ファジィシステムの 周期時変システムとしての安定解析†

渡辺 桂吾*¹ 佐藤 和也*¹ 野見山 章*²

ファジィ制御系の安定性の議論を容易ににあたえる方法として、関数型ファジィ推論を用いたファジィモデルを構築し、そのモデルを利用するファジィ制御法がすでに提案されている。このシステムの漸近安定性の議論では、線形サブシステムの行列から得られる複数のリアプノフ不等式が十分条件として導出され、その安定性解析は、不等式に共通な正定対称行列を求める、いわゆる共通リアプノフ解(共通解)を求める問題に帰着している。これまでの解析法は、この共通解の存在によって「ファジィシステムが大域的漸近安定かどうか」を判定するものである。しかしながら従来の解析法によれば、実際に初期値によっては安定なファジィシステムの挙動が得られる場合でも共通解が存在しない、つまり「ファジィシステムは大域的漸近安定かどうか判別できない」と結論づけるしかない場合が存在する。

本稿では、関数型ファジィ推論から構成されるファジィシステムを、ある時刻で各サブモデルが混合されて利用される「混合システム」と、各時刻では単一モデルが利用されるが時間推移として異なるサブモデルがある周期で繰り返される「周期時変システム」とに分けて安定性の解析を行うことを提案する。すなわち、これら2種類の特殊なシステムの安定解析を行うことにより、ファジィシステムの局所的漸近安定性の解析が行えることを示す。この方法によれば、初期値によっては安定な挙動が得られるシステムでも共通解が存在しない、つまり従来法では判別できない場合でもシステムが局所漸近安定であることが解析的に結論づけられる。

キーワード：ファジィ制御、ファジィシステム、ファジィモデリング、リアプノフの安定定理、周期時変システム、安定解析

1. はじめに

従来のモデルを用いないファジィ制御法[1]が、その制御系の安定性の議論を容易に与えないことから、田中・菅野[2]あるいはTanaka & Sugeno[3]は、ある種のモデルに基づく方法として、関数型ファジィ推論[1]を用いたファジィモデルを構築し、そのモデルを利用するファジィ制御法を既に提案している。このファジィシステムの漸近安定性の議論では、線形サブ(または基礎)システム行列から得られる複数のリアプノフ不等式が十分条件として導出され、その安定性解析は、不等式に共通な正定対称行列を求める、いわゆる共通リアプノフ解 P を求める問題に帰着されている[4]。

この共通解を求めるための必要条件として、田中・菅野[2]はサブシステム行列の積 $A_i A_j, i \neq j$ が安定であることを示している。また、この行列が安定でも P が効果的に見つけられないことがあることから、彼らはさらに P の存在に対する必要十分条件を与えてい

る[2],[4]。さらに、 $A_i A_j$ が安定であっても、共通解が存在しないことがあることが、この必要十分条件を用いて指摘されている[4]。(なお、最近 LMI (Linear Matrix Inequality) に基づく方法で、共通解 P が存在するならば必ずその解を見つけないことができることが報告されている[5].)このように、田中・菅野のファジィシステムの安定解析では、共通解の存在によって「ファジィシステムが大域的漸近安定かどうか」を判断するものである。したがって、この安定解析法からすると、共通解が存在しないと判断されたときには単に「ファジィシステムは大域的漸近安定かどうかわからない」と結論付けるしかない。しかしながら、このような場合でもシミュレーション上では、実際に初期値によっては安定なファジィシステムの挙動が得られる場合があることに注意しなくてはならない。

本稿では、関数型ファジィ推論から構成されるファジィシステムを、ある時刻で各サブモデルが混合されて利用される「混合システム」と、各時刻では単一モデルが利用されるが時間推移として異なるサブモデルがある周期で繰り返される「周期時変システム」とに分けて安定性の解析を行うことを提案する。特に $A_i A_j$ が不安定で共通解 P が存在しないと判断されたとき、あるいは $A_i A_j$ が安定であるのに P が存在しないと判断されたときに、ファジィシステムは「上記二種類の特殊なシステムとして、安定か不安定か」を議論することによって、より詳細にしかも実際的なファジィシ

† Stability Analysis of Fuzzy Systems as a Periodically Time-Varying System
Keigo WATANABE, Kazuya SATO and Akira NOMIYAMA

*¹ 佐賀大学理工学部機械システム工学科
Department of Mechanical Engineering, Saga University

*² 西日本ソフトサービス
Nishinohon Soft Service Co. Ltd.

