の結果を得る。

定理4.2 中心 c をもつクリーネ代数 L において、以下の(1)-(3)が成立する。

- (1) $W_L = [c]$, $W_L^c = (c]$, $W_L^c \cong (W_L^c)^c$
- (2) $\exists$ 半順序集合 $P, Q \subseteq W_L$ s.t. $P \cap Q = \emptyset$,
 $P \cup Q = W_L$, $P \cong Q^c$

- (3) 任意の $x \in P$ に対して、 $x \vee Nx \in W_L$ が成立する

証明 省略する。証明終

中心をもつクリーネ代数の構造は図4.2に示す。

$$W_L^0 = P \cup Q$$

$$W_L^c \cong (W_L^c)^c$$

$$P \cong Q^c$$

$$W_L \cap W_L^c = \{c\}$$

$$x \vee Nx \in W_L, (\forall x \in P)$$

図4.1

図4.2

5. ドモルガン代数の構造について

束 L の空でない部分集合 I は、 $x, y \in I$ ならば $x \vee y \in I$ であり、また $x \in I$ かつ $t \leq x$ ならば $t \in I$ であるとき、束 L のイデアルという。双対的に束 L のフィルタが定義される。束 L のイデアル(あるいは、フィルタ)全体集合は包含関係を順序関係として束になる。また、この束が完備束であることは、束 L において最小元0(最大元1)が存在することと同値である。この束を L のイデアル(フィルタ)束と言い、 $I(L)$ ($F(L)$)で表す。

補理5.1 束 L, K において

$$L \cong K \iff (I(L), \subseteq) \cong (I(K), \subseteq)$$

が成立する。

証明

- (1) $I_i \in I(L)$, $(i \in \Delta)$ ならば $\bigvee_{i \in \Delta} I_i = \bigcup_{\text{有限 } \Delta' \subseteq \Delta} (\bigvee_{i \in \Delta'} I_i)$ である。([4]により)
- (2) $I \in I(L)$ に対して、 $I = (a] \iff I \leq \bigvee_{i \in \Delta} I_i$ ならば $\exists$ 有限 $\Delta' \subseteq \Delta$ s.t. $I \leq \bigvee_{i \in \Delta'} I_i$ が成立する。

事実、 $I = (a] \leq \bigvee_{i \in \Delta} I_i$ ならば、(1)により $\exists$ 有限 $\Delta' \subseteq \Delta$ s.t. $a \in \bigvee_{i \in \Delta'} I_i$ が成立する。したがって、 $(a] = \{x | x \leq a\}$ により、 $I = (a] \leq \bigvee_{i \in \Delta'} I_i$ を得る。逆に、 $I = \bigvee_{x \in I} (x]$ であるから、 $\exists I$ の有限部分集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq I$ s.t.

$$I \leq (x_1] \vee (x_2] \vee \dots \vee (x_n] = (\bigvee_{i=1}^n x_i]$$

が成立する。 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq I$ であるから、 $\bigvee_{i=1}^n x_i \in I$ が成立し、 $(\bigvee_{i=1}^n x_i] \subseteq I$ である。よって、 $I = (a]$, $(a = \bigvee_{i=1}^n x_i)$ が成立する。

- (3) $I(L) \cong I(K)$ ならば $L^* = \{(a] | a \in L\} \cong \{(b] | b \in K\} = K^*$

事実、任意の $(a] \in L$ に対して $f^*((a]) \leq \bigvee_{i \in \Delta} J_i$, $(J_i \in I(K))$ とすると f^* は $I(L) \rightarrow I(K)$ の完備同型写像であるから

$$(a] \leq (f^*)^{-1}(\bigvee_{i \in \Delta} J_i) = \bigvee_{i \in \Delta} (f^*)^{-1}(J_i)$$

を得る。(2)により

$$\exists \Delta \text{ の有限部分集合 } \Delta' \text{ s.t. } (a] \leq \bigvee_{i \in \Delta'} (f^*)^{-1}(J_i)$$

が成立する。よって、

$$f^*((a]) \leq f^*(\bigvee_{i \in \Delta'} (f^*)^{-1}(J_i)) = \bigvee_{i \in \Delta'} f^*((f^*)^{-1}(J_i)) = \bigvee_{i \in \Delta'} J_i$$

