室内汚染空気の換気について (第5報¹⁾)
不均一な室内汚染空気の換気に関する理論式の考察 (その4)

松本 克,²⁾ 井上 正敏,²⁾ 藤田 直,²⁾ 寺田 弘美,²⁾ 刀禰美智子
大阪薬科大学²⁾

Ventilation of Polluted Air in Rooms. V.¹⁾
Studies on Theoretical Equations for Ventilation of Polluted Air diffused
Heterogeneously in Room (4)

KOKU MATSUMOTO,²⁾ MASATOSHI INOUE,²⁾ TADASHI FUJITA,²⁾
HIROMI TERADA²⁾ and MICHIKO TONE
Osaka College of Pharmacy²⁾

(Received April 27, 1968)

The present investigation was undertaken to apply theoretical methods to the ventilation of the polluted air in room where carbondioxide was not completely diffused.

C_{m+1} , C_m , and C_{m-1} are concentrations of carbondioxide at places $(m+1) \delta X$, $m \delta X$ and $(m-1) \delta X$ at time $T (=n \delta T)$, respectively, C_m^+ is the concentration of carbondioxide at a place $m \delta X$ at $(n+1) \delta T$, where superscript + denotes time $(n+1) \delta T$, subscripts m , $(m+1)$ and $(m-1)$ denote spaces $m \delta X$, $(m+1) \delta X$ and $(m-1) \delta X$, respectively.

Assuming that concentration of carbondioxide depends on time and space, the following equation can be obtained,

$$\partial C / \partial T = D (\partial^2 C / \partial X^2)$$

where X is a distance from a source of the evolution of carbondioxide, and D is a constant (not equal to 0).

Implicit difference analogue for the above equation can be obtained as follows,

$$(\partial^2 C / \partial X^2)_m = (C_{m+1} - 2C_m + C_{m-1}) / (\delta X)^2$$

According to the Taylor's expansion theorem, the Schmidt's and Dusenberre's methods, following equations can be obtained,

$$C_m^+ = (C_{m+1} + C_{m-1}) / 2$$

$$C_m^+ = (C_{m+1} + C_m + C_{m-1}) / 3$$

respectively.

In two dimensional diffusion, $C_{j, k+1}$ and $C_{j, k-1}$ are concentrations of carbondioxide at places $x = jh$, $y = (k \pm 1) h$ at time $T (=n \delta T)$, and $C_{j+1, k}$ and $C_{j-1, k}$ are at places $x = (j \pm 1) h$, $y = kh$, respectively, and $C_{j, k}^+$ is at a place $x = jh$, $y = kh$ at time $(n+1) \delta T$.

The following equation can be obtained as one dimensional diffusion,

$$C_{j, k}^+ = (C_{j+1, k} + C_{j-1, k} + C_{j, k+1} + C_{j, k-1}) / 4$$

It was found experimentally that above equations were appropriate from the concentrations of carbondioxide in room.

緒 言

前回までの報告は、不均一な室内汚染空気の強制換気

について、換気に関する変数を、一次元的な変化の割合について考察し、簡単な差分方程式により近似的にその

1) 第4報：松本 克，井上正敏，戸塚美智子，寺田弘美，衛生化学，14，30 (1968)。

2) Location : Takaminosato, Matsubara-shi, Osaka (大阪府松原市高見ノ里)。

解が求められることを明らかにした。今回は条件を変えて、さらに二次元的な変化について考察し、実験結果と比較し良好な結果を得た。

理論の部

室内における CO_2 発生源からの距離 X を等間隔 δX に分割し、時間 T を等間隔 δT に分割し、 C_{m+1} 、 C_m および C_{m-1} をそれぞれ時間 $T (=n\delta T)$ において、 $(m+1)\delta X$ 、 $m\delta X$ および $(m-1)\delta X$ の位置の CO_2 濃度とし、 C_m^+ は時間 $(n+1)\delta T$ において、 $X (=m\delta X)$ における位置の CO_2 濃度とする。

室内の CO_2 濃度が時間と場所のみの関数であると仮定すると、一般につきの式が得られる。

$$\partial C / \partial T = D (\partial^2 C / \partial X^2) \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 D は定数とする。

Taylor の展開理論³⁾ にしたがえば

$$C_{m+1} = C_m + \delta X [\partial C / \partial X]_m + (\delta X)^2 / 2 [\partial^2 C / \partial X^2]_m + \dots\dots\dots(2)$$

$$C_{m-1} = C_m - \delta X [\partial C / \partial X]_m + (\delta X)^2 / 2 [\partial^2 C / \partial X^2]_m - \dots\dots\dots(3)$$

