特集 建築へのファジィ理論の応用

フラクタルとカオスの 建築デザインと制御への応用[†]

朝山 秀一*

1. はじめに

今日、工学の分野でも広く話題となっているフラクタルの数学的基礎は、19世紀末から20世紀の始めにかけ、F.Hausdorff、W.Sierpinski、G.Cantor らの手により築かれている。半世紀後 fractal という造語と共に、B.B.Mandelbrot や M.F.Bansley らが、それを科学の分野全般の問題に発展させることができたのは、複雑な反復関数システムを取り扱えるコンピュータが発展したためであると言われている。また、非線形力学としてのカオスも、同様な時期に H.Poincare により研究が始められ、それを G.B.Birkhoff らが発展させている。

現在、フラクタルとカオスは自然界の現象の解析や力学系の理論に革命的な変化をもたらしたと言われている。そこで、こうした思想を建築分野の問題に適用できるなら、新しい建築技術が生まれ発展する可能性が期待できるかもしれない。ここでは、僅かではあるが筆者らの試みを紹介すると共に、その応用の可能性について考えるものとする。

2. フラクタル幾何学の建築デザインへの応用

2.1 自然界に存在する形と建築

フラクタル幾何学は集合論であるが、その厳密な理論は他の著書¹⁾²⁾に譲るものとして、ここではその特徴について簡単に述べる。フラクタル幾何学図形では、図形全体と同じ形状が拡大した小さな部分に多数存在しており、これを自己相似性と呼んでいる。また、その図形の複雑さ(正確には距離空間において図形が占める密度)を示す指標に、フラクタル次元が用いられている。例えば、直線よりも複雑で平面にはならない図形のフラクタル次元を計算すると、1.56次元などという整数でない次元が得られる。これは非整数次元と呼ばれ、前出の自己相似性と共にフラクタル幾何学図形の定義と深く係る重要な指標である。また、自然界に存在する雲、海岸線、樹木、結晶などの形は、こうした幾何学的特徴を備えていると言われている³⁾。

建築物を幾何学図形の集合と考えた場合、近代建築は、ユークリッド幾何学図形の集合体である。従って、建築物にフラクタル幾何学図形を組み込むことは、自然界に存在する形のシステムを内包する新しい建築的形狀を造ろうとする試みであるとも考えられる。ここでは、フラクタル幾何学図形として知られる Sierpinski の三角形、筆者らが提案する2つの縮小率で構成される三角形を用いたトラス、円弧を利用した積層アーチの幾何学的特徴について述べ、その応用としての建築の基本設計例を紹介する。

[†] Applications of Fractals and Chaos to Architectural Design and Vibration Control

* Shuichi ASAYAMA

東京電機大学工学部建築学科

Dept. of Architecture and Engineering, Faculty of Engineering, Tokyo Denki University

2.2 建築骨組に用いるフラクタル幾何学図形の基本的性質

次に建築骨組に用いるフラクタル幾何学図形の基本的性質について述べる。一般に、フラクタル幾何学図形は、複数の縮小写像を繰り返すことにより作られる。Fig. 1 は、繰り返し縮小写像により定められる Sierpinski の三角形の収斂過程を示したものである。またよく知られているように、そのフラクタル次元は、

$$D = \log 3 / \log 2 \approx 1.56 \quad (1)$$

である。Fig. 2 は、2つの縮小率で構成される三角形の収斂過程を示したもので、縮小写像 $\{f_1, f_2, f_3\}$ により集合 (図形) Δ_i が定められている。 Δ_i は

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= f_1(\Delta_0) \cup f_2(\Delta_0) \cup f_3(\Delta_0) \\ \Delta_2 &= f_1(\Delta_1) \cup f_2(\Delta_1) \cup f_3(\Delta_1) \\ &\vdots \\ \Delta_n &= f_1(\Delta_{n-1}) \cup f_2(\Delta_{n-1}) \cup f_3(\Delta_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