システムの安定解析が行えることを示す。もちろん、共通リアプノフ解が存在するときには、ファジィシステムはこれら両者の特殊なシステムとしても漸近安定といえることも示す。

2. ファジィシステム

ここでは、ファジィシステムとしては高木・菅野のファジィモデル法[1], [2]を使用する。いま、 M 個の線形時不変サブ(または基礎)モデルを次式のように記述する。

$$x_i(k+1) = A_i x(k) \quad (1)$$

ただし、 $x(k) \in \mathbf{R}^n$ (すべてのモデルに共通な時刻 k での状態ベクトル)、 $x_i(k+1) \in \mathbf{R}^n$ (モデル i の時刻 $k+1$ での状態ベクトル)、および $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ (モデル i のシステム行列)とする。このとき、時刻 $k+1$ でのファジィシステムの状態値は

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^M p_i(k) A_i x(k) \quad (2)$$

で表せる。ただし、 $p_i(k)$ はルール i の正規化適合度

$$p_i(k) = \frac{w_i(k)}{\sum_{j=1}^M w_j(k)} \quad (3)$$

とする。ここで、 $w_i(k)$ はルール i の適合度である。

2.1 田中・菅野の安定定理

上記のファジィシステムの漸近安定性に関しては、つぎの田中・菅野の安定定理[3], [4]が知られている。

◀定理1▶ M 個の連立リアプノフ不等式

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad (4)$$

を満たす正定対称行列 P が存在するならば、ファジィシステム(2)は大域的漸近安定である。ただし、 A_i は安定行列とする。

◀定理2▶ 不等式(4)を満たす行列 P が存在するならば、

$$A_i A_j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (5)$$

は安定行列である。

定理2は、式(4)を満たす P が存在するための必要条件であることから、実際には $A_i A_j$ が安定であっても共通解 P を効率的に求めることができない状況が起きる。そこで、さらに田中・菅野[2]は2つの写像を導入し、 P の存在性に対する必要十分条件を与えている。文献[4]では、 $A_i A_j$ が安定であっても、 P が存在しないケースをこの条件を用いて示している。ここで注目することは、共通解 P が存在しなくとも $A_i A_j$ が安定な場合、実際にシミュレーションを行うと、初期値

によっては安定な挙動を示しているにもかかわらず、田中・菅野の安定解析法によると「このファジィシステムは漸近安定かどうか分からない」としか結論付けることができないことである。このような納得のいかない状況が起きるのは、明らかに複数のサブシステムから構成される局所漸近安定なファジィシステムを考察の対象とせずに、「ファジィシステムが大域的漸近安定であるかどうか」のみを判断するからである。換言すると、上記のファジィシステムについての安定解析は、もし共通解 P が存在しなかったときは、もう少し細かくファジィシステムについての局所漸近安定性を吟味する必要があるともいえる。

また、川本ら[6]は定理2と類似な条件としてつぎの系1を述べている。

◀系1▶ 式(4)を満たす M 個の共通解 P が存在するならば

$$\left(\sum_{i=1}^M A_i \right)^T P \left(\sum_{i=1}^M A_i \right) - P < 0 \quad (6)$$

が成立し、

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M A_i$$

は安定行列である。

川本らはこの系1により与えられるリアプノフ解の領域が定理2で与えられるものとほぼ同様なので、共通解を求める際にこの系を十分条件として用いるとモデル数が多い場合には実用的な方法であると主張している。しかし本稿では、この条件は特殊なシステムにおいて定理2とは別の役割を果たすことを示す。

3. 共通解と混合システムとの関係

ここでは、ファジィシステム(2)が各時刻において、各モデルの重み付き和として動作する場合を考える。ただし、 $p_i(k) \neq 0$ または $p_i(k) \neq 1$ とし、重み付きの形態はある周期で規則的には繰り返さないとし、また $p_i(k)$ の変化はゆるやかに起きるものとする。このようなファジィシステムをここでは「混合システム」と呼ぶことにする。このとき、つぎの系を得る。

◀系2▶ 式(4)を満たす M 個の共通解 P が存在するならば

$$\left(\sum_{i=1}^M p_i(k) A_i \right)^T P \left(\sum_{i=1}^M p_i(k) A_i \right) - P < 0 \quad (7)$$

が成立し、

$$\sum_{i=1}^M p_i(k) A_i$$

は安定行列である。

この系は定理1と同様な証明で行える。したがって、あるモデルのルール適合度が完全に1または0を取らないと拘束されている以外は、定理1と同じと考えてもよい。しかし実際にこの系も十分条件であることから、共通解 P が存在すればファジィシステムの混合システムとしての漸近安定性は保証されるが、混合システムが安定、つまり $p_i(k) \neq 0$ または $p_i(k) \neq 1$ である $\forall p_i(k)$ に対して $\sum_{i=1}^M p_i(k) A_i$ が安定行列でも、必ずしも共通解は存在しないことに注意しなくてはならない。

また、川本らの系1はこの系2において、各モデルが等ルール適合度、つまり $p_1(k) = p_2(k) = \dots = p_M(k) \equiv 1/M$ を取った場合に対応していることが分かる。

