論 說

球面系の相互反射論*

正 會 員 山 内 二 郎

(逓信省電氣試験所)

は し が き

相互反射論の中球面系については割合に簡単な場合が多い。本文はさして目新しいものではないが、前々から試みて得た結論の一部が或は球形光束計などのことを考へてゐる人達の同じ勢力を省くのに役立つこともあらうかと考へて記して見たに過ぎない。

本文に示す例は極めて簡単な假定のもとに進めたもので、實際の驗しは少しも行つてゐないことを豫め御斷りしておかなければならない。

1. 相互反射積分方程式

本文の基になる假定は面が完全擴散性であると云ふことである。また進行形式の基は Buckley⁽¹⁾の相互反射積分方程式である。

相互反射面系に於てある點 x の直射照度を $E(x)$ 、他の點 z に於ける微小面積 dS からその點への照度係数を $e(z, x)$ 、相互反射をも考へた照度を $\varepsilon(x)$ 、 $\varepsilon(z)$ 等とし、相互反射面系の全面積を S とすれば、Buckley の積分方程式によつて

$$\varepsilon(x) = E(x) + \int_S \varepsilon(z) e(z, x) dS \dots\dots\dots (1)$$

としてあらはされる。茲に z と x が向き合つてゐなければ $e(z, x) = 0$ である。この積分方程式の Fredholm の解は Buckley の云ふ様に筆者⁽²⁾が嘗て求めた無限級数であらした解となるのである。

今 z に於ける光束發散が單位の大きさのとき x に於ける照度が $e_0(z, x) dS$ とすれば、 $e_0(z, x)$ を固有照度係数と云ひ、全く幾何學的に (2) 式によつてあらはされる。

$$e_0(z, x) = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\pi l^2} \dots\dots\dots (2)$$

茲に α 、 β は x 及 z に於ける入射角又發散角で、 l は x と z との距離である。

もし完全擴散反射のみとすれば、その反射率を ρ とし

$$e(z, x) = \rho(z) e_0(z, x) \dots\dots\dots (3)$$

となる。従つて (1) 式は

$$\varepsilon(x) = E(x) + \int_S \rho(z) e_0(z, x) \varepsilon(z) dS \dots\dots\dots (4)$$

* Interreflection in Spherical System, By Ziro Yamauti, Member. (Denki Sikenzyo)

(1) Buckley: Proc. I. C. I. 1928, p. 888.

(2) 山内: 電氣試験所研究報告190號, 1927.

とあらはされる.

x と z とが同一球面上にあれば

$$e_0(z, x) = 1/(\pi D^2) \dots \dots \dots (5)$$

となることも明かであらう.

2. 擴散透過をもなす面系の相互反射方程式

面 (i) の正面の反射率を $\rho(+i)$, 負面の反射率を $\rho(-i)$, 正面より負面への透過率を $\tau(+i)$ 負面より正面へのそれを $\tau(-i)$ とすれば (1) 式は明かに

$$\epsilon(z) = E(x) + \int_S [\rho(z)\epsilon(z) + \tau(-z)\epsilon(-z)] e_0(z, x) dS \dots \dots \dots (6)$$

である.

3. 空の球内の相互反射

空の球内に於ては (4) 及 (5) 兩式から

$$\epsilon(x) = E(x) + \frac{1}{\pi D^2} \int_S \rho(z)\epsilon(z) dS \dots \dots \dots (7)$$

となる.

右邊第2項は x を含まないから, 定数である. これを ϵ とすれば (7) 式は

$$\epsilon(x) = E(x) + \epsilon \dots \dots \dots (8)$$

となるから, これを (7) 式に入れて

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{\pi D^2} \int_S \rho E dS}{1 - \frac{1}{\pi D^2} \int_S \rho dS} \dots \dots \dots (9)$$

これを (8) 式に入れて解くことが出来た.

