街路境界線に平行な 直線上の平均照度を求めること

正會員 黒澤 涼之助

To Find the Average Illumination along a Straight Line Parallel to the Boundary of Street.

By Ryōnosuke Kurosawa, Member.

内 容 梗 概

街路照明に於て、街路境界線に平行な直線上の平均照度を與へる公式を、光束法の公式より導いたものである。

その一つの形ちは：

$$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{S} \frac{dKF_0}{dX}$$

Synopsis.

By the formula of the useful flux method for the street lighting design, we are given

$$E = \frac{KF_0}{XS}$$

Where E : the average illumination in horizontal plane bounded by the parallel line X distant to each other,

S : spacing of the light sources,

F_0 : total flux emitted by each source,

and K : coefficient of utilization in the case.

The author derived, from the above, the formula giving the average illumination $\mathcal{E}(X)$ along the straight line parallel to the row of the sources and X distant to it:

$$\mathcal{E}(X) = \frac{dE}{dX} X + E$$

Or modifying it, he gives,

$$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{S} \frac{dKF_0}{dX}, \text{ etc.}$$

And he proves that $\mathcal{E}(X)$ is the monotonically decreasing function of X .

1. 水平面上に、 X の距離を以て一組の平行線を引く。その一つの真上 H なる高さに、間隔 S を以て、全く相等しい光源をおく。光源の各々が出す全光束を F_0 とすると、上の平行線間に在る水平面の部分に於ける水平面照度の平均 E は、

$$E = \frac{KF_0}{XS} \dots \dots \dots (1)$$

で與へられること、既に⁽¹⁾證明された如くである。但しこゝに K は利用率である。

(1) によつて與へられる E を $E(X)$ と表はす。

今、

$$\mathcal{E} = \frac{E(X_2)X_2S - E(X_1)X_1S}{X_2S - X_1S}, \quad X_2 > X_1$$

なるものを考へると、之は明らかに光源直下の直線より X_1 距たる直線と、 X_2 距たる直線との間にある部分に於ける平均照度である。 S は 0 でないから、右邊は S で約せる。次に $X_2 = X_1 + \Delta X$ とおくと、

(1) 黒澤：照明學會雜誌，11, 6, p 311, 1927.

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \frac{E(X_1 + \Delta X)(X_1 + \Delta X) - E(X_1)X_1}{\Delta X} \\ &= \frac{E(X_1 + \Delta X) - E(X_1)}{\Delta X} \cdot X_1 + E(X_1 + \Delta X).\end{aligned}$$

$E(X)$ は微分可能函数なること、容易に證明出来るゆゑ、

$$\mathbb{E} = E'(X_1 + \theta \cdot \Delta X) \cdot X_1 + E(X_1 + \Delta X), \quad 0 < \theta < 1.$$

$$\therefore \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \mathbb{E} = E'(X_1) \cdot X_1 + E(X_1).$$

之は、光源直下の直線より X_1 距たる直線上に於ける平均照度である。之を $\mathbb{E}(X_1)$ で表はせば

$$\mathbb{E}(X_1) = E'(X_1) \cdot X_1 + E(X_1) \dots \dots \dots (2)$$

添字の 1 は除いて差支へない。今後はさうすることにする。

2. (1) より

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dX} &= \frac{1}{SX^2} \left(X \frac{dKF_0}{dX} - KF_0 \right), \\ \therefore \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{S} \frac{dKF_0}{dX} \dots \dots \dots (3)\end{aligned}$$

(3) も一つの形で、此の方が簡単であるが、通常は K を X/H の函数として與へてゐるから之を x とおけば、

$$\mathbb{E}(X) = e(x) = \frac{F_0}{SH} \frac{dK}{dx} \dots \dots \dots (4)$$

K が x の函数として、數値の表又は曲線によつて與へられてゐれば、數値的又は圖的微分法によつて dK/dx を求め、よつて (4) を計算すれば、 $e(x)$ 即ち $\mathbb{E}(X)$ が得られる。

3. 尙、 $X = H \tan \beta$ とおくと、

$$\mathbb{E}(H \tan \beta) = \frac{\cos^2 \beta}{SH} \frac{dKF_0}{d\beta} \dots \dots \dots (5)$$

之も一つの形で、之を用ひると、

$$\mathbb{E}(0) = \frac{1}{SH} \left(\frac{dKF_0}{d\beta} \right)_{\beta=0} > 0,$$

$$\text{及び} \quad \mathbb{E}(\infty) = 0$$

を得る。

4. 相等しい光源の列が B だけ距たつて二つあるとすると、兩方による照度を加へ合せて、 $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(B-X)$ を計算すればよい。

5. (4) より、

$$\frac{de}{dx} = \frac{1}{SH} \frac{d^2 KF_0}{dx^2}, \dots \dots \dots (6)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2KF_0}{dx^2} &= \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 \frac{d^2KF_0}{d\beta^2} + \frac{d^2\beta}{dx^2} \frac{dKF_0}{d\beta} \\ &= 2 \sin \beta \cos^2 \beta \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I'(\theta) \cos^2 \theta - 2I(\theta) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \beta}} d\theta, \quad (1)\end{aligned}$$

$J(\theta) = I(\theta) \cos^2 \theta$ とおけば,

$$\begin{aligned}\frac{d^2KF_0}{dx^2} &= 2 \sin \beta \cos^2 \beta \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{J'(\theta) d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \beta}} \\ &= 2 \sin \beta \cos^2 \beta \frac{[J(\theta)]_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 \beta}}, \quad \beta < \xi < \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{2 \sin \beta \cos^4 \beta}{\sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 \beta}} I(\beta) \leq 0,\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{de}{dx} \leq 0, \dots\dots\dots (7)$$

$x=0$ のときは, いつも $d^2KF_0/dx^2=0$, $\therefore e'(0)=0$.

また,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{de}{dx} = \frac{1}{SH} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d^2KF_0}{dx^2} = 0$$

即ち $e(x)$ は $x=0$ に於て極大で, $(0, a)$, $a>0$ に於て連続なる單調減少函數である。

6. 光束法による街路照明設計の公式は, 街路境界線内の部分に於ける平均照度を與へるが, 此の度はその公式より, 境界線に平行な直線上の平均照度を與へる公式を導いたのである。その實用的計算法及びその性質も, 併せて説かれてゐる。