が得られる。(2)式と(3)式より

$$C_{m+1} + C_{m-1} = 2C_m + (\delta X)^2 [\partial^2 C / \partial X^2]_m + \dots\dots$$

$$\therefore C_{m+1} - 2C_m + C_{m-1} = (\delta X)^2 [\partial^2 C / \partial X^2]_m + \dots\dots$$

高次の項を省略すると、時間 T において $m\delta X$ の位置における $[\partial^2 C / \partial X^2]$ に対する近似は、

$$[\partial^2 C / \partial X^2]_m = [C_{m+1} - 2C_m + C_{m-1}] / (\delta X)^2 \dots\dots(4)$$

$m\delta X$ における $\partial C / \partial T$ に対する相当する近似式³⁾ はつぎのようになる。

$$[\partial C / \partial T]_m = [C_m^+ - C_m] / \delta T \dots\dots\dots(5)$$

したがって、(4)、(5)両式を(1)式に代入すると、

$$[C_m^+ - C_m] / \delta T = D [C_{m+1} - 2C_m + C_{m-1}] / (\delta X)^2$$

$$\therefore C_m^+ = C_m + D \delta T [C_{m+1} - 2C_m + C_{m-1}] / (\delta X)^2 \dots\dots(6)$$

Schmidt の方法³⁾ にしたがって、 $D \delta T / (\delta X)^2 = 1/2$ とすれば、

$$C_m^+ = [C_{m+1} + C_{m-1}] / 2 \dots\dots\dots(7)$$

すなわち、時間 $(n+1)\delta T$ において、 $X (=m\delta X)$ の位置における CO_2 濃度は、時間 $T (=n\delta T)$ において、 $(m+1)\delta X$ の位置における CO_2 濃度の算術平均に等しいことになる。

さらにまた Dusenberre の方法³⁾ にしたがって、 $D \delta T / (\delta X)^2 = 1/3$ とすれば、(6)式はつぎのようになる。

$$C_m^+ = [C_{m+1} + C_m + C_{m-1}] / 3 \dots\dots\dots(8)$$

すなわち、時間 $(n+1)\delta T$ において、 $X (=m\delta X)$ の

位置における CO_2 濃度は、時間 $T (=n\delta T)$ において、 $(m+1)\delta X$ 、 $m\delta X$ および $(m-1)\delta X$ の一次元上におけるそれぞれの位置の CO_2 濃度の算術平均に等しいことになる。

さらに、室内を x 軸および y 軸について、二次元的な拡散を考慮する場合、 x 軸および y 軸をそれぞれ等間隔 $h (= \delta X)$ に分割し、時間 T において室内の任意の位置、たとえば $x = jh$ 、 $y = kh$ 、(j および k は正の整数とする) の位置における CO_2 濃度を $C_{j,k}$ とすれば、(1)式に相当する式はつぎのようになる。

$$\partial C_{j,k} / \partial T = D' [\partial^2 C / \partial x^2 + \partial^2 C / \partial y^2] \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 D' は定数とする。

Taylor の展開理論³⁾ によると、

$$C_{j,k+1} = C_{j,k} + \delta x [\partial C_{j,k} / \partial x] + (\delta x)^2 [\partial^2 C_{j,k} / \partial x^2] / 2 + \dots\dots\dots(10)$$

$$C_{j,k-1} = C_{j,k} - \delta x [\partial C_{j,k} / \partial x] + (\delta x)^2 [\partial^2 C_{j,k} / \partial x^2] / 2 - \dots\dots\dots(11)$$

が得られる。ただし、 $C_{j,k+1}$ および $C_{j,k-1}$ はそれぞれ時間 T において、 $x = jh$ 、 $y = (k+1)h$ および $y = (k-1)h$ の位置における CO_2 濃度とする。

(10)、(11)両式より

$$C_{j,k+1} + C_{j,k-1} = 2C_{j,k} + (\delta x)^2 [\partial^2 C_{j,k} / \partial x^2] + \dots\dots$$

高次の項を省略して

$$\begin{aligned} \partial^2 C_{j,k} / \partial x^2 &= [C_{j,k+1} - 2C_{j,k} + C_{j,k-1}] / (\delta x)^2 \\ &= [C_{j,k+1} - 2C_{j,k} + C_{j,k-1}] / h^2 \dots\dots(12) \end{aligned}$$

同様に

$$\partial^2 C_{j,k} / \partial y^2 = [C_{j+1,k} - 2C_{j,k} + C_{j-1,k}] / h^2 \dots\dots\dots(13)$$