全球面の場合 Hartinger⁽³⁾ が普通の方法で同じ様な結果を得てゐるし, 筆者も嘗て筆者⁽²⁾ の積分方程式から出發して求めておいた. 最近 Buchbinder⁽⁴⁾ は ρ が一定の場合同様に積分方程式から求めてゐる.

球面の相互反射による擴散照度はかやうに反射率が一樣でなくても一定である.

ρ 一定, S を全球面にとれば, (9) は普通に求められてゐるものになることは云ふまでもない.

4. Priest の分光測光球の誤差

Priest の分光測光球で擴散反射率を測定するときの誤差を計算して見る.

4a. 試料と標準とを取り換へて測定する場合

x を以て球面上の位置をあらはし, y を以て試料面 (平面) 上の位置をあらはすと, (4) 式は

(3) Hartinger: L. u. L., S. 394, 17 Juni 1926.

(4) Buchbinder: Z. f. techn. Phys., 12, März 1931, S. 164.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(x_1) &= E(x_1) + \int_{S_0} \rho_0 e_0(x, x_1) \varepsilon(x) dS + \int_{S_1} \rho_1 e_0(y, x_1) \varepsilon(y) dS \\ \varepsilon(y_1) &= E(y_1) + \int_{S_0} \rho_0 e_0(x, y_1) \varepsilon(x) dS \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

となる。茲に $E(x)$ 及 $E(y)$ は入射光が球面で第1回反射をしたその反射光による直射照度、 ρ_0 及 ρ_1 はそれぞれ球面及試料面の反射率、 S_0 及 S_1 はそれぞれの面積である。

入射窓及測光窓のために球面の欠けた部分の完全な球面に對する割合を a 、試料面のためのそれを α とすれば

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \pi D^2 (1-a-\alpha) \\ S_1 &= \pi D^2 \alpha (1-a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

今 a が 1% 位とすれば、試料面の照度分布は一樣と考へてよいから、 $E(y) = E(x)/(1-a)$ となる。よつて $E(x) = E$ とおけば

$$E(y) = E/(1-a)$$

又試料面の照度分布が一樣とすればその反射光による球面上の照度も一樣となり、結局 $\varepsilon(x)$ は一樣と考へられる。したがつて $\varepsilon(x) = \varepsilon_0$ 、 $\varepsilon(y) = \varepsilon_1$ とおけば

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= E + \rho_0 \varepsilon_0 \int_{S_0} e_0(x, x_1) dS + \rho_1 \varepsilon_1 \int_{S_1} e_0(y, x_1) dS \\ \varepsilon_1 &= E/(1-a) + \rho_0 \varepsilon_0 \int_{S_0} e_0(x, y_1) dS \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \int_{S_0} e_0(x, x_1) dS &= 1-a-\alpha \\ \int_{S_1} e_0(y, x_1) dS &= \alpha \\ \int_{S_0} e_0(x, y_1) dS &= \frac{1-a-\alpha}{1-a} \end{aligned}$$

となるから、これを上式に入れて

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= E + \rho_0 \varepsilon_0 (1-a-\alpha) + \rho_1 \varepsilon_1 \alpha \\ \varepsilon_1 (1-a) &= E + \rho_0 \varepsilon_0 (1-a-\alpha) \end{aligned}$$

これを解いて

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{1-a(1-\rho_1)} = \frac{E}{1-a-\rho_0(1-a-\alpha)(1-a+\alpha\rho_1)} \dots\dots\dots (12)$$

測光に於ては比較すべき試料面を取り換へてその輝度を比較して、その比が反射率の比に等しとする。輝度の比は

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\rho_1 \varepsilon_1}{\rho_2 \varepsilon_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (1+\Delta)$$

即ち Δ が誤差となる。(12)式から

$$\Delta = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 = \frac{1-a-\rho_0(1-a-a)(1-a+a\rho_2)}{1-a-\rho_0(1-a-a)(1-a+a\rho_1)} - 1$$

$$= \frac{\rho_0(1-a-a)a(\rho_1-\rho_2)}{1-a-\rho_0(1-a-a)(1-a+a\rho_1)} \dots\dots\dots (13)$$