4. 共通解と周期時変システムとの関係

ここでは、前節とは逆にファジィシステム(2)が各時刻において、ある単一モデルのみとして動作する場合を考える。したがって、ある任意のモデル i に対する適合度は $p_i(k) = 0$ または $p_i(k) = 1$ とし、 $p_i(k) = 1$ を取るサブモデルの時間方向への組み合わせ数が直接周期 L として定義され、 $A_i A_j$ (つまり、 $p_j(k) = 1$, $p_i(k+1) = 1$) ならば $L=2$, $A_i A_j A_l$ (つまり、 $p_l(k) = 1$, $p_j(k+1) = 1$, $p_i(k+2) = 1$) ならば $L=3$ のように解釈される。ただし、時間遷移は組み合わせの右から左へ移動するものと仮定する。このようなファジィシステムをここでは「周期時変システム」と呼ぶ。なお、 $p_i(k) = 1$ を取るが周期性がない場合は、 $p_i(k) = 1$ を取るサブモデルを単独のファジィシステムとして考える。

このとき、つぎの定理を得る。

《定理3》 不等式(4)を満たす行列 P が存在するための必要十分条件は、サブモデルのシステム行列 $\{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ から構成される、順列組み合わせ行列(つまり、モノドロミ行列[7])

$$A_i A_j, A_i A_j A_k, A_i A_j A_k A_l, \dots \quad (8)$$

がすべて安定行列であることである。

(証明) 十分性：共通解 P が以下のように存在するでしょう。

$$A_i^T P A_i - P < 0, \quad i=1, \dots, M \quad (9)$$

このとき

$$A_j^T A_i^T P A_i A_j - A_j^T P A_j < 0, \quad i, j=1, \dots, M \quad (10)$$

となる。したがって、式(9)、(10)より

$$\begin{aligned} A_j^T A_i^T P A_i A_j - P \\ < A_j^T A_i^T P A_i A_j - A_j^T P A_j < 0 \end{aligned} \quad (11)$$

となることから、 $A_i A_j$ は安定行列でなくてはならな

い。さらに、式(10)より

$$A_k^T A_j^T A_i^T P A_i A_j A_k - A_k^T A_j^T P A_j A_k < 0 \quad (12)$$

となるので、

$$\begin{aligned} A_k^T A_j^T A_i^T P A_i A_j A_k - P \\ < A_k^T A_j^T A_i^T P A_i A_j A_k - A_j^T P A_j \\ < A_k^T A_j^T A_i^T P A_i A_j A_k - A_k^T A_j^T P A_j A_k \\ < 0 \end{aligned} \quad (13)$$

となることから、 $A_i A_j A_k$ は安定行列でなくてはならない。以下、同様にすると $A_i A_j A_k A_l$, $A_i A_j A_k A_l A_m, \dots$ がすべて安定行列となることがいえる。

必要性：まず、 A_i は仮定より安定行列であるので

$$A_i^T P_i A_i - P_i < 0 \quad (14)$$

となる正定対称行列 P_i が存在する。つぎに、 $A_i A_j$ が安定行列とすると

$$A_j^T A_i^T P_{i+j} A_i A_j - P_{i+j} < 0 \quad (15)$$

となる正定対称行列 P_{i+j} が存在する。また、式(14)より

$$A_j^T A_i^T P_i A_i A_j - A_j^T P_i A_j < 0 \quad (16)$$

がいえる。このとき式(15)から式(16)を引くと

$$\begin{aligned} A_j^T A_i^T (P_{i+j} - P_i) A_i A_j \\ + A_j^T P_i A_j - P_{i+j} < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

となり、この式から $A_i A_j \neq A_j$ に対して $P_i = P_{i+j}$ のとき

$$A_j^T P_i A_j - P_i < 0 \quad (18)$$

を満たす $P_i = P_j$ なる正定対称行列が得られる。

さらに、 $A_i A_j A_k$ が安定行列であるとする

$$A_k^T A_j^T A_i^T P_{i+j+k} A_i A_j A_k - P_{i+j+k} < 0 \quad (19)$$

となる正定対称行列 P_{i+j+k} が存在する。また、式(15)より

$$A_k^T A_j^T A_i^T P_{i+j} A_i A_j A_k - A_k^T P_{i+j} A_k < 0 \quad (20)$$

となる。このとき式(19)から式(20)を引くと

$$\begin{aligned} A_k^T A_j^T A_i^T (P_{i+j+k} - P_{i+j}) A_i A_j A_k \\ + A_k^T P_{i+j} A_k - P_{i+j+k} < 0 \end{aligned} \quad (21)$$

となることから、 $A_i A_j A_k \neq A_k$ に対して $P_{i+j} = P_{i+j+k}$ のとき

$$A_k^T P_{i+j} A_k - P_{i+j} < 0 \quad (22)$$

を満たす $P_k = P_{i+j}$ なる正定対称行列が求まる。

以下、同様にすると $P_{i+j+k} = P_{i+j+k+l}$, $P_{i+j+k+l} = P_{i+j+k+l+m}, \dots$ が得られる。よって、 $P_i = P_{i+j} = P_{i+j+k} = P_{i+j+k+l} = P_{i+j+k+l+m} = \dots \triangleq P$ となるためには、 $A_i A_j$, $A_i A_j A_k, \dots$ がすべて安定行列であることが必要である。