ただし、 $C_{j+1,k}$ および $C_{j-1,k}$ は時間 T において、それぞれ $x = (j+1)h$ および $x = (j-1)h$ 、 $y = kh$ の位置における CO_2 の濃度とする。

(9)、(12)、(13)式より

$$\partial C_{j,k} / \partial T = D' [C_{j+1,k} + C_{j-1,k} + C_{j,k+1} + C_{j,k-1} - 4C_{j,k}] / h^2$$

(5)式と同様に近似式は

$$\partial C_{j,k} / \partial T = [C_{j,k}^+ - C_{j,k}] / \delta T$$

とおくと、

$$\begin{aligned} [C_{j,k}^+ - C_{j,k}] / \delta T &= D' [C_{j+1,k} + C_{j-1,k} + C_{j,k+1} + C_{j,k-1} - 4C_{j,k}] / h^2 \\ \therefore C_{j,k}^+ &= C_{j,k} + D' \delta T [C_{j+1,k} + C_{j-1,k} + C_{j,k+1} + C_{j,k-1} - 4C_{j,k}] / h^2 \end{aligned}$$

Schmidt の方法にしたがい、

$$D' \delta T / h^2 = 1/4$$

とすると、

3) J. Crank, "The Mathematics of Diffusion," Oxford University Press, Amen House, London E. C. 4. Geoffrey Cumberlege, Publisher to the University, 1956, pp. 186-206.

$$C_{j,k}^+ = [C_{j+1,k} + C_{j-1,k} + C_{j,k+1} + C_{j,k-1}] / 4 \quad (14)$$

ただし、 $C_{j,k}^+$ は $x=jh$, $y=kh$ の位置で、時間 $(n+1)\delta T$ における CO_2 濃度とする。

実験の部

室("B"室)の構造、大きさ(実容積 688.94m^3)および CO_2 濃度の測定法は、前報¹⁾に示したと同様である。

また、 CO_2 発生源の位置は、教壇の中央よりやや室の中心に近づき、室の対角線の中心との直線距離は 7.80m の位置である。

Schmidt の方法および Dusinger の方法にしたがい、 $D\delta T/(\delta X)^2 = 1/2$ および $D\delta T/(\delta X)^2 = 1/3$ より、 $\delta X = \sqrt{2D\delta T}$ および $\delta X = \sqrt{3D\delta T}$ が得られ、 δX は δT の変化により変動するから、今回の場合は、 $\delta T = 10\text{min}$ としたとき、(7)式および(8)式をほぼ満足するに適当な測定位置は $\delta X = 5.00\text{m}$ であることを実験的に見出した。

したがって、 CO_2 濃度の測定場所は、 $X (=m\delta X)$ の位置(室の対角線の中心)と、 X より CO_2 発生源側およびその反対側へ等間隔に、それぞれ 5.00m の場所をとり、これらの位置を $(m-1)\delta X$ および $(m+1)\delta X$ とし、 CO_2 発生源の位置および $(m-1)\delta X$, $m\delta X$, $(m+1)\delta X$ の各位置は直線上にあるものとする。

二次元的な CO_2 濃度測定に際して、 X の位置を $x=jh$, $y=kh$ とし、 $x=jh$ で $y=(k-1)h$ および $y=(k+1)h$ の位置は、それぞれ $(m-1)\delta X$ および $(m+1)\delta X$ の位置に相当し、 $y=kh$ で $x=(j-1)h$ および $x=(j+1)h$ の位置は、 $x=jh$, $y=kh$ の位置すなわち室の対角線の中心より等間隔 (5.00m) にある。

なお、前回では CO_2 を毎時 134.4l 発生させながら、約3時間後に強制換気を開始すると同時に各位置で CO_2

濃度の測定を開始したが、今回は固形炭酸を用いて室内に CO_2 を発生させ、1時間後に CO_2 の発生を止め、強

Fig. 1. Concentration of CO_2 at Places of $(m+1)\delta X$, $m\delta X$ and $(m-1)\delta X$ in "B"-Room

Fig. 2. Concentration of CO_2 at Places on Two-Dimensional Plane ($C_{j,k+1}$, $C_{j,k-1}$, $C_{j+1,k}$ and $C_{j-1,k}$)

$C_{j,k+1}$, $C_{j,k-1}$: concentration of CO_2 at places $x=jh$, $y=(k+1)h$ and $y=(k-1)h$
 $C_{j+1,k}$, $C_{j-1,k}$: concentration of CO_2 at places $x=(j+1)h$, $x=(j-1)h$ and $y=kh$