となる。 $0 \leq \rho_1 \leq 1$ であるから、(13)式の分母に入れて、

$$\frac{a}{1-a} |(\rho_1-\rho_2)| \left[\frac{1}{1-\rho_0(1-a-a)} - 1 \right] \leq |\Delta| \leq a |(\rho_1-\rho_2)| \frac{\rho_0(1-a-a)}{1-a-\rho_0(1-a-a)}$$

$\rho_0=98\%$, $a=1\%$, $a=2\%$ とすれば

$$0.194 \leq \frac{\Delta}{\rho_1-\rho_2} \leq 0.241$$

$\rho_1 = \rho_2$ ならば誤差はなくなるが、もし $|\rho_1 - \rho_2| = 50\%$ ならば Δ は 9.7~12% の誤差、 $|\rho_1 - \rho_2| = 10\%$ でも 1.9~2.4% の誤差となる。

かやうに相當大きな誤差となる。

最近 Hardy 及 Pineo⁽⁶⁾ は試料面と同一球面を球面上の面として誤差を算定してゐる。これは(10)式に立歸れば第2式に試料面の相互反射も入つて(7)式と同様になり

$$\epsilon'_0 = \epsilon'_1 = \frac{E}{1-\rho_0(1-a-a)-a\rho_1} \dots\dots\dots (14)$$

従つて前と同様にして

$$\Delta' = \frac{\epsilon'_1}{\epsilon'_2} - 1 = \frac{1-\rho_0(1-a-a)-a\rho_2}{1-\rho_0(1-a-a)-a\rho_1} - 1$$

$$= \frac{a(\rho_1-\rho_2)}{1-\rho_0(1-a-a)-a\rho_1} \dots\dots\dots (15)$$

となり、Hardy 及 Pineo のものと同じで、(13)式と異なる。前と同様に考へて

$$\frac{a |(\rho_1-\rho_2)|}{1-\rho_0(1-a-a)} \leq |\Delta'| \leq \frac{a |(\rho_1-\rho_2)|}{1-a-\rho_0(1-a-a)}$$

前と同じ數値を入れて

$$0.202 \leq \frac{\Delta'}{\rho_1-\rho_2} \leq 0.254$$

となり、前よりもやゝ大き目の誤差となる。

平面と考へたときと球面と考へたときの輝度の比は

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon'_1} = \frac{1-a-\rho_0(1-a-a)(1-a+a\rho_1)}{1-\rho_0(1-a-a)-a\rho_1}$$

$$= 1 - \frac{a(1-\rho_1)[1-\rho_0(1-a-a)]}{1-\rho_0(1-a-a)-a\rho_1} \dots\dots\dots (16)$$

もし $\rho_1 = 0$ ならば $\frac{\epsilon_1}{\epsilon'_1} = 1-a$ となり、 ρ_1 が大きくなるに従ひ漸次 1 に近付いて行き $\rho_1 = 1$ のとき 1 となる。

⁽⁶⁾ Hardy and Pineo: J. O. S. A., Vol. 21, No. 8, Aug. 1931, p. 502.

4b. 試料と標準とを同時に測定する場合

この場合には、前と同じ假定で次の式を得る。試料及標準については傍字 1 及 2 を附して示す。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= E + \rho_0 \varepsilon_0 (1-a-2a) + \rho_1 a \varepsilon_1 + \rho_2 a \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1(1-a) &= E + \rho_0 \varepsilon_0 (1-a-2a) + \rho_2 a \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2(1-a) &= E + \rho_0 \varepsilon_0 (1-a-2a) + \rho_1 a \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