と表される。図より集合列 $\{\Delta_n\}$ は、

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots \quad (3)$$

なる関係を満たしている。従って、自己相似集合に関する定理より、極限集合

$$\Delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$$

は、縮小写像 $\{f_1, f_2, f_3\}$ に関して自己相似集合であり、 Δ では、その本来の意味である

$$\Delta = f_1(\Delta) \cup f_2(\Delta) \cup f_3(\Delta) \quad (4)$$

なる関係が成立している。さらに、この図形が完全自己相似集合で非整数次元を持つことにより、フラクタルであることが証明できるが、それは以下の積層アーチと同様別の機会に譲るものとする。

Fig. 3 は、円弧を繰り返し縮小写像により重ね合わせて作った積層アーチの収斂過程を示したものである。このアーチは、Fig. 4 の樹形図と同じ生成過程を持ち、図からも明らかなように、

$$\Delta_n = f_1(\Delta_{n-1}) \cup f_2(\Delta_{n-1}) \cup f_3(\Delta_{n-1}) \cup \Delta_0 \quad (5)$$

かつ

Fig.1 Sierpinskiの三角形の収斂過程

Fig.2 2つの縮小率を持つ三角形の収斂過程

Fig.3 円弧を用いた積層アーチの収斂過程

Fig.4 樹形図の収斂過程

$$\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_n \subset \cdots \quad (6)$$

なる関係が存在している。この時、極限集合

$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$$

は、完全内部自己相似集合となっている。

また、これらの集合では縮小写像 f_i の縮小率 λ_i とフラクタル次元 D の間に、

$$\sum \lambda_i^D = 1 \quad (7)$$

なる関係が成立しており、この性質を用いてフラクタル次元を計算することができる。1例を挙げれば、Fig. 5 に示す底辺の長さが 1 の三角形で、(7)

式から、

$$2 \cdot (1/2 \cos \theta)^D + (1 - 1/2 \cos^2 \theta)^D = 1 \quad (8)$$

の関係が得られ、フラクタル次元は、三角形の勾配 θ の値、 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ に対して $1.58 < D < 2$ と変化することが判る。こうした性質を利用すれば、建築骨組に樹木などの自然界に存在する形と同じ生成のパターンや複雑さを与えることができる。

2.3 建築設計の初期段階における反復関数 (IFS) コードの利用

フラクタル幾何学図形は、反復関数コード (IFS コード) とカオスアルゴリズムを用いて、CRT 上に描くことができる。IFS コードは、基本的に複数の縮小写像を 2 次元もしくは 3 次元アフィン変換の係数で表現したものである。2 次元アフィン変換の式を

$$w \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} \quad (9)$$

と表せば、Table1 は、 (a_i, b_i) 、 $i=1, 2, 3$ を頂点とする Sierpinski の三角形の IFS コードである。また、Table2 は、二つの縮小率から構成され底辺が 1 で勾配 θ の三角形の IFS コードを M.F. Bansely が示した方法に基づき求めたものである¹⁴⁾。表中の p は、カオスアルゴリズムを用いてアトラ

Fig.5 2つの縮小率を持つ三角形

Table1. Sierpinskiの三角形のIFSコード

w	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	e	f	p
1	1/2	0	0	1/2	a1/2	b1/2	1/3
2	1/2	0	0	1/2	a2/2	b2/2	1/3
3	1/2	0	0	1/2	a3/2	b3/2	1/3

Table2. 2つの縮小率を持つ三角形のIFSコード

w	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	e	f	p
1	-1/2	$\tan \theta / 2$	$-\tan \theta / 2$	-1/2	1/2	b1/2	1/3
2	-1/2	$-\tan \theta / 2$	$\tan \theta / 2$	-1/2	1	b2/2	1/3
3	$1 - 1/2 \cos^2 \theta$	0	0	$1 - 1/2 \cos^2 \theta$	$1/4 \cos^2 \theta$	0	1/3

