最密充填のもとで土粒子間に形成される間隙径分布の算出方法の検討

森 友宏¹, 秋山 誠², 土倉 泰¹

1 前橋工科大学 社会環境工学科

2 三島市役所 都市基盤部 土木課

概 要

本論文では、土粒子および土粒子間に形成される間隙を球状と仮定して、様々な土粒子径を持った土が形成する間隙径分布の算出手法を提案する。土粒子間に形成される間隙球は、互いに接する4つの土粒子球の内部にあり、4つの土粒子球全てに外接する球として定義する。間隙球の大きさの分布は、存在する土粒子球の種類と数量をもとに、4つの土粒子球を取り出す確率から求められる。また、実際の砂質土に準じた粒径分布をもつ土粒子球により形成される間隙球の間隙半径分布の計算事例を示した。この手法により、不飽和地盤の土粒子間に働くサクシオン応力を定量的に評価し、不飽和土におけるサクシオン応力を設計に反映可能となることが期待される。

キーワード：粒子充填，多粒径，間隙径，不飽和土

1. はじめに

不飽和土の強度は、土粒子間のサクシオンに強い影響を受けることは良く知られている。サクシオンは土粒子間の空隙に懸架するメニスカス水の曲率半径に影響を受けることから、サクシオンを直接的かつ定量的に評価するためには、対象とする地盤内部の土粒子の三次元配列及び土粒子間に形成される間隙径分布を知る必要がある。

地盤内の土粒子の粒子配列、粒径分布、間隙径分布の再現について考える際に助けになると考えられるのが、数学的な充填問題や粉体工学の分野の粒子の三次元充填問題である。同じ大きさの球の配置と充填率は古くから求められており、Simple cubic (単純立方格子) の0.524から、Face-centered cubic (面心立方格子) と Hexagonal close-packed (六方最密充填) の0.741まで変化することは良く知られている。Chaoming Song¹⁾らは研究によりランダム配置の等粒径の球を充填していき、どこまで充填率が増加するかを粒子配置シミュレーションで求めている。ランダム充填後の圧縮において、充填率は粒子の配位数に応じて0.55~0.63程度まで変化し、その最大値は0.634であることを示している。また、中尾²⁾は等粒径の粒子における配位数と間隙率との関係を示している。

一方、粒径の異なる粒子を用いた際の充填問題は、小さい粒子が大きい粒子によって形成される間隙に入り込むケースが存在することから推定が困難である。Furnas³⁾は粒径が大小2つの場合の2成分系の充填率を考え、粗粒が充填されてきた空隙に、十分に小さい細粒が入り込む場合の充填率の変化を求めた。このモデルがその後の多粒径

粒子の充填モデルの基礎となっている。その後、Furnasは複数の粒径を持った多成分系の充填率を考えるにあたり、粒径比の関数として充填係数を導入し、最大充填率の計算法を提案した⁴⁾。但し、充填係数は2成分系の実験から求められ、多成分系においてもこの充填係数が成立するという前提条件がある。しかし、その後、粗粒と細粒の粒径比に近い場合にFurnasの提案するモデル⁴⁾よりも充填率の大きくなる場合があることがMcGeary⁵⁾、Ayer & Soppet⁶⁾により示され、Ouchiya & Tanaka⁷⁾らはFurnasの前提条件に問題があったとしている。

また、等粒径の粒子の場合と異なり、粒径の異なる粒子を用いた際の充填は、どの粒径の粒子同士が接触するのによって、間隙の大きさが変化することも問題を難しくしている。Burk & Apte⁸⁾は、大小2種類の連続性のある粒径分布を持つ2次元円の充填シミュレーションを行い、粒径分布を少しずつ変化させたときの充填率の変化を求めた。その結果、わずかな粒径分布の変化であっても充填率が大きく変化する場合があります。また、その変化傾向も一様ではなく、連続性のある粒度分布を持つ粒子を混合したときの充填率の変化を予測することは容易ではない事を示した。一方で、多粒径の粒子同士の接触を個別に考えるのではなく、粒子同士の接触確率を用いて充填率を求めたのが鈴木^{9), 10), 11)}である。鈴木らは粒度分布のある多成分粒子ランダム充填層の間隙率を求めている。粒子は球形とし、着目粒子と接触粒子という二種類の組み合わせで間隙をそれぞれ考え、全体の間隙率は組み合わせによって求めた間隙の累積に等しいとしている。また、間隙を形成する粒子の組の発生確率は、粒子の存在数に依存するとしている。