これを解いて

$$\frac{\varepsilon_0}{(1-a+\rho_1 a)(1-a+\rho_2 a)} = \frac{\varepsilon_1}{1-a+\rho_2 a} = \frac{\varepsilon_2}{1-a+\rho_1 a} \\ = \frac{E}{(1-a)^2 - \rho_1 \rho_2 a^2 - \rho_0 (1-a-2a)(1-a+\rho_1 a)(1-a+\rho_2 a)} \dots\dots\dots (18)$$

を得る。前と同じ様に輝度の比をとつて反射率の比とすると、その誤差 Δ は

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 = \frac{1-a+\rho_2 a}{1-a+\rho_1 a} - 1 = \frac{a(\rho_2 - \rho_1)}{1-a+\rho_1 a} \dots\dots\dots (18)$$

$0 \leq \rho_1 \leq 1$ であるから

$$\frac{a}{1-a} |\rho_2 - \rho_1| \geq |\Delta| \geq a |\rho_2 - \rho_1|$$

a を 1% とすれば

$$\Delta = 0.010(\rho_2 - \rho_1)$$

となつて誤差ははるかに小さい。

もし Hardy と Pineo の試みた様に試料面が同一球面の一部とすれば、明かに誤差がない結果となる。

5. 中心に共心外球と均等點光源のある球.

反射率、透過率が各々であるとするれば、總て中心に對して對稱であるから、照度分布も對稱である。

球面上の點を x , 外球の點を y , 球の反射率 ρ , 外球の反射率は内部 ρ_1 , 外部 ρ_2 , 透過率を τ , 照度も球は傍字なく, 外球の内部は 1, 外部は 2 をつけてあらはすと, 積分方程式は次の三つとなる。但し S' は球面の一から見て見える外球の影にならない球面の面積, S'' は外球上から見て見える球面の面積, S'_1 及 S'_2 は球面上の點から見て外球の見える部分の面積である。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(x) &= \rho \int_{S'} \varepsilon_0(x, x_1) \varepsilon(x) dS + \rho_2 \int_{S'_2} \varepsilon_0(y, x_1) \varepsilon_2(y) dS \\ &\quad + \tau \int_{S'_1} \varepsilon_0(y, x_1) \varepsilon_1(x) dS \\ \varepsilon_2(y_1) &= \rho \int_{S''} \varepsilon_0(x, y_1) \varepsilon(x) dS \\ \varepsilon_1(y_1) &= E + \rho_1 \int_{S'_1} \varepsilon_0(y, y_1) \varepsilon_1(y) dS + \tau \int_{S'_2} \varepsilon_0(y, y_1) \varepsilon_2(y) dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

外球の直径を D_1 , 球の直径を D とし, $a = D_1/D$ とすれば

$$\frac{S'}{\pi D^2} = 1 - a^2$$

$$\int_{S_1'} e_0(y, x_1) dS = \int_{S_2'} e_0(y, x_1) dS = a^2$$

$$\int_{S''} e_0(x, y_1) dS = 1$$

であるから, (17)式は

$$\epsilon = \rho\epsilon(1-a^2) + \rho_2\epsilon_2a^2 + \tau\epsilon_1a^2$$

$$\epsilon_2 = \rho\epsilon$$

$$\epsilon_1 = E + \rho_1\epsilon_1 + \tau\epsilon_2$$

これから

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_2 &= \rho\epsilon \\ \epsilon_1 &= \frac{\epsilon}{\tau a^2} [1 - \rho(1-a^2) - \rho\rho_2a^2] \\ \epsilon &= \frac{\tau a^2 E}{(1-\rho_1)[1 - \rho(1-a^2) - \rho\rho_2a^2] - \rho\tau^2a^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

外球の全光束は

$$F_0 = \tau E \pi D_1^2 / (1-\rho_1) = \pi D^2 \cdot \tau E a^2 / (1-\rho_1)$$

であるから

$$\epsilon = \frac{F_0}{\pi D^2} \cdot \frac{1-\rho_1}{(1-\rho_1)[1 - \rho(1-a^2) - \rho\rho_2a^2] - \rho\tau^2a^2} \dots\dots\dots (21)$$