Fig.6 IFSコードを用いて描いた建築架構のフラクタル幾何学的イメージ

クタを生成するときに、それぞれのアフィン変換を選択する確率を示している。

Fig.6は、IFS コードとカオスアルゴリズムを用いて描いた建築骨組の幾何学的イメージである。これらのイメージは、建築設計の初期段階における手書きスケッチやスタディーモデルと同じで、設計者がこれから用いるフラクタル幾何学図形が建築の形状にどのような印象を与えるかを検討するためのものである。カオスアルゴリズムによって点の集合体として表示された屋根部分は、1 次元的な線材よりも密であり、2 次元的な面材よりも粗であるフラクタル幾何学図形の非整数次元的な性質を伝えている。

2.4 基本設計例

ここでは、フラクタル幾何学図形を含む建築物の形状と内部空間をより明確に把握するため、基本設計例を CAD を用いて作成した。一般に、縮小写像を無限回繰り返して得られる数学的な意味でのフラクタル幾何学図形を実際の物理的問題に応用する際は、縮小写像の繰り返し数 n を有限の値

に定めることが必要とされる。これは、物理学上、不確定性原理により厳密に長さ 0 の極限を考えることができない⁵⁾ことに関連する。現実の世界の

Fig.7 Sierpinskiの三角形を用いた建築骨組

Fig.8 Sierpinskiの三角形で構成される屋根架構を持つ体育館の内部透視図

Fig.9 竹の次元解析

Fig.10 2つの縮小率を持つ三角形で構成される屋根架構をもつ図書館の外観透視図

例では、植物の枝が縮小写像により構成されていても、成長の限界によりある所で分岐が終わると考えるのと同じである。以下の基本設計例では、構造体、2次部材、造作、装飾などを含めて、4回前後の繰り返し数を用いている。Fig.7,8は、Sierpinskiの三角形を屋根架構に用いた体育館の基本設計例⁶⁾である。Fig.10,11は、次元解析により求めた竹の平均的なフラクタル次元1.62(Fig.9参照)を2つの縮小率を持つ三角形で構成される建築骨組、2次部材、およびそれに覆われる建築の要素に与えることにより、竹の持つ形の複雑さを図書館の設計例で表現したものである⁷⁾。また、Fig.12,13は、完全内部自己相似集合となる

Fig.11 2つの縮小率を持つ三角形で構成される屋根架構と天井見上げ図

Fig.12 積層アーチを用いた屋内プールの外観透視図

Fig.13 鋼構造による積層アーチ見上げ図

積層アーチを用いたガラス屋根付き屋内プールの基本設計例である。

3. カオス力学の建築振動制御への応用の可能性

3.1 カオス力学系としての構造物の非線形応答

近年、カオスの研究分野では復元力項が変位に比例しない非線形微分方程式が直接数値的に解かれ、その解の多様性や複雑性が議論されている。非線形方程式が系を支配するカオス力学系では、初期値の微少な違いがその後の系の振る舞いに大きな影響を与えたり、周期的入力に対する応答がいつまでも周期的な振る舞いに収束しない現象が報告されている⁷⁾⁸⁾。

一方、現在の耐震設計では、大振幅地動を受ける構造物の弾塑性応答解析を行う場合、線形微分方程式における剛性の変化を仮定し、bi-linear 或いは tri-linear 型のように、線形剛性の組合せを用いて非線形履歴をモデル化している。しかしながら上述の非線形現象を考えると、本来曲線的に変化する免震構造のアイソレータや鉄筋コンクリート構造物の履歴などを直線区間で近似し、応答を線形振動方程式に基づき求めていることに検討の余地を感じる。ここでは、その点について若干の考察を行うが、読者には以下が現在開始したばかりの研究の速報であることをご了承頂くようお願いする次第である。

3.2 Duffing の振動方程式と構造物のモデル化

非線形の硬化バネを持つ 1 質点系に地震動が作用した場合の振動方程式は、Duffing の方程式を参照すると、

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = -m \ddot{y}_0 \quad (10)$$

となる。ここで、左辺を $\ddot{y}_0 = -A \sin \omega t$ としたものが、Duffing の方程式である。

これに対して従来の線形振動方程式を書けば、

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = -m \ddot{y}_0 \quad (11)$$

である。ここに、 x ：応答変位、 m ：質量、 c ：減衰係数、 k, k_1, k_2 ：バネ定数、 y_0 ：地動である。(10)