本論文では、鈴木らの論文の「間隙を形成する粒子の組の発生確率は、粒子の存在数に依存する」という部分からヒントを得て、多粒径からなる土粒子間の間隙径分布の推定を行う。なお、本論文の新規性は、既往の論文では、粒子間の間隙率（粒子の充填率）を求めることに主眼が置かれている一方で、本論文では一歩進み、粒子同士の接触確率をもとにして、土粒子間に形成される間隙径の分布を算出しようとする点にある。なぜなら、間隙径は不飽和土の土粒子間に働くサクションおよびメニスカス水の形状に大きく関係するからである。

2. 多数の土粒子間の中の間隙および間隙径をどのようにして算出するか？

2.1 本論文における土粒子と間隙径に関する仮定

不飽和土を微視的に見ると、土粒子、メニスカス水、間隙に分けられる。土粒子、メニスカス水、間隙径の模式図を図1に示す。本来、土粒子の形状は不均一であるため、形成される間隙の大きさやメニスカス半径は様々であるが、本研究では、土粒子間の間隙径分布の基本的な算出モデル式の提案を目的とするため、簡単のために、土粒子および重力排水完了後にメニスカス水によって形成される間隙を球であると仮定して、以降の議論を行う。

2.2 粒子同士の接触確率に基づいた土中の中の間隙径分布の算出手法の概要

本節では、土粒子同士の接触を考えて土の間隙率を算出する際、厳密な土粒子の幾何学的配置に基づいた計算は困難であることを示し、土の間隙率の算出には土粒子同士の

図1 モデル化した土粒子と間隙の模式図

図2 2次元の円の配置順による間隙率の変化

接触確率を用いる必要があることを示す。まず、2次元の円の配置を用いて基本的な考え方を示した後、本論文で用いる3次元の球の配置から土粒子間の間隙径を求めるための基本的考え方を提示する。なお、粒子同士の接触確率に基づいた間隙率の算出手法のアイデアは鈴木らの論文によるものであり、本論文はこのアイデアを応用し、3次元下における土粒子同士の接触確率から間隙径の分布を算出しようとするものである。

はじめに、簡単のために2次元の円を用いて、間隙率について考える（図2参照）。ある粒子に着目して、その粒子周辺の間隙率を考えることとする。着目した粒子の周りに接触粒子をランダムに配置したものが図2左である。一方、同数の接触粒子を直径順に配置したものが図2右である。接触粒子をランダムに配置したものは破線aから右回りに始まり破線bで終わっている。一方、接触粒子を直径順に配置したものは破線aから右回りに始まり、破線bを超えて破線b'で終わっている。直径順に配置したものは最も小さい粒子（紫色）が1つ入りきっていないことから、着目粒子周辺の間隙率は直径順の配置の方が大きいことを示している。ここで重要な事は、接触粒子の並び順を変えただけで間隙率は変化してしまうことである。このことから、接触粒子に座標情報などを与えて、幾何学的な粒子の配列から間隙率を求めることは計算量が膨大となることがわかる。仮に幾何学的に間隙率を求めようとすれば、全ての接触粒子にIDナンバーを与え、全粒子の位置関係を求めなければならないからである。この問題を回避するために、鈴木らは着目粒子に接する接触粒子の接触確率から間隙率を算出する手法を提案した。この手法の骨子は以下の通りである。