TABLE I. Comparison of CO_2 Concentrations (%) calculated from Equations (7), (8) and observed

Time (min)	C_{m-1}	C_m	C_{m+1}	Eq. (7) ^{a)} $[C_m^+]_{\text{calc.}}$	$[C_m^+]_{\text{obs.}}$	Diff.	Eq. (8) ^{b)} $[C_m^+]_{\text{calc.}}$	$[C_m^+]_{\text{obs.}}$	Diff.
0	0.30	0.28	0.22	0.26	0.26	0.00	0.27	0.26	-0.01
10	0.27	0.26	0.17	0.22	0.22	0.00	0.23	0.22	-0.01
20	0.25	0.22	0.15	0.20	0.20	0.00	0.21	0.20	-0.01
30	0.22	0.20	0.13	0.18	0.17	-0.01	0.18	0.17	-0.01
40	0.19	0.17	0.12	0.16	0.15	-0.01	0.16	0.15	-0.01
50	0.17	0.15	0.11	0.14	0.14	0.00	0.14	0.14	0.00
60	0.16	0.14	0.10	0.13	0.12	-0.01	0.13	0.12	-0.01

a) $C_m^+ = (C_{m+1} + C_{m-1}) / 2$

b) $C_m^+ = (C_{m+1} + C_m + C_{m-1}) / 3$

C_m^+ : concentration of CO_2 at a place $m\delta X$ at time $(n+1)\delta T$

C_{m+1} , C_m , C_{m-1} : concentrations of CO_2 at places $(m+1)\delta X$, $m\delta X$ and $(m-1)\delta X$ at time $n\delta T$, respectively

TABLE II. Comparison of CO₂ Concentrations (%) calculated from Equation (14) and observed

Time (min)	$C_{j, k-1}$	$C_{j, k+1}$	$C_{j-1, k}$	$C_{j+1, k}$	Eq. (14) ^{a)} $[C_{j, k}^+]_{\text{calc.}}$	$[C_{j, k}^+]_{\text{obs.}}$	Diff.
0	0.30	0.22	0.28	0.25	0.26	0.26	0.00
10	0.27	0.17	0.25	0.20	0.22	0.22	0.00
20	0.25	0.15	0.22	0.17	0.20	0.20	0.00
30	0.22	0.13	0.18	0.13	0.17	0.17	0.00
40	0.19	0.12	0.16	0.11	0.15	0.15	0.00
50	0.17	0.11	0.14	0.10	0.13	0.14	+0.01
60	0.16	0.10	0.12	0.08	0.12	0.12	0.00

a) $C_{j, k}^+ = (C_{j, k-1} + C_{j, k+1} + C_{j-1, k} + C_{j+1, k})/4$ concentration of CO₂ at a places ($x=jh, y=kh$) at time $(n+1)\delta T$
 $C_{j, k-1}, C_{j, k+1}$: concentrations of CO₂ at places $[x=jh, y=(k-1)h]$ and $[x=jh, y=(k+1)h]$ at time $n\delta T$, respectively
 $C_{j-1, k}, C_{j+1, k}$: concentrations of CO₂ at places $[x=(j-1)h, y=kh]$ and $[x=(j+1)h, y=kh]$ at time $n\delta T$, respectively

制換気はせず、CO₂の拡散が不均一なまま各位置で10分間隔で1時間測定した。

得られた結果は Fig. 1, 2 および Table I, II に示す。

考 察

Table I より明らかなように、(7)式および(8)式から求めた C_m^+ 、すなわち、時間 $(n+1)\delta T$ における $m\delta X$ の位置の CO₂ 濃度は、実測値とよく一致している。

また、 $(m-1)\delta X$ 、 $m\delta X$ および $(m+1)\delta X$ のそれぞれの位置における CO₂ 濃度の時間的变化に対し、Fisher の直交多項式⁴⁾を適用すると、

$$\left. \begin{aligned} C_{m-1} &= 0.30 - 0.32 \times 10^{-2}t + 0.13 \times 10^{-4}t^2 \\ C_m &= 0.29 - 0.34 \times 10^{-2}t + 0.16 \times 10^{-4}t^2 \\ C_{m+1} &= 0.21 - 0.37 \times 10^{-2}t + 0.32 \times 10^{-4}t^2 \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

したがって、

$$\begin{aligned} [C_{m-1} + C_{m+1}]/2 &= 0.26 - 0.35 \times 10^{-2}t \\ &+ 0.23 \times 10^{-4}t^2 \dots (16) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} [C_{m-1} + C_m + C_{m+1}]/3 &= 0.27 - 0.34 \times 10^{-2}t \\ &+ 0.20 \times 10^{-4}t^2 \dots (17) \end{aligned}$$