式の解はカオスの発生を含み極めて複雑であることが知られている⁹⁾。

Fig.14は、こうした系の特性を把握するために用いる Poincaré 写像の概念図で、時間的に変化する変位 x と速度 v が、周期的繰り返しのある切断面 S をよぎる状況を示している。また、この 3 次元空間 (x, v, t) を位相空間と呼んでいる。Fig.15は、(10)式を、 $m=1, c=0.05, k_1=0.2, k_2=1, \ddot{y}_0 = -7.5 \sin t$ とした場合の Poincaré 写像で、Ueda のカオスアトラクタと呼ばれている⁹⁾。また、カオスは海上構造物の衝撃振動系の非周期運動として存在することも知られている⁸⁾。このような状況を考えると、一般的な建築構造物の正弦波応答にカオスが現れるか否かは興味深い問題であるが、残念ながら、現時点で筆者らは Ueda の解⁹⁾として知られる場合以外の例を見い出していない。しかしながら、履歴曲線を線形区間に分割して取り扱う従来の弾塑性応答解析を考えれば、重要なことは、多様な解を含むカオス力学系の振動現象をそのような手法でどこまで近似できるかであると考えられる。

ここでは、Fig.16に示す免震構造用のアイソレータに代表される非線形の硬化バネを持つ 1 質点系に、大振幅の地震動が作用する場合の応答について考える。非線形バネを免震構造用アイソレータ

Fig.14 Poincaré写像の概念図

Fig.15 Uedaのカオスアトラクタ

一に限定するわけではないが、ここでは一応実験結果¹⁰⁾を参照して、

$$F = 0.8x + 2.67 \cdot 10^{-3}x^3 \quad (12)$$

と定めた。区間線形近似バネは、この非線形バネ

Fig.16 免震構造用アイソレータの履歴特性

Fig.17 硬化バネの履歴特性と線形区間近似

を最大変位80cm まで変形可能として、10cm 毎に区切った場合と20cm にした場合を準備した (Fig. 17)。なお、構造物の固有周期は1.0秒と3.0秒、減衰定数は5 %である。また、応答計算には Runge Kutta 法を用い、時間間隔は繰り返し回数が1千万回程度まで誤差が集積しないことを数値的に確認した後、1/1000秒とした。

3.3 硬化バネを持つ1質点系の大振幅地動に対する非線形応答

Fig.18 (a)は、弾性域での固有周期が1秒の質点に周期0.5秒振幅150kineの正弦波が作用した時の応答変位を時間軸に対して示したもので、(b)は周期1秒振幅150kineの正弦波、(c)は、最大速度を同様な振幅に修正したEl Centro 1940 NS成分に対する応答変位である。図中の太線が非線形応答、細線が線形区間を10cmに区切って近似した場合を示している。正弦波応答の場合、両者の差は少ないが、El Centro 1940による応答では、3~5秒、10~20秒の区間で差が顕著に現れている。Fig.19は、同様な地震波に対して線形区間を20cmに区切った場合を非線形解析と比較した場合で、両者の差は極めて顕著である。Fig.20は、弾性域での固有周期が3秒の質点に同様なEl

Fig.18 大振幅の地動を受ける1質点系の非線形応答(固有周期1秒; 線形区間10cm刻)

Fig.19 大振幅の地動を受ける1質点系の非線形応答(固有周期1秒; 線形区間20cm刻)

Fig.20 大振幅の地震を受ける1質点系の非線形応答(固有周期3秒;線形区間10cm刻)

Fig.21 固有周期の僅かな差による軌道の分離

Fig.22 僅かな初期変位による軌道の分離

Fig.23 強制Duffing の方程式における共存する周期的アトラクタ(Thompson and Stewart 1986⁹⁾より)