外球による直射照度は $F_0/\pi D^2$ であるから, これを遮光板で測光窓に遮ぎると, 測光窓の拡散照度 ϵ' は

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \frac{F_0}{\pi D^2} \left(\frac{1-\rho_1}{(1-\rho_1)[1 - \rho(1-a^2) - \rho\rho_2a^2] - \rho\tau^2a^2} - 1 \right) \\ &= \frac{\rho F_0}{\pi D^2} \cdot \frac{[1-a^2 + \rho_2a^2](1-\rho_1) + \tau^2a^2}{(1-\rho_1)[1 - \rho(1-a^2) - \rho\rho_2a^2] - \rho\tau^2a^2} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

外球の存在を無視して求める拡散照度は

$$\epsilon' = \frac{F_0'}{\pi D^2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \dots\dots\dots (23)$$

となり, これから外球の全光束が求められると考へてゐる. よつて全光束の値の誤差は

$$\begin{aligned} \frac{F_0'}{F_0} - 1 &= \frac{(1-\rho)[(1-a^2 + \rho_2a^2)(1-\rho_1) + \tau^2a^2]}{(1-\rho_1)[1 - \rho(1-a^2) - \rho\rho_2a^2] - \rho\tau^2a^2} - 1 \\ &= -a^2 \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2) - \tau^2}{(1-\rho_1)[1 - \rho(1-a^2) - \rho\rho_2a^2] - \rho\tau^2a^2} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

分母に於ても a^2 を含んだ項が省畧し得るとすれば

$$\frac{F_0'}{F_0} - 1 = -a^2 \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2) - \tau^2}{(1-\rho_1)(1-\rho)} \dots\dots\dots (24a)$$

直径 1.5m の球形光束計に直径 30cm の外球をおき, $\rho = 80\%$, $\rho_1 = \rho_2 = 20\%$, $\tau = 50\%$ とすれば, この誤差は

$$-\left(\frac{30}{150}\right)^2 \frac{0.8^2 - 0.5^2}{0.8 \times 0.2} = -\frac{39}{400} \div -10\%$$

即ち約10%の誤差で測光誤差より大きい。

6. 双球の相互反対

擴散透過體の擴散透過率をはかるために双兒球を用ひることがある。この場合の誤差について計算を行ふ。

第1球の反射率 ρ_1 , 直径 D_1 , 第2球のそれ等をそれぞれ ρ_2 , D_2 とする。

第1球を均等照度で照らしたときの兩球の照度分布を求めて見る。

第1球面上の位置を x , 第2球面上の位置を y とし, 各々の面積及照度にそれぞれ傍字1及2を附して各球を示す。

積分方程式は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1(x) &= E + \rho_1 \int_{S_1} \epsilon_1(x_1) e_o(x_1, x) dS + \rho_2 \int_{S_2} \epsilon_2(y_1) e_o(y_1, x) dS \\ \epsilon_2(y) &= \rho_1 \int_{S_1} \epsilon_1(x_1) e_o(x_1, y) dS + \rho_2 \int_{S_2} \epsilon_2(y_1) e_o(y_1, y) dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

x と y とがむき合つてゐない部分では $e_o(x, y)$ も $e_o(y, x)$ も零である。

さて第1球のみの反射を考へるとその照度は一定となる。従つて第2球から見て輝度は一定であるから, それによる第2球の照度分布も一定になり, 第2球のみの反射を考へると再び照度分布は一定となり, 第1球から見る輝度亦一定となる。かくして結局の照度分布は兩球に於て一定となる。よつて(25)式は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= E + \rho_1 \epsilon_1 \int_{S_1} e_o(x_1, x) dS + \rho_2 \epsilon_2 \int_{S_2} e_o(y_1, x) dS \\ \epsilon_2 &= \rho_1 \epsilon_1 \int_{S_1} e_o(x_1, y) dS + \rho_2 \epsilon_2 \int_{S_2} e_o(y_1, y) dS \end{aligned} \right\}$$