□

この定理から、サブモデルのシステム行列 $\{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ から構成される、順列組み合わせ行列において、少なくとも一つの行列が不安定ならば式(4)を満たす共通解 P は存在しないことがいえる。したがって、定理2で $A_i A_j$ の安定性のみを利用して共通解を探す田中・菅野の結果において、 $L=2$ の $A_i A_j$ が安定であるにもかかわらず、共通解が存在しないと判断された例題では、より長周期の組み合わせ行列中に不安定行列が存在することを意味している。

なお、 M 個のサブモデルから周期 L における組み合わせ行列を求める際、その順列組み合わせ行列の総数 $N(L)$ は L の再帰形として

$$N(L) = {}_M C_L \times L! + \sum_{i=1}^{L-1} N(L-i) \times [L-i], \quad M \geq L \quad (23)$$

$$N(L) = N(L-1) \times M, \quad L > M \quad (24)$$

で表現できる。ここで、式(23)の右辺第一項は M 個のモデルから L 個の異なる組み合わせを選択したときの順列総数を、および第2項は $L-i$ 個のモデルの重複からなる順列総数を示している。

以上の議論から証明なしにつぎの系を得る。

[系3] 不等式(4)を満たす行列 P が存在するための必要十分条件は、ファジィシステム(2)が周期 $L=\infty$ までのすべての周期時変システムとして漸近安定でなくてはならない。

[系4] サブモデルのシステム行列 $\{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ から構成される、順列組み合わせ行列において、少なくとも周期 L までのすべての組み合わせ行列が安定であるならば、ファジィシステム(2)は周期 L までの周期時変システムとしては漸近安定である。

5. 線形時変システムとしてのファジィシステム

ファジィシステム(2)をいま、

$$x(k+1) = D(k)x(k), \quad D(k) \triangleq \sum_{i=1}^M p_i(k) A_i \quad (25)$$

のような線形時変システムとして考える。すると式(25)が漸近安定であるための必要・十分条件は

$$\|\Phi(k, 0)\| \leq N \quad (26)$$

なる有限値 N が存在し、しかも

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi(k, 0)\| = 0 \quad (27)$$

となることは、よく知られている[5]。ただし、 $\Phi(k, 0)$ は時刻0から任意時刻 k までのシステム(25)の状態遷移行列である。事実、式(25)の $D(k)$ は $p_i(k)$ によっ

て左右され、したがって $p_i(k)$ の取られ方によって遷移行列 $\Phi(k, 0)$ の表現(または形)も変わることになる。つまり、このようなファジィシステム表現の枠組みで考えると、線形時変システムとしての式(25)の状態遷移の可能な形は、正規化適合度 $p_i(k) \neq 1$ (または $p_i(k) \neq 0$)の時間的変化がゆるやかで、しかも重み付き形態が時間方向に対して周期性を持たない「混合システム」か、または $p_i(k) = 1$ (または $p_i(k) = 0$)の値を周期的に持つ「周期時変システム」か、あるいはそれらの合成かである。ただし、 $p_i(k) = 1$ (または $p_i(k) = 0$)の値を時間に対して単発的に、しかも不規則的に取る場合は、実際の安定解析では周期時変システムの範疇に含めて行うことができる。

また、1, 0以外の定数比率で、たとえば、 $p_1(k) = 0.7, p_2(k) = 0.3$ (あるいは逆に、 $p_1(k) = 0.3, p_2(k) = 0.7$)などの適合度でシステム(25)が周期時変システムになる場合も実際にはあると思われる。しかし、 $p_i(k) = 1$ での周期時変システムで、たとえば $L=2$ の $A_1 A_2$ の固有値を λ_1, λ_2 (安定根)とすると、 $p_i(k) = 0.7$ での周期時変システムは、 $0.7^2 A_1 A_2$ の固有値が $0.7^2 \lambda_1, 0.7^2 \lambda_2$ となり、常に $p_i(k) = 1$ での周期時変システムよりも、より安定になることが、固有値の性質からいえる。したがって、安定性の解析では最悪のケース、つまり $p_2(k) = 1, p_1(k+1) = 1$ (または $p_1(k) = 0, p_2(k+1) = 0$)を考えておけば十分であることがわかる。

このように、共通解 P が存在しないときには、すでに式(2)、または式(25)は大域的漸近安定ではないことから、ファジィシステムが局所的漸近安定であるためには、明らかに「混合システム」として安定か、「ある有限の周期までの周期時変システム」として安定か、あるいはそれらの合成として安定か、でなくてはならない。

6. 解析例

ここでは、田中・菅野[2]によって扱われた3つの例題を本稿の観点から解析した例を示す。

6.1 例1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.503 & -0.588 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.361 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この例は田中・菅野において、 P_1 が共通解 P となる例である。したがって、共通解が求まったことを前提

にして、本解析法を用いてファジィシステムは混合システムとしても周期時変システムとしても安定な例であることを再チェックしてみる。

[混合システム]