【以下(a)～(f)は鈴木らによる手法の骨子である】

- 着目粒子に、どの大きさの接触粒子が平均で何個接触するか（配位数）を粒子配置のシミュレーション結果から求める。
- 着目粒子と接触粒子の接触確率は、粒子の存在数に依存する。
- 着目粒子と接触粒子の接触位置関係などのような、相互の幾何学的な位置関係は考慮しない。
- 着目粒子と接触粒子の基本モデルを考え、各基本モデルの間隙率を求める（図3参照）。
- 各基本モデルにおける接触粒子の数（配位数）は粒子配置のシミュレーション結果から推定する。
- 全体の間隙率は、各基本モデルの間隙率の接触確率による重み付き平均で求める。

本研究では、鈴木らの手法を応用し、土粒子の接触の組合せ、およびその組合せの発生確率から、ある粒度分布を持つ3次元の土中の中の間隙半径分布を推定する手法を提案する。手法の骨子は以下の通りである。

- 土粒子を球と仮定する（以下、土粒子球と記述する）。
- 土粒子球のランダム充填は取り扱わない。土粒子球の半径からそれぞれの球の位置関係が最も単純に、

かつ一義的に定まるよう、4つの土粒子球を互いに接するように配列し、4つの土粒子球により形成される間隙球の半径（間隙半径）を計算する（図4参照）。これは4つの土粒子球を考えた時の局所的な最密充填状態であり、土粒子球の中心点を結ぶと三角錐（四面体）を成す。

- (3) 間隙半径とは、上記(2)の4つの土粒子球に外接する球の半径のことである。
- (4) 4つの土粒子球の半径を様々に変化させ、それぞれの組合せから得られる間隙半径を全て求める。
- (5) 対象とする地盤に含まれる土粒子球の半径および粒子数から、粒子半径が異なる4つの土粒子球の組合せの存在確率を求める。同時に、間隙半径の発生確率も算出される。
- (6) 間隙半径の発生確率をある階級ごとに累積することで、間隙半径の分布が求められる。

3. 様々な粒径を持つ土粒子間に形成される間隙径の算出

3.1 間隙径の算出に関する基礎式

本節では、土粒子間に形成される間隙の間隙半径を算出する手法について説明する。

2.1節の仮定より、4つの土粒子球は互いに接触しており、間隙半径とはこれら4つの土粒子球に外接する球（間

隙球）の半径である（図5参照）。土粒子球を一球ずつ、条件を与えながら x, y, z 空間に配置していく（図6参照）。

- 1球目：中心を原点に置く。1球目の中心座標 (x_1, y_1, z_1) は $(0, 0, 0)$ となる。
- 2球目：2球目が1球目と x 軸上で接する。2球目の中心座標 (x_2, y_2, z_2) は $(x_2, 0, 0)$ となる。
- 3球目：3球目の中心が xy 平面状にあり $(z=0)$ 、かつ、1球目2球目と接する。3球目の中心座標 (x_3, y_3, z_3) は $(x_3, y_3, 0)$ となる。
- 4球目：1～3球目の全てに接する。4球目には特に位置の条件はないため (x_4, y_4, z_4) とする。

前述の4球の内部に存在し1～4球目の全てに接する5球目（間隙球）を考え、その粒子半径を間隙半径 r_5 とする。設定した条件から任意の径の1～4球目を配置してそれぞれの球の中心座標を求めていく。

1球目： (x_1, y_1, z_1) は先ほど述べたように $(0, 0, 0)$

2球目： $(x_2, 0, 0)$ を求める。

1球目と2球目は接していることから

$$x_2 = r_1 + r_2 \quad (1)$$

3球目： $(x_3, y_3, 0)$ を求める。

1～3球目がそれぞれ接していることから3次元の3平方の定理を利用して

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = (r_3 + r_1)^2 \quad (2)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = (r_3 + r_2)^2 \quad (3)$$