となる。

$\int_{S_1} e_o(x_1, y) dS$ は y から見える S_1 の部分についてのみ積分すればよいから, 結局第2球の欠けた部分 S'_2 におきかへて

$$\int_{S_1} e_o(x_1, y) dS = \int_{S'_2} e_o(y', y) dS = \frac{S'_2}{\pi D_2^2}$$

同様にして $\int_{S_2} e_o(y_1, x) dS$ は第1球の欠けた部分 S'_1 におきかへて

$$\int_{S_2} e_o(y_1, x) dS = \int_{S'_1} e_o(x', x) dS = \frac{S'_1}{\pi D_1^2}$$

第1球と第2球との切合の圓の半径が第1球の中心に含む角を ω_1 , 第2球の中心に含む角を ω_2 とすれば

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{\pi D_1^2} &= \frac{1}{2} (1 + \cos \omega_1) = \cos^2 \frac{\omega_1}{2}, & \frac{S'_1}{\pi D_1^2} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \omega_1) = \sin^2 \frac{\omega_1}{2} \\ \frac{S_2}{\pi D_2^2} &= \frac{1}{2} (1 + \cos \omega_2) = \cos^2 \frac{\omega_2}{2}, & \frac{S'_2}{\pi D_2^2} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \omega_2) = \sin^2 \frac{\omega_2}{2} \end{aligned}$$

であるから, $\cos \frac{\omega_1}{2} = c_1$, $\sin \frac{\omega_1}{2} = s_1$, $\cos \frac{\omega_2}{2} = c_2$, $\sin \frac{\omega_2}{2} = s_2$ として積分方程式を書き直すと

$$\epsilon_1 = E + \rho_1 \epsilon_1 c_1^2 + \rho_2 \epsilon_2 s_1^2$$

$$\epsilon_2 = \rho_1 \epsilon_1 s_2^2 + \rho_2 \epsilon_2 c_2^2$$

これを解いて

$$\frac{\epsilon_1}{1 - \rho_2 c_2^2} = \frac{\epsilon_2}{\rho_1 s_2^2} = \frac{E}{(1 - \rho_1 c_1^2)(1 - \rho_2 c_2^2) - \rho_1 \rho_2 s_1^2 s_2^2} \dots \dots \dots (26)$$

第2球に於て測光壁には第1球からの直射照度がない様に遮光板をおいたときの照度 ϵ_{20} は

$$\begin{aligned} \epsilon_{20} &= \rho_2 \epsilon_2 c_2^2 \\ &= \frac{\rho_1 \rho_2 c_2^2 s_2^2 E}{(1 - \rho_1 c_1^2)(1 - \rho_2 c_2^2) - \rho_1 \rho_2 s_1^2 s_2^2} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

今 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $c_1 = c_2 = c$, $s_1 = s_2 = s$ とすれば

$$\epsilon_{20} = \frac{\rho^2 c^2 s^2 E}{(1 - \rho)(1 - \rho + 2\rho s^2)} \dots \dots \dots (27a)$$

となる。

切合の處に完全擴散反射透過平面をおいたときの照度分布を求めて見る。

この試料の第1球側の反射率 ρ_3 , 第2球側のそれを ρ_4 , 第1球側から第2球側への透過率を τ_3 , 第2球側から第1球側への透過率を τ_4 , 第1球の照度を ϵ'_1 , 第2球のそれを ϵ'_2 , 第1球側の試料の照度を ϵ'_3 , 第2球側のそれを ϵ'_4 とする。前と同じ様な理由によつて照度分布は何れの面上でも一定となる。よつて積分方程式を立て、一定である条件を入れると