以下の計算を容易にするために、いま一般形として

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を考えると、混合システムのシステム行列は

$$D(k) = p_1(k)A + (1-p_1(k))B \\ = \begin{bmatrix} ((a_1-b_1)p_1(k)+b_1) & (a_2-b_2)p_1(k)+b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。以後、正規化適合度 $p_1(k)$ (変数) を p_1 と表記する。一般には、線形時変システムの安定性は、すべての時刻 k におけるシステム行列 $D(k)$ の固有値のみでは判断できないが、混合システムでは急激なモデル適合度の変化がないものと仮定されていることから、ここでは時不変システムとみなして解析する。したがって

$$|\lambda I - D| = \lambda^2 - [(a_1-b_1)p_1+b_1]\lambda - [(a_2-b_2)p_1+b_2] = 0$$

より

$$\lambda = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

を得る。ただし、 $\alpha = -[(a_1-b_1)p_1+b_1]$, $\beta = -[(a_2-b_2)p_1+b_2]$ である。

ケース 1: $\alpha^2 - 4\beta < 0$ のとき

混合システムが安定であるためには、 $0 < p_1 < 1$ に対して $\beta = -[(a_2-b_2)p_1+b_2] < 1$ でなくてはならない。

ケース 2: $\alpha^2 - 4\beta = 0$ のとき

混合システムが安定であるためには、 $0 < p_1 < 1$ に対して $|\alpha| = |(a_1-b_1)p_1+b_1| < 2$ でなくてはならない。

ケース 3: $\alpha^2 - 4\beta > 0$ のとき

混合システムが安定であるためには、 $0 < p_1 < 1$ に対して $|\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}| < 2$ でなくてはならない。

この例題システムは $\alpha = 0.503p_1 + 1$, $\beta = 0.227p_1 + 0.361$ であるので、 $0 < p_1 < 1$ に対して $\alpha^2 - 4\beta < 0$ となることより

$$\beta = 0.227p_1 + 0.361 < 1$$

となり、混合システムとして安定である。

[周期時変システム]

$L=1$

$$\lambda(A_1) = \{0.7515 \pm 0.1525i\}$$

$$\lambda(A_2) = \{0.5 \pm 0.3332i\}$$

$L=2$

$$\lambda(A_1A_2) = \{0.277 \pm 0.3682i\}$$

$$\lambda(A_2A_1) = \lambda(A_1A_2)$$

$$\lambda(A_1A_1) = \{0.545 \pm 0.2292i\}$$

$$\lambda(A_2A_2) = \{0.139 \pm 0.3332i\}$$

$L=3$

$$\lambda(A_1A_2A_1) = \{0.1223 \pm 0.3314i\}$$

$$\lambda(A_1A_2A_2) = \{0.0057 \pm 0.2768i\}$$

$$\lambda(A_2A_1A_1) = \lambda(A_1A_2A_1)$$

$$\lambda(A_2A_1A_2) = \lambda(A_1A_2A_2)$$

$$\lambda(A_1A_1A_1) = \{0.372 \pm 0.2548i\}$$

$$\lambda(A_1A_1A_2) = \lambda(A_1A_2A_1)$$

$$\lambda(A_2A_2A_1) = \lambda(A_1A_2A_2)$$

$$\lambda(A_2A_2A_2) = \{-0.0415 \pm 0.2129i\}$$

$L=4$

⋮

以下、実際の計算によって、すべての順列組み合わせ行列が安定となることを確かめることができるが、省略する。事実、この例は共通解が存在することから [2]、すべてのモノドロミ行列は安定行列となること、定理 3 から推察できる。よって、このファジィシステムは任意の周期時変システムとしても安定である。なお、 A_i が安定行列ならば $A_iA_i \dots A_i$ は安定行列であることは線形システムでは自明であるが、あえて周期解の順列組み合わせのために計算したことを付記しておく。

6.2 例 2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この例は田中・菅野において、 A_iA_j が不安定で共通解 P が存在しない例である。

[混合システム]

このファジィシステムは $\alpha = -2p_1 + 1$, $\beta = 0.5$ であるので、 $0 < p_1 < 1$ に対して $\alpha^2 - 4\beta < 0$ となることより

$$\beta = 0.5 < 1$$

となり、混合システムとしては安定である。

[周期時変システム]