図3 着目粒子と接触粒子の基本モデル

図4 3次元空間における間隙球の定義

図5 土粒子球と間隙球の位置（ $x-z$ 平面視点）

図6 土粒子球1～4の配置の模式図（ $x-y$ 平面視点）

式(2), (3)から x_3, y_3 は

$$x_3 = \frac{x_2^2 + r_1^2 - r_2^2 + 2r_3(r_1 - r_2)}{2x_2} \quad (4)$$

$$y_3 = \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - \left(\frac{x_2^2 + r_1^2 - r_2^2 + 2r_3(r_1 - r_3)}{2x_2} \right)^2} \quad (5)$$

と表される。

4 球目 : (x_4, y_4, z_4) を求める。

3 球目同様に, 三平方の定理から

$$(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2 = (r_4 + r_1)^2 \quad (6)$$

$$(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2 = (r_4 + r_2)^2 \quad (7)$$

$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2 = (r_4 + r_3)^2 \quad (8)$$

式(6), (7), (8)を満たす x_4, y_4, z_4 は

$$x_4 = \frac{x_2^2 + r_1^2 - r_2^2 + 2r_4(r_1 - r_2)}{2x_2} \quad (9)$$

$$y_4 = \frac{x_3^2 + y_3^2 + r_1^2 - r_3^2 + 2\{r_4(r_1 - r_3) - x_3x_4\}}{2y_3} \quad (10)$$

$$z_4 = \sqrt{(r_1 + r_4)^2 - x_4^2 - y_4^2} \quad (11)$$

と表される。

以上の値を用いて 5 球目の中心座標 (x_5, y_5, z_5) と粒子半径 r_5 を求める。

求め方は 3, 4 球目と同様に三平方の定理を用いて

$$(x_5 - x_1)^2 + (y_5 - y_1)^2 + (z_5 - z_1)^2 = (r_5 + r_1)^2 \quad (12)$$

$$(x_5 - x_2)^2 + (y_5 - y_2)^2 + (z_5 - z_2)^2 = (r_5 + r_2)^2 \quad (13)$$

$$(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2 + (z_5 - z_3)^2 = (r_5 + r_3)^2 \quad (14)$$

$$(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2 = (r_5 + r_4)^2 \quad (15)$$

を満たすことが条件である。しかし条件式が四元二次連立方程式であり r_5 も未知であるためこれまでのように求めることができない。そこでまず (x_5, y_5, z_5) を r_5 と既知の値で表した式に変形する。

$$x_5 = \frac{x_2^2 + r_1^2 - r_2^2}{2x_2} - \frac{(r_1 - r_2)}{x_2} r_5 \quad (16)$$

$$y_5 = \frac{x_3^2 + y_3^2 + r_1^2 - r_3^2 - 2x_3x_5}{2y_3} - \frac{(r_3 - r_1)}{y_3} r_5 \quad (17)$$

$$z_5 = \frac{x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + r_1^2 - r_4^2 - 2x_4x_5 - 2y_4y_5}{2z_4} - \frac{(r_4 - r_1)}{z_4} r_5 \quad (18)$$

式(16), (17), (18)を, 式(12)~(15)に代入し, 条件を満たす間隙半径 r_5 を, 許容誤差 0.001 以内となるよう繰り返しの収束計算を行って求めた。

3.2 土粒子径を様々に変化させたときの間隙径の変化

本節では, 土粒子の粒子半径比が 0.125, 0.25, 0.5, 1, 2 の 5 種類の球を用いた時の間隙半径比を考える。5 種類の球を用意したときの 4 球の組合せを考えると 70 組存在する。そのうち, 1~3 球目の間隙に 4 球目が入り込んで間隙球を形成出来ない組合せ (組合せ No.19, 50, 54, 61, 62, 66, 67) が 7 組存在した。1~4 球目の粒子半径比と求められた間隙半径比 r_5 を表 1 に示す。本条件において, 間隙半径比の範囲は 0.028~0.449 となった。また, 4 つの土