Centro 1940 NS が作用した場合の応答変位を比較したものである。非線形解析と線形区間近似による結果は、10秒以降の時間領域で大きく違っており、どちらが現実の応答により近いかという議論を別にしても着目に値する。Fig.21は、弾性域での固有周期が1秒の質点と0.98秒の質点の同様な El Centro 1940 NS に対する変位応答を比較したもので、Fig.22は、前者に1cmの初期変位を与えた場合の変位応答の比較を示している。カオス現象ほど顕著ではないが、明らかに固有周期の僅かな差や初期条件の差に対して系が鋭敏に反応している。また、このような硬化バネを持つ1質点系の応答の性質は、Duffing の方程式において強制力が同一の余弦波であっても、位相平面上の異なる点から出発した振動はやがて異なる吸引軌道(アトラクタ)を描き、Fig.23に示す5のパターンに分かれること⁹⁾からも定性的には想像できる。

4. まとめ

フラクタル幾何学を建築設計に結びつけそれ発

展させることにより、雲や樹木などの自然界に見られる形のシステムを持つ建築物を造ることが可能であると思われる。さらに、こうした技術は、自然の景観により調和した建築物を造ることに役立つものと考えられる。

またカオスについては、カオス現象にのみ着目するのではなく、非線形方程式に支配される系の問題として建築物の弾塑性応答を考えることの必要性を指摘した。また、実際の構造物の履歴曲線は複雑で、免震構造用アイソレータの場合も高減衰ダンパーと組み合わせるなどの改良が加えられているので、ここで述べた現象を明らかにするには、さらに精密な解析と実験が必要となろう。しかし、大振幅の地震を受ける1質点系の応答をカオス力学系の問題として捉えた場合、初期条件の僅かな違いが応答変位の大きな差となって現れる現象は、大地震による建築物の損傷にバラツキが見られることに無関係ではないかもしれない。また、同じ建物であっても、施工時の精度が原因で生じた僅かな初期変位により、地震応答は大きく変化するかもしれない。カオスは、こうした新し

い視点を構造技術にもたらす可能性を秘めているように思われる。

【謝辞】本稿を纏めるに際し、データ処理に労を煩わせた東京電機大学大学院生相沢雅人君、卒論生の前稔文君、鈴木則貴君、門田晋二君に謝意を表します。また、元大学院生岩上信夫氏(現^(株)熊谷組)にも感謝します。

参 考 文 献

- 1) M.F.Barnsley, "Fractals Everywhere," Academic Press, 1988
- 2) 石村貞夫、石村園子：フラクタル数学，東京図書，1990年
- 3) B.B.Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature," Freeman, San Francisco, 1982
- 4) 朝山秀一，岩上信夫：2つの縮小率を持つフラクタル幾何学図形に基づくイメージ生成と空間デザイン，第18回情報システム利用技術シンポジウム，pp.193～198，1995年12月
- 5) 高安秀樹：フラクタル，朝倉書店

- 6) 朝山秀一，岩上信夫：反復関数システムを用いた建築骨組のイメージ生成，第17回情報システム利用技術シンポジウム，pp.217～222，1994年12月
- 7) 早間 慧：カオス力学の基礎，現代数学社
- 8) J.M.T.Thompson, H.B. Stewart, 武者利光 監訳，橋口住久 訳：非線形力学とカオス，オーム社，1988年
- 9) 上田皖亮：非線形性に基づく確率統計現象，電気学会論文誌，pp.167～173，1978年 3月
- 10) 多田英之：免震構造に関する実物実験(その10)-実施構造物の Isolator II-日本建築学会大会学術講演梗概集，pp.817～818，1986年10月
(1997年3月10日 受付)

[問い合わせ先]

〒101 千代田区神田錦町2-2
東京電機大学工学部
建築学科教授(工博)
朝山 秀一
TEL：03-5280-3425
FAX：03-5280-3572
E-mail：asayama@cck.dendai.ac.jp

著 者 紹 介

朝山 秀一 (あさやま しゅういち)

東京電機工学部建築学科

昭和51年3月 東京電機大学工学部建築学科卒業。昭和53年3月 東京工業大学大学院総合理工学研究科社会開発工学専攻修士課程修了。昭和53年4月 東京電機大学工学部助手。平成2年3月 工学博士(東京工業大学)。平成2年10月 東京電機大学工学部講師。平成3年10月 同助教授。平成8年10月 同教授。