を得る。また、(2)により $f^*((a]) \in K^*$ である。

同様に、任意の $(b] \in K^*$ に対して、 $(f^*)^{-1}((b]) \in L^*$ が成立する。 f^* は $I(L) \rightarrow I(K)$ の完備同型写像であ

るから $L^{f*} \cong L^*$, K^* を得る。明らかに、 $L \cong L^*$, $K \cong K^*$ であるから $I(L)^{f*} \cong I(K) \Rightarrow L \cong K$

が成立する。逆に

$$L \cong K \Rightarrow I(L) \cong I(K)$$

は明らかである。

証明終

定理5.1 最小元0と最大元1をもつ分配束 L において、以下のことは同値である

- (1) L はドモルガン代数;
- (2) $I(L)^{f*} \cong F(L)$ かつ $f^*((a)) = [b] \Rightarrow f^*((b)) = [a]$ が成立する。

証明

(1) $\Rightarrow$ (2) L はドモルガン代数であるから、 $L \cong L^c$ が成立する。双対の性質により $F(L) \cong I(L^c)$ である。

$$f^*: I(L) \rightarrow I(L^c) = F(L) \\ A \mapsto NA = \{Nx \mid x \in A\}$$

で定義すると、 $L \cong L^c$ により $I(L)^{f*} \cong I(L^c)$ すなわち、 $I(L)^{f*} \cong F(L)$ が成立する。また、 f^* の定義により

$$f^*((a)) = N(a) = \{Nx \mid x \in (a)\} \\ = \{Nx \mid x \leq a\} \\ = \{y \mid y \geq Na\} = [Na]$$

を得る。したがって、 $f^*((a)) = [b]$ ならば $f^*((b)) = [a]$ となる。

(2) $\Rightarrow$ (1) $I(L)^{f*} \cong F(L) = I(L^c)$ である。補理5.1により、 $L \cong L^c$ が成立する(ここでは f を $f(a) = b \iff f^*((a)) = [b]$ で定義する)。(2) から $f(f(a)) = a$ を得る。また、 $L \cong L^c$ により、 $f(0) = 1$ と $f(1) = 0$ と $a \leq b$ ならば $f(a) \geq f(b)$ が成立する。よって、 (L, f) はドモルガン代数である。

証明終

定理4.1と第2章の結果を用いることにより、次の結果を得る。

定理5.2 ドモルガン代数 L において、以下の(1)-(3)が成立する

- (1) $W_L \cong (W_L)^c$, $((W_L)^c)$ は W_L の双対
- (2) 任意の $x \in W_L, y \in W_L$ に対して $y \not\leq x$ が成立する
- (3) $\exists$ 半順序集合 $P, Q \subseteq W_L$ s.t. $P \cap Q = \emptyset, P \cup Q = W_L, P \cong Q^c$, (Q^c) は Q の双対

証明 省略する。

証明終

定理5.2等により、次のような n 個の中心を持つ有限ドモルガン代数を構成することができる。

例5.1 $C_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $(n \in N)$, $C_n^2 = C_n \times C_n$ とすると、ただし $(a, b), (c, d) \in C_n^2$ に対して

$$(a, b) \wedge (c, d) = (\min(a, c), \min(b, d)) \\ (a, b) \vee (c, d) = (\max(a, c), \max(b, d)) \\ N(a, b) = (n - b, n - a)$$

で定義する。このとき、明らかに、 C_n^2 はドモルガン代数となる、かつ

$$N(x, y) = (x, y) \iff x + y = n$$

である。すなわち、 C_n^2 の中心は $(0, n), (1, n-1), (2, n-2), \dots, (n, 0)$ である。よって、3個以上の中心をもつ有限ドモルガン代数が存在する。(図5.1)

例5.2 $C_3 = \{0, c, 1\}$, $0 \leq c \leq 1$; $N_3(0) = 1, N_3(c) = c$ とする。 (C_3, N_3) は中心 c を持つクリーネ代数である