粒子半径比に対して間隙半径比が最小となるのは, 4 つの土粒子半径比が同一の場合であり, その時の間隙半径比は土粒子半径比の 22.5%である。

4. 4 つの土粒子の組合せの発生確率と間隙径分布の推定例

3 章では, 5 種類の粒子半径比を持った粒子 (土粒子) から 4 つの粒子を選んで組合せる事により形成される 63 種類の間隙半径を求めた。しかし, これだけでは土中に「どの大きさの間隙」が「どのくらいの割合」で存在するかわからない。そこで本章では, 実際の土中の間隙半径分布を模擬するために, 様々な粒子半径を持つ粒子を同体積ずつ混合した試料を考え, 形成される間隙半径分布を求めた事例を示す。

今回考える試料は, 粒子半径比 0.125 : 0.25 : 0.5 : 1 : 2 の 5 種類の粒子を, 同体積ずつ混合したものとする。粒子の密度を一定とすると, この試料の粒径加積曲線は図 7 のようになる。粒子半径比を土粒子径に読み替えて, 最大粒径 2mm, 最小粒径 0.125mm の図 7 のような粒径分布を持つ砂質土を想像するとイメージしやすい。粒子半径比が 0.125 : 0.25 : 0.5 : 1 : 2 の時, 粒子 1 粒の体積比は粒子半径の 3 乗に比例するから 1 : 8 : 64 : 512 : 4096 となる。それぞれの粒子種の体積は一定と仮定しているので, それぞれの粒子数比も 4096 : 512 : 64 : 8 : 1 である。本論文で求める間隙球は, 互いに接する 4 つの土粒子球に外接する球として定義されている。例えば, 間隙球の半径が最大となる組み合わせは土粒子球の半径が 2, 2, 2, 2 の時である。1 種類のみで間隙が構成される場合があるためには, 同粒径の粒子は最低 4 つ必要である。そのため, 粒子数比として表した数の 4 倍の粒子を用いて本推定を行った。すなわち, 粒子半径比 0.125, 0.25, 0.5, 1, 2 の粒子が, それぞれ 16384 個, 2048 個, 256 個, 32 個, 4 個, 総数 18724 個の粒子を考えて, この 18724 球の粒子からランダムに 4 つの土粒子球を取り出した時の組合せの発生確率を求める。