$L=1$

$$\lambda(A_1) = \{0.5 \pm 0.5i\}$$

$$\lambda(A_2) = \{-0.5 \pm 0.5i\}$$

$L=2$

$$\lambda(A_1A_2) = \{-1.866, -0.134\}$$

$$\lambda(A_2A_1) = \lambda(A_1A_2)$$

$$\lambda(A_1A_1) = \{\pm 0.5i\}$$

$$\lambda(A_2A_2) = \{\pm 0.5i\}$$

$L=3$

$$\lambda(A_1A_2A_1) = \{-1.4114, -0.0886\}$$

$$\lambda(A_1A_2A_2) = \{1.4114, 0.0886\}$$

$$\lambda(A_2A_1A_1) = \lambda(A_1A_2A_1)$$

$$\lambda(A_2A_1A_2) = \lambda(A_1A_2A_2)$$

$$\lambda(A_1A_1A_1) = \{-0.25 \pm 0.25i\}$$

$$\lambda(A_1A_1A_2) = \lambda(A_1A_2A_1)$$

$$\lambda(A_2A_2A_1) = \lambda(A_1A_2A_2)$$

$$\lambda(A_2A_2A_2) = \{0.25 \pm 0.25i\}$$

この解析結果から、このファジィシステムは周期 $L=2$ の周期時変システムとしても、 $L=3$ の周期時変システムとしても不安定であるといえる。

実際、図1のような田中[4]と同様な前件部メンバーシップ関数および初期値 $x(0) = [0.9 \quad -0.7]^T$ の下でシミュレーションを行った。ただし、図1のメンバーシップ関数のラベル Small はシステム行列 A_1 を有するサブモデル1に対するものを、ラベル Big はシステム行列 A_2 を有するサブモデル2に対するものを示している。図2-aと図2-bは、それぞれのサブモデルを単独で動作させたときの状態変数の挙動を示している。また、図2-cはそれらの2つのシステム行列を持つ式(2)のファジィシステムとしての応答を示している。ここに、図3に示すルール(または、モデル)適合度の計算では、このファジィシステムの第2番目の状態 $x_2(k)$ を利用することに注意されたい。

図2から分かるようにサブモデルの状態は安定であるがファジィシステムの状態は不安定挙動を示しており、特に図3のルール適合度に注目する必要がある。つまり、もし第8ステップから周期システムに入ったとすると、 $L=3$ の $\Phi(k+L, k) = A_2A_1A_2$ の状態遷移行列でシステムが繰り返されていることがわかる。したがって、上記の結果とこのシミュレーション結果から、このファジィシステムは $L=3$ の周期時変システムとして実際には不安定挙動を示しているといえる。これ

図1 2つのサブモデルのメンバーシップ関数

は、第9ステップから $\Phi(k+L, k) = A_2A_2A_1$ の周期時変システムに入ったと解釈しても、その状態遷移行列が不安定行列であることから、同様なことがいえる。

図2-a 例2のサブモデル1の状態値

図2-b 例2のサブモデル2の状態値

図2-c 例2のファジィシステムの状態値

図3 例2のルール適合度

6.3 例3

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この例は田中・菅野または田中[4]において, $A_i A_j$ が安定であるのに共通解 P が存在しない例である。

[混合システム]

この例題システムは $\alpha = -1.2 p_1 + 1, \beta = 0.5$ であるので, $0 < p_1 < 1$ に対して $\alpha^2 - 4\beta < 0$ となることより

$$\beta = 0.5 < 1$$

となり, 混合システムとしては例2のシステムと同様に安定である。

[周期時変システム]

$L=1$

$$\lambda(A_1) = \{0.1 \pm 0.7i\}$$

$$\lambda(A_2) = \{-0.5 \pm 0.5i\}$$

$L=2$

$$\lambda(A_1 A_2) = \{-0.9317, -0.2683\}$$

$$\lambda(A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2)$$

$$\lambda(A_1 A_1) = \{-0.48 \pm 0.14i\}$$

$$\lambda(A_2 A_2) = \{\pm 0.5i\}$$

$L=3$

$$\lambda(A_1 A_2 A_1) = \{0.13 \pm 0.3288i\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_2) = \{0.9713, 0.1287\}$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_1) = \{-0.146 \pm 0.322i\}$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_2) = \{0.25 \pm 0.25i\}$$

$L=4$

$$\lambda(A_1 A_2 A_1 A_1) = \{0.1168, 0.5352\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_1 A_2) = \{0.868, 0.072\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_2 A_1) = \{0.11 \pm 0.2245i\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_2 A_2) = \{-0.25, -0.25\}$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_1 A_1) = \{0.5352, 0.1168\}$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_1 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_2 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_1 A_1) = \{0.2108 \pm 0.1344i\}$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_1 A_2) = \lambda(A_2 A_1 A_1 A_1)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_1)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_2 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_1 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_1 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_2 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2)$$

$L=5$

$$\lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_1) = \{0.0002 \pm 0.1768i\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_2) = \{-0.2199, -0.1421\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_1 A_2 A_1) = \{-0.1421, -0.2199\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_1 A_2 A_2) = \{-0.03, -1.04\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_2 A_1 A_1) = \{-0.072, -0.434\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_2 A_1 A_2) = \{-1.04, -0.03\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_1) = \{-0.175 \pm 0.025i\}$$

$$\lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_2) = \{-0.025 \pm 0.175i\}$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_1 A_1 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_1 A_1 A_2) = \{-0.434, -0.072\}$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_1 A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_1 A_2 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_2 A_1 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_2 A_1 A_2) = \{-1.04, -0.03\}$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_2 A_2 A_1) = \{-1.04, -0.03\}$$