が得られ、(16)および(17)両式から求めた C_m^+ の値と実測値との比較は Table III に示すようによく一致することが認められた。

また Table II から明らかなように、(14)式より求めた $C_{j, k}^+$ すなわち時間 $(n+1)\delta T$ における $x=jh, y=kh$ の位置の CO₂ 濃度は実測値とよく一致している。

一次元的な変化の場合と同様に、二次元的な CO₂ の濃度変化に対して Fisher の直交多項式を適用した場合、

$$C_{j, k-1} = 0.30 - 0.32 \times 10^{-2}t + 0.13 \times 10^{-4}t^2$$

TABLE III. Comparison of CO₂ Concentrations (%) calculated from Fisher's Orthogonal Polynomial and observed

Time (min)	Concentration of CO ₂ (%)			Diff.	
	Eq. (16) ^{a)} $[C_m^+]_{\text{calc.}}$	Eq. (17) ^{b)} $[C_m^+]_{\text{calc.}}$	$[C_m^+]_{\text{obs.}}$	Eq. (16)	Eq. (17)
0	0.26	0.27	0.26	0.00	-0.01
10	0.23	0.24	0.22	-0.01	-0.02
20	0.20	0.21	0.20	0.00	-0.01
30	0.18	0.19	0.17	-0.01	-0.02
40	0.16	0.17	0.15	-0.01	-0.02
50	0.14	0.15	0.14	0.00	-0.01
60	0.13	0.14	0.12	-0.01	-0.02

a) $C_m^+ = 0.26 - 0.35 \times 10^{-2}t + 0.23 \times 10^{-4}t^2$

b) $C_m^+ = 0.27 - 0.34 \times 10^{-2}t + 0.20 \times 10^{-4}t^2$

- 4) J. N. Eisen, A. B. Parks, E. H. Dawson, *Food Technology*, **14**, 237, 663 (1960); J. N. Eisen, *J. Food Science*, **29**, 105 (1964); N. H. Chen, D. F. Othmer, *J. Chem. Eng. Data*, **7**, 37 (1962); R. J. DeGray, *Ind. Eng. Chem.*, **58**, 57 (1966); 鳥居敏雄, 土肥一郎, 化学の領域 (増刊), **11**, 148 (1953).

$$C_{j, k+1} = 0.21 - 0.37 \times 10^{-2}t + 0.32 \times 10^{-4}t^2$$

$$C_{j-1, k} = 0.28 - 0.37 \times 10^{-2}t + 0.17 \times 10^{-4}t^2$$

$$C_{j+1, k} = 0.25 - 0.48 \times 10^{-2}t + 0.34 \times 10^{-4}t^2$$

が得られる。したがって、

$$[C_{j, k-1} + C_{j, k+1} + C_{j-1, k} + C_{j+1, k}] / 4 = 0.26 - 0.39 \times 10^{-2}t + 0.24 \times 10^{-4}t^2 \quad (18)$$

となり、Table IV に示すように、(18)式より求めた $C_{j, k}^+$ と実測値とがほぼ一致することが認められた。

TABLE IV. Comparison of CO₂ Concentrations (%) calculated from Fisher's Orthogonal Polynomial and observed

Time (min)	Concentration of CO ₂ (%).		Diff.
	Eq. (18) ^{a)} [C _{j, k} ⁺] _{calc.}	[C _{j, k} ⁺] _{obs.}	
0	0.26	0.26	0.00
10	0.22	0.22	0.00
20	0.19	0.20	+0.01
30	0.16	0.17	+0.01
40	0.14	0.15	+0.01
50	0.13	0.14	+0.01
60	0.11	0.12	+0.01

$$a) \quad C_{j, k}^+ = [C_{j, k-1} + C_{j, k+1} + C_{j-1, k} + C_{j+1, k}] / 4 \\ = 0.26 - 0.39 \times 10^{-2}t + 0.24 \times 10^{-4}t^2$$

これらのことから、室の複雑な構造にもかかわらず、二次元的な位置の変化と時間の変化による不均一な室内CO₂濃度の変化は、簡単な関係であらわすことができるということが認められた。

なお、以上の理論式の前提条件に、Schmidtの方法やDusinberreの方法を適用したが、これらが他の室における汚染空気の換気に対しても当てはめられるか否か、また、強制換気の場合の前回に示した換気に関する変数の変化に対しても適用できるか否かということは検討中である。

謝辞 終わりに本研究に際し、数学的方法について種々有益な御助言を賜った松田克己理学士に対し深謝します。