図 7 本試算で用いる土粒子球の粒径加積曲線のイメージ

表 1 1～4 球目の土粒子半径比と求められた間隙半径比および組合せの発生確率

組合せ No.	粒子半径比				間隙半径比	粒子種毎の総体積一定時	
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	発生個数	発生確率(%)
1	0.125	0.125	0.125	0.125	0.028	3.001E+15	5.862E+01
2	0.125	0.125	0.125	0.25	0.033	1.501E+15	2.932E+01
3	0.125	0.125	0.125	0.5	0.036	1.876E+14	3.665E+00
4	0.125	0.125	0.125	1	0.039	2.345E+13	4.581E-01
5	0.125	0.125	0.125	2	0.040	2.931E+12	5.726E-02
6	0.125	0.125	0.25	0.25	0.039	2.813E+14	5.495E+00
7	0.125	0.125	0.25	0.5	0.044	7.036E+13	1.374E+00
8	0.125	0.125	0.25	1	0.047	8.796E+12	1.718E-01
9	0.125	0.125	0.25	2	0.050	1.099E+12	2.147E-02
10	0.125	0.125	0.5	0.5	0.051	4.381E+12	8.556E-02
11	0.125	0.125	0.5	1	0.056	1.099E+12	2.147E-02
12	0.125	0.125	0.5	2	0.059	1.374E+11	2.684E-03
13	0.125	0.125	1	1	0.063	6.657E+10	1.300E-03
14	0.125	0.125	1	2	0.068	1.718E+10	3.355E-04
15	0.125	0.125	2	2	0.075	8.053E+08	1.573E-05
16	0.125	0.25	0.5	1	0.072	2.749E+11	5.369E-03
17	0.125	0.25	0.5	2	0.078	3.436E+10	6.711E-04
18	0.125	0.25	1	2	0.094	4.295E+09	8.389E-05
19	0.125	0.5	1	2	—	5.369E+08	1.049E-05
20	0.25	0.25	0.125	0.5	0.054	8.792E+12	1.717E-01
21	0.25	0.25	0.125	1	0.059	1.099E+12	2.147E-02
22	0.25	0.25	0.125	2	0.063	1.374E+11	2.683E-03
23	0.25	0.25	0.25	0.125	0.047	2.342E+13	4.575E-01
24	0.25	0.25	0.25	0.25	0.056	7.309E+11	1.428E-02
25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.065	3.660E+11	7.148E-03
26	0.25	0.25	0.25	1	0.073	4.575E+10	8.935E-04
27	0.25	0.25	0.25	2	0.077	5.718E+09	1.117E-04
28	0.25	0.25	0.5	0.5	0.077	6.842E+10	1.336E-03
29	0.25	0.25	0.5	1	0.088	1.717E+10	3.354E-04
30	0.25	0.25	0.5	2	0.095	2.146E+09	4.193E-05
31	0.25	0.25	1	1	0.101	1.040E+09	2.031E-05
32	0.25	0.25	1	2	0.112	2.683E+08	5.241E-06
33	0.25	0.25	2	2	0.126	1.258E+07	2.457E-07
34	0.25	0.5	1	2	0.144	6.711E+07	1.311E-06
35	0.5	0.5	0.125	0.25	0.064	1.095E+12	2.139E-02
36	0.5	0.5	0.125	1	0.094	1.711E+10	3.343E-04
37	0.5	0.5	0.125	2	0.109	2.139E+09	4.178E-05
38	0.5	0.5	0.25	1	0.107	2.139E+09	4.178E-05
39	0.5	0.5	0.25	2	0.118	2.674E+08	5.223E-06
40	0.5	0.5	0.5	0.125	0.079	4.528E+10	8.844E-04
41	0.5	0.5	0.5	0.25	0.093	5.660E+09	1.105E-04
42	0.5	0.5	0.5	0.5	0.112	1.748E+08	3.414E-06
43	0.5	0.5	0.5	1	0.131	8.843E+07	1.727E-06
44	0.5	0.5	0.5	2	0.145	1.105E+07	2.159E-07
45	0.5	0.5	1	1	0.155	1.619E+07	3.162E-07
46	0.5	0.5	1	2	0.175	4.178E+06	8.160E-08
47	0.5	0.5	2	2	0.202	1.958E+05	3.825E-09
48	1	1	0.125	0.25	0.084	1.664E+10	3.251E-04
49	1	1	0.125	0.5	0.129	2.080E+09	4.063E-05
50	1	1	0.125	2	—	3.251E+07	6.349E-07
51	1	1	0.25	0.5	0.127	2.600E+08	5.079E-06
52	1	1	0.25	2	0.188	4.063E+06	7.936E-08
53	1	1	0.5	2	0.215	5.079E+05	9.921E-09
54	1	1	1	0.125	—	8.126E+07	1.587E-06
55	1	1	1	0.25	0.157	1.016E+07	1.984E-07
56	1	1	1	0.5	0.186	1.270E+06	2.480E-08
57	1	1	1	1	0.225	3.596E+04	7.024E-10
58	1	1	1	2	0.261	1.984E+04	3.875E-10
59	1	1	2	2	0.309	2.976E+03	5.813E-11
60	2	2	0.125	0.25	0.112	2.013E+08	3.932E-06
61	2	2	0.125	0.5	—	2.517E+07	4.915E-07
62	2	2	0.125	1	—	3.146E+06	6.144E-08
63	2	2	0.25	0.5	0.168	3.146E+06	6.144E-08
64	2	2	0.25	1	0.259	3.932E+05	7.680E-09
65	2	2	0.5	1	0.254	4.915E+04	9.601E-10
66	2	2	2	0.125	—	6.554E+04	1.280E-09
67	2	2	2	0.25	—	8.192E+03	1.600E-10
68	2	2	2	0.5	0.314	1.024E+03	2.000E-11
69	2	2	2	1	0.372	1.280E+02	2.500E-12
70	2	2	2	2	0.449	1.000E+00	1.953E-14
計						5.1197E+15	1.000E+02