例5.3 $K_4 = \{0, a, b, 1\}$, $0 \leq a, b \leq 1$; $a \parallel b, N_4(0) = 1, N_4(a) = a, N_4(b) = b$ とする。 (K_4, N_4) は中心 a, b を持つドモルガン代数である。ただし、クリーネ代数ではない。

例5.4 $K = \{1/n, -1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$, $Nx = -x, (\forall x \in K)$; とする。 (K, N) は中心を持たないクリーネ代数である。

例5.5 $A = \{n, -n \mid n = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{i, -i\}$; $-i \leq \dots \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq \dots \leq i$; $M = A \times A$; $N_M(x, y) = (-y, -x), (\forall (x, y) \in M)$; とする。 (M, N_M) は ∞ 個中心を持つドモルガン代数である。

例5.6 ブール束 C_2^3 において、 $N(0, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $N(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$, $N(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$, $N(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$ とする。 (C_2^3, N) は中心を持たないドモルガン代数である。ただし、 $|m(W_{C_2^3})| = 2$ である。

定義5.1 $(L_1, N_1), (L_2, N_2)$ はドモルガン代数とする。束 $L_1 \times L_2$ の上に $N_1 \times N_2$ を次のように定義する

$$N_1 \times N_2(a, b) = (N_1 a, N_2 b)$$

明らかに $(L_1 \times L_2, N_1 \times N_2)$ もドモルガン代数である。

図5.1

表 5.1

$ m(W_L^-) = M(W_L^+) =$	0	1	2	...	n	...	∞
中心を持つクリーネ代数	×	○ 例 5.2	×		×		×
中心を持たないクリーネ代数	○ 例 5.4	○ C_2	×		×		×
中心を持つドモルガン代数	×	○ 例 5.2	○ 例 5.3		○ 例 5.1		○ 例 5.5
中心を持たないドモルガン代数	○ $K \times K_4$	○ C_2	○ 例 5.6		○ $C_2 \times C_n^2$		○ $C_2 \times M$

×は 存在しないということを表す; ○は 存在するということを表す

定理5.3 ドモルガン代数 (L_1, N_1) , (L_2, N_2) に対して、ドモルガン代数 $(L_1 \times L_2, N_1 \times N_2)$ が中心を持つ必要十分条件は (L_1, N_1) と (L_2, N_2) がそれぞれ中心を持つ

証明 省略する。

系5.1 ドモルガン代数 (L, N) において、二元連鎖 $C_2 = \{0, 1\}$ とする。

- (1) $(C_2 \times L, N^*)$ は中心を持たない;
- (2) c はの一つ中心とすれば $(0, c) \in m(W_{C_2 \times L}^-)$; $(1, c) \in m(W_{C_2 \times L}^+)$ である。

ここでは、 $N^*(x, a) = (1 - x, Na)$ 。

ドモルガン代数 (L, N) において、定理2.3により、 $|m(W_L^-)| = |M(W_L^+)|$ が成立する。次に、 $|m(W_L^-)|$ の大きさによるクリーネ代数、ドモルガン代数をまとめる。

6. おわりに

本論文の第2章において、任意のクリーネ代数及びドモルガン代数が中心をもつための必要十分条件を決定することができた。これらの必要十分条件は $m(W_L^-) \cap M(W_L^+) \neq \emptyset$ で統一しておく。 $m(W_L^-) \cap M(W_L^+)$ を計算することで代数の中心を求めることができる。代数的な手法を用いて、ただ一つ中心をもつドモルガン代数はクリーネ代数になることを示した。

本論文の第3章、第4章において、最小元0と最大元1をもつ任意の分配束 L がクリーネ代数及びドモルガン代数になるための定理3.1と定理3.2で示し、クリーネ代数の構造を定理4.1で与えた。これらの条件は本質的に構成的な条件である。クリーネ代数を深く考察することに重要な意義があると考えられる。

本論文の第5章において、束 L のイデアル束 $I(L)$ とフィルタ束 $F(L)$ を出発点とし、補助定理5.1を経由して、ドモルガン代数の構造を示した。また、例5.1を挙げて([1]で) 3個以上の中心をもつ有限ドモルガン代数が存在するか否かという問題の解答を与えた。そういう例は[9]にも構成法とともに挙げてあるが、その構成法は筆者の代数的方法とは異なるものである。