$$\lambda(A_2 A_1 A_2 A_2 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_1 A_1 A_1) = \{0.1152 \pm 0.1341i\}$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_1 A_1 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_1)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_1 A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_1)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_1 A_2 A_2) = \lambda(A_2 A_1 A_1 A_1 A_2)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_2 A_1 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_1)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_2 A_1 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_1 A_1 A_2)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_2 A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_1 A_1)$$

$$\lambda(A_1 A_1 A_2 A_2 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_1 A_1 A_1) = \lambda(A_2 A_1 A_1 A_1 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_1 A_1 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_1 A_2 A_1) = \{-0.03, -1.04\}$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_1 A_2 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_2 A_1 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_1)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_2 A_1 A_2) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_2 A_2 A_1) = \lambda(A_1 A_2 A_2 A_2 A_2)$$

$$\lambda(A_2 A_2 A_2 A_2 A_2) = \{0.125 \pm 0.125i\}$$

$L=5$ においては, サブモデル A_2 を 3 度使用するシ

システムで、最初の A_2 から最後の A_2 の間で少なくとも 1 回以上のサブモデル A_1 を不連続的に使うシステムが不安定になっていることがわかる。以上の解析結果から、このファジィシステムは少なくとも周期 $L=4$ の周期時変システムとしては安定であるといえる。

実際、例 2 と同様な前件部メンバーシップ関数および初期値 $x(0) = [1.0 \quad -1.0]^T$ の下でシミュレーションを行ったときの状態値の遷移を図 4 に、またその時の

図4-a 例3のサブモデル1の状態値

図4-b 例3のサブモデル2の状態値

図4-c 例3のファジィシステムの状態値

図5 例3のルール適合度

ルール適合度を図 5 にそれぞれ示してある。図 4 からわかるようにシステムは、時刻 $k=4$ 以降混合システムとしての安定挙動を示している。

なお、図は省略するが、初期値を $x(0) = [1 \quad -2]^T$ と $x(0) = [1 \quad 2]^T$ に変更すると、このファジィシステムは、それぞれ $L=3$ の $\Phi(k+L, k) = A_2 A_2 A_1$ の安定な周期時変システムと安定な混合システムの合成システムとして、および $L=3$ の $\Phi(k+L, k) = A_1 A_2 A_2$ の安定な周期時変システムとして動作することを付記しておく。

7. おわりに

本稿では高木・菅野のファジィシステムに対して、田中・菅野の共通リアップノフ解を求める方法のさらに詳細な解析方法を示した。すなわち、田中・菅野の安定解析法では、大域的漸近安定性を議論しているのに対して、ここではファジィシステムを「混合システム」と「周期時変システム」の2つの特殊なシステムに分けて解析することで、局所的漸近安定性の議論が可能となることを明らかにした。

従来の解析方法では $A_i A_j$ が安定であるにもかかわらず共通解が存在しないときは、「ファジィシステムは大域的漸近安定かどうかかわからない」と結論付けられるのに対して、本解析方法では、さらにサブモデルの時間方向への順列組み合わせを考えることで、「ファジィシステムは少なくともある有限の周期 L までの周期時変システムとしては漸近安定である」といえることを示した。

また、解析上は共通解が存在しなくても、ファジィシステムが「ある程度の周期長までの周期時変システムとして漸近安定」であり、しかも「混合システムとして漸近安定」であれば、実際には安定な挙動がシミ

ュレーション上では得られることも示した。しかしながら、 $L=2$ とか $L=3$ のような短周期での周期時変システムとしての安定性が確保されていないときには、たとえ混合システムとしての安定性が解析上確保されていても、実際には安定な挙動を得ることは難しい。もちろん、共通リアプノフ解が存在するときには、ファジィシステムはこれら両者の特殊なシステムとしても漸近安定と言え、特に周期時変システムとしては $L=\infty$ までのあらゆる周期での安定性を保証したことになる。

提案した解析法は、前件部変数1、ルール数2およびサブシステムの次数2の場合に適用したが、前件部の変数が複数個の場合でも、本質的に正規化適合度が式(3)のように表現できるならば、本手法は利用できると思われる。しかし、一般的にルール i の前件部適合度を、それぞれの入力変数の適合度の組み合わせ積として決定すると、ルール i の数が増え、したがって任意の $0 < p_i(k) < 1$ に対する混合システムの固有値解析が容易ではない。また、サブシステムの次数が増えるにつれ、同様な問題が起きる。なお、周期時変システムの解析においては、サブシステムが時不変システムとして表現される限り、このような問題は生じない。今後の別課題としては、上記手法を制御問題[8], [9], [10]に拡張することである。

参 考 文 献

- [1]菅野：ファジィ制御，日刊工業新聞社(1988)
- [2]田中・菅野：ファジィシステムの安定解析とリアプノフ関数の構成法，日本機械学会論文集C, Vol.58, No.550, pp.1427-1434(1992)
- [3]K.Tanaka and M.Sugeno: Stability Analysis and