以下に、計算例を示す。また、間隙球が形成可能な63組の組合せの発生確率を表1に示す。発生確率が対数表示になっているが、発生する間隙球の上位5つの組合せ（表中のグレーの網掛け部分）の発生確率だけで、全間隙数の98.47%を占めている。これより、地盤内の間隙径は、一般に土に含まれる土粒子のうち粒径の小さいものの影響を強く受けるであろう事が推測される。

図8 本試算による間隙球の粒子半径比分布（線形表示）

図9 本試算による間隙球の粒子半径比分布（対数表示）

図10 粒子半径比分布の階級幅のイメージ図

計算例1（組合せ No.1）

$$\text{発生確率 (\%)} = \frac{\text{ある条件において4球を取り出す組合せ数}}{\text{総粒子数から4球を取り出すときの組合せ数}}$$

総粒子数：18724

粒径比 0.125 : 0.125 : 0.125 : 0.125 の時

分母：総粒子から4球を取り出す組合せ ${}_{18724}C_4$

分子：粒径 0.125 の粒子数 16384 球から4球を取り出す

組合せ ${}_{16384}C_4$

$$\text{発生確率 } P = \frac{{}_{16384}C_4}{{}_{18724}C_4} \times 100 = 5.86 \times 10^{-1} (\%)$$

計算例2（組合せ No.29）

粒径比 0.25 : 0.25 : 0.5 : 1 の時

分子：粒径 0.25 の粒子数 2048 球から2球取り出す

粒径 0.5 の粒子数 256 球から1球取り出す

粒径 1 の粒子数 32 球から1球取り出す

$$\text{発生確率 } P = \frac{{}_{2048}C_2 \times {}_{256}C_1 \times {}_{32}C_1}{{}_{18724}C_4} \times 100 = 3.35 \times 10^{-6} (\%)$$

表1で示した70個の組合せから間隙球を形成できない組合せであるNo.19, 50, 54, 61, 62, 66, 67を除いた、63個の組合せの粒子半径比および発生確率を図8, 図9に示す。図8, 図9のヒストグラムの階級値は、対数表示の横軸におけるヒストグラムの図上の幅を一定とするために、組合せにより生じる最小間隙球の粒子半径比0.028を基準に $0.028 \times \sqrt{2}^n$ ($n = -1, 0, 1, \dots, 9$) とし、粒子半径比を10に分割した（図10参照）。また、発生確率を表すグラフ縦軸は、見やすさのために線形表示と対数表示の2通り示した。図からも解る通り、粒子半径比が小さいほうから2つ目の0.0396までで全間隙数の97.55%を占める。本節で用いる粒子は、粒子半径比0.125 : 0.25 : 0.5 : 1 : 2で、各粒子種を等体積混合したものである。すなわちこれは、最小土粒子球（粒子半径比0.125）の約30%以下の大きさの間隙球が、地盤内のほとんどを占めていることを示している。

5. まとめ

本論文では、土粒子および間隙を球と仮定して最密充填を行ったときの、間隙径の算出方法を提案した。また、土粒子の存在数をもとに4つの土粒子の組合せの発生確率を求めることにより、形成される間隙径分布の算出例を示した。

今後の課題は、非最密充填時における着目粒子周辺の配位数に応じた間隙径分布の算出手法を確立することである。この際、接触粒子半径によって配位数も異なってくるため、確率論的手法を適切に組み込む必要があるだろう。また、本論文の手法により推定した間隙径分布を、実際の地盤で実測・確認することも課題である。地盤内の間隙径を計測する一手法として、神谷ら¹²⁾による空気圧入式間隙径測定装置がある。今後、ガラスビーズや珪砂を用いた間