中心をもたないクリーネ代数及びドモルガン代数について、今後、深い考察を行っていく必要があるというのは、中心をもつものより中心をもたないものの方が多く存在するからである。その代数系の数学的諸性質を調べることも今後の課題である。

最後に、本論文の査読者には適切な助言をいただき深謝いたします。

参 考 文 献

- [1] 森岡, 中心をもつクリーネ代数とドモルガン代数の諸性質に関する研究, 日本ファジィ学誌, Vol.7, No.3, 572-584, 1995.
- [2] 千谷, ファジィの数学的基礎 (講座ファジィ1), 日刊工業新聞社, 1992.
- [3] 近藤, 含意をもつファジィ代数について, 日本ファジィ学会誌, Vol.15, No.4, 869-874, 1993.
- [4] G.Birkhoff, Lattice Theory, 3rd ed., Providence RI. Providence Rhode Island. Amer. Math. Soc., 1967.
- [5] 向殿, ファジィ論理 (講座ファジィ4), 日刊工業新聞社, 1993.
- [6] L. Bolc, P. Borowik, MANY-VALUED LOGICS 1. Springer-Verlag, 1992.
- [7] 近藤, ファジィ論理関数は本質的に3値である, 日本ファジィ学会誌, Vol.6, No.3, 542-548, 1994.
- [8] G. TAKEUTI, S.TITANI, INTUITIONISTIC FUZZY LOGIC AND INTUITIONISTIC FUZZY SET THEORY, THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC, Vol. 49, No. 3, 1984.
- [9] T.S.Blyth and J.C.Varlet, Ockham algebras, Oxford University Press, 1994.
- [10] G. Gratzner, General Lattice Theory, (Academic Press, New York) 1978.

(1995年12月13日 受 付)

(1996年7月2日 再 受 付)

(1996年11月12日 再々受付)

[問い合わせ先]

〒226 横浜市緑区長津町 4259

東京工業大学大学院総合理工学研究科システム科学専攻

廣田研究室 張 昆竜

TEL : 045-924-5682

FAX : 045-924-5676

E-mail : kzhang @hrt.sys.titech.ac.jp

著者紹介

張 昆竜 (ちょう こんりゅう)

中国 内蒙古大学 数学系

1991年 内蒙古大学数学系修士課程卒業、同年 内蒙古大学数学系講師、1994年同大学数学系助教授

中川 友紀子 (なかがわ ゆきこ)

東京工業大学大学院総合理工学研究科

1995年、法政大学大学院工学研究科修士課程修了。同年 東京工業大学大学院総合理工学研究科助手。ファジィシステムの研究に従事。

廣田 薫 (ひろた かおる)

東京工業大学大学院総合理工学研究科

1975年、東京工業大学工学部電子工学科卒業。1979年 同大学大学院理工学研究科博士課程修了工学博士。同年 相模工業大学情報工学科専攻講師。1982年 法政大学工学部専攻講師。教授を経て、1995年 東京工業大学大学院総合理工学研究科 教授。ファジィシステムの研究に従事。

On the Kleene Algebra and De Morgan Algebra with Centers

by

ZHANG KUN-LUN, Kaoru HIROTA and Yukiko NAKAGAWA**Abstract :**

The Kleene's fuzzy logic is represented by Kleene algebra and its generalization is De Morgan algebra. In this paper, we present basic properties of Kleene algebra and De Morgan algebra, and various results on Kleene algebra, De Morgan algebra with centers. The necessary and sufficient condition for a distributive lattice to be a Kleene algebra (De Morgan algebra) is given. We also study the structure of the Kleene algebra (De Morgan algebra).

Keywords : Fuzzy logic, Kleene algebra, De Morgan algebra, Center

Contact Address : **ZHANG KUN-LUN**

Department of Computational Intelligence and Systems Science,

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology

Nagatsuta-cho, Midori-ku, Yokohama 226, Japan

TEL : 045-924-5682

FAX : 045-924-5676

E-mail : kzhang@phrt.sys.titech.ac.jp