著 者 紹 介

渡辺 桂吾 (わたなべ けいご)

佐賀大学理工学部機械システム工学科
1976年 徳島大学工学部機械工学科卒業，1978年 同大学院修士課程修了，1980年1月 九州大学助手，1985年4月 静岡大学工業短期大学部助教授，1990年4月 佐賀大学理工学部生産機械工学科助教授，1993年4月 同教授。この間，1987年3月～9月，アテネ工科大学研究員。インテリジェント制御，進化戦略法，行動型ロボット，進化型ロボット等の研究に従事。工学博士。日本機械学会，計測自動制御学会，システム制御情報学会，日本ロボット学会，日本航空宇宙学会，日本ファジィ学会，IEEE各会員。

佐藤 和也 (さとう かずや)

佐賀大学理工学部機械システム工学科
1991年 九州工業大学制御工学科卒業，1993年 同大学院博士前期課程修了，1996年3月 同大学院博士後期課程修了，1996年4月 佐賀大学理工学部生産機械工学科講師。ロボスト制御，適応制御に関する研究に従事。博士(工学)。日本機械学会，計測自動制御学会，システム制御情報学会各会員。

- Design of Fuzzy Control Systems, Fuzzy Sets and Systems, Vol.45, No.2, pp.135-156(1992)
- [4]田中：アドバンストファジィ制御，共立出版(1994)
- [5]田中・池田・Wang：ファジィシステムのより緩い安定条件とLMIに基づく設計法，第12回ファジィシステムシンポジウム論文集，pp.277-280(1996)
- [6]川本・多田・石亀・谷口：田中・菅野のファジィシステム安定定理の拡張，日本ファジィ学会誌，Vol.5, No.5, pp.1190-1199(1993)
- [7]国松・浜田：集中・分布システムの安定論，実教出版(1988)
- [8]K. Tanaka and M. Sano: A Robust Stabilization Problem of Fuzzy Control Systems and Its Application to Backing up Control of a Truck-Trailer, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol.2, No.2, pp.119-134(1994)
- [9]K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang: Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilization, H_∞ Control Theory, and Linear Matrix Inequalities, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol.4, No.1, pp.1-13(1996)
- [10]H. O. Wang, K. Tanaka and M. F. Griffin: An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol.4, No.1, pp.14-23(1996)

(1996年11月 5日 受 付)

(1997年 4月10日 再受付)

[問い合わせ先]

〒840 佐賀市本庄町1番地

佐賀大学理工学部機械システム工学科

渡辺 桂吾

TEL : 0952-28-8602

FAX : 0952-28-8587

E-mail: watanabe@me.saga-u.ac.jp

野見山 章 (のみやま あきら)

西日本ソフトサービス(株)

1971年 九州工業大学制御工学科卒業、
1973年 九州大学工学部助手、1983年 九州松下電器(株)生産技術事業部、1986年 西日本ソフトサービス(株)設立 代表取締役。
非定常空気力、故障検出システム、パターン認識、インテリジェント制御の研究及び、パターン認識装置、半導体実装ロボット(SMT、WB)の製造に従事。計測自動制御学会会員

Stability Analysis of Fuzzy Systems as a Periodically Time-Varying System

by

Keigo WATANABE, Kazuya SATO, Akira NOMIYAMA

Abstract :

It is known that a fuzzy modeling approach is effective for constructing a fuzzy controller based on some fuzzy models. The asymptotic stability of such a fuzzy system can be assured, when existing a common Lyapunov solution to the Lyapunov inequalities for each subsystem. In addition, the stability check of $A_i A_j$ is conventionally used as a necessary condition for searching a common Lyapunov solution, where A_i is a stable system matrix for the i -th subsystem. We sometimes can not conclude whether the fuzzy system is globally asymptotically stable or not, because a common Lyapunov solution does not exist, though $A_i A_j$ is stable.

In this paper, we specialize the fuzzy system as a mixed system or a periodically time-varying system, where in the former case the rule confidences $p_i(k)$ are assumed to have $0 < p_i(k) < 1$, and in the latter case they are assumed to have $p_i(k) = 1$ or $p_i(k) = 0$ with the fixed configuration of a period L . It is shown that if the fuzzy system is asymptotically stable as a mixed system and a periodically time-varying system with a relatively long period, then the fuzzy system provides a stable behavior in the computer simulation, even though there exist no common Lyapunov solutions. Of course, if there exists a common Lyapunov solution, then the fuzzy system is said to be asymptotically stable as both special systems; in particular, it is asymptotically stable as a periodically time-varying systems with any period L .

Keywords : Fuzzy Control, Fuzzy Systems, Fuzzy Modeling, Lyapunov Stability Theorem, Periodically Time-Varying Systems, Stability Analysis

Contact Address : **Keigo WATANABE**

Department of Mechanical Engineering, Saga University

1-Honjomachi, Saga 840, Japan

TEL : 0952-28-8602

FAX : 0952-28-8587

E-mail : watanabe@me.saga-u.ac.jp