隙径測定試験を行い、本論文が提案する間隙径の推定手法との整合性に関して検証を行っていく予定である。

謝辞

本研究は、日本学術振興会 科研費 基盤研究(C) JP17K06561 の助成を受けたものです。また、東北大学大学院工学研究科土木工学専攻の風間基樹教授には論文の内容に関して討議を行っていただきました。ここに記して謝意を示します。

参考文献

- 1) Chaoming Song, Ping Wang & Hernán A. Makse, A phase diagram for jammed matter, *Nature*, Vol. 453, pp.629-632, 2008.
- 2) 中尾隆志, 藤田睦博: 等球径ランダム充填の配位数と間隙率の関係について, 土木学会水工学論文集, 第39巻, pp.273-278, 1995.
- 3) C.C. Furnas, Report of Investigation Serial No. 2894, US Bureau of Mines, vol. 7, 1928.
- 4) C.C. Furnas: Grading Aggregates - I. - Mathematical Relations for Beds of Broken Solids of Maximum Density, *Ind. Eng. Chem.* vol. 23, No. 9, pp. 1052-1058, 1931.
- 5) R. K. McGeary: Mechanical Packing of Spherical Particles, *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 44, No. 10, pp. 513-522, 1961.
- 6) J.E. Ayer & F.E. Soppet: Vibratory Compaction: I, Compaction of Spherical Shapes, *Journal of the American Ceramic Society*, vol.48, No. 4, pp.180-183, 1965.
- 7) N. Ouchiyaama & T. Tanaka: Predicting the densest packings of ternary and quaternary mixtures of solid particles, *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vo. 28, No. 10, pp. 1530-1536, 1989.
- 8) R. C. Burk and P. S. Apte: A packing scheme for real size distributions, *American Ceramic Society Bulletin*, vol. 66, pp. 1389-1392, 1987.
- 9) 鈴木道隆, 八木章, 渡辺球夫, 大島敏男: 3成分球形粒子ランダム充填層の空間率の推定, 化学工学論文集, 第10巻, 第6号, pp.721-727, 1984.
- 10) 鈴木道隆, 大島敏男: 粒度分布のある付着性球形粒子ランダム充填層の空間率推定, 粉体工学会誌, Vol.22, No.9, pp.612-617, 1985.
- 11) 鈴木道隆: 粉体の密充填におよぼす粒子物性の影響, 粉体工学会誌, Vol.40, pp.348-354, 2003.
- 12) 神谷浩二, 宇野尚雄, 松島健之: 「空気圧入法」による砂質土の間隙径分布の計測, 土木学会論文集, No.541/ III-35, pp.189-198, 1996.

(2018.10.10 受付)

Study on calculation method of pore size distribution formed between soil particles under closest packing

Tomohiro MORI¹, Makoto AKIYAMA² and Toru TSUCHIKURA¹

1 Department of Civil and Environmental Engineering, Maebashi Institute of Technology

2 Mishima City Office

Abstract

In this paper, we propose a calculation method of pore size distribution which formed by soil having various soil particle sizes, assuming that soil particles and the pore between the soil particles are spherical. The pore spheres formed between the soil particles are defined as spheres that are inside four mutually contacting soil particle spheres and circumscribe all four soil particle spheres. The size distribution of the pore sphere is obtained from the probability of taking out 4 soil particle spheres based on the type and quantity of the soil particle sphere present. In addition, a calculation example of the pore radius distribution of the pore sphere formed by soil particle spheres having a particle size distribution similar to actual sandy soil is shown. By this method, it is expected that the suction stress acting between the soil particles of the unsaturated ground can be quantitatively evaluated and the suction stress in the unsaturated soil can be reflected in the design.

Key words: particle filling, multi particle size, pore size, unsaturated soil