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_1 &= E + \epsilon'_1 \rho_1 c_1^2 + \epsilon'_3 \rho_3 s_1^2 + \epsilon'_4 \tau_4 s_1^2 \\ \epsilon'_2 &= \epsilon'_2 \rho_2 c_2^2 + \epsilon'_3 \tau_3 s_2^2 + \epsilon'_4 \rho_4 s_2^2 \\ \epsilon'_3 &= \epsilon'_1 \rho_1 \\ \epsilon'_4 &= \epsilon'_2 \rho_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

これをといて

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon'_1}{1 - \rho_2 c_2^2 - \rho_4 \rho_4 s_2^2} &= \frac{\epsilon'_2}{\rho_1 \tau_3 s_2^2} \\ &= \frac{E}{(1 - \rho_1 c_1^2 - \rho_1 \rho_3 s_1^2)(1 - \rho_2 c_2^2 - \rho_4 \rho_4 s_2^2) - \rho_1 \rho_2 \tau_4 s_1^2 s_2^2} \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

試料からの直射照度を除いたものを ϵ'_{20} とすれば

$$\begin{aligned} \epsilon'_{20} &= \epsilon'_2 - \rho_4 \epsilon'_4 s_2^2 - \tau_3 \epsilon'_3 s_2^2 = \epsilon'_2 \rho_2 c_2^2 \\ &= \frac{\rho_1 \rho_2 \tau_3 c_2^2 s_2^2 E}{(1 - \rho_1 c_1^2 - \rho_1 \rho_3 s_1^2)(1 - \rho_2 c_2^2 - \rho_4 \rho_4 s_2^2) - \rho_1 \rho_2 \tau_4 s_1^2 s_2^2} \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

今 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $c_1 = c_2 = c$, $s_1 = s_2 = s$ とすれば

$$\epsilon'_{20} = \frac{\rho^2 \tau_3 c^2 s^2 E}{(1 - \rho c^2 - \rho \rho_3 s^2)(1 - \rho c^2 - \rho \rho_4 s^2) - \rho^2 \tau_4 s^4} \dots \dots \dots (30a)$$

試料の透過率 τ'_3 は

$$\tau'_3 = \frac{\varepsilon'_{20}}{\varepsilon_{20}}$$

として求めてゐるから、その誤差は

$$\begin{aligned} \frac{\tau'_3}{\tau_3} - 1 &= \frac{(1-\rho)(1-\rho+2\rho s^2)}{(1-\rho c^2-\rho\rho_3 s^2)(1-\rho c^2-\rho\rho_4 s^2)-\rho_2 \tau_3 \tau_4 s^4} - 1 \\ &= \rho s^2 \frac{(1-\rho)(\rho_3+\rho_4)-\rho s^2[(1-\rho_3)(1-\rho_4)-\tau_3 \tau_4]}{(1-\rho c^2-\rho\rho_3 s^2)(1-\rho c^2-\rho\rho_4 s^2)-\rho^2 \tau_3 \tau_4 s^4} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

s^2 が小さいから s^4 の項を省略して

$$\frac{\tau'_3}{\tau_3} - 1 = \rho s^2 \frac{(1-\rho)(\rho_3+\rho_4)-\rho s^2[(1-\rho_3)(1-\rho_4)-\tau_3 \tau_4]}{(1-\rho)(1-\rho+\rho s^2(2-\rho_3-\rho_4))} \dots\dots\dots (31a)$$

$\rho=80\%$, $\rho_3=\rho_4=20\%$, $\tau_3=\tau_4=50\%$, $s^2=\frac{1}{10}$ とすれば

$$\frac{\tau'_3}{\tau_3} - 1 = 0.8 \times \frac{1}{10} \frac{0.2 \times 0.4 - 0.08[0.8 \times 0.8 - 0.25]}{0.2[0.2 + 0.08 \times 1.6]} = 0.06$$

即ち 6 % の誤差を生ずる。

$\rho=80\%$, $\rho_3=\rho_4=40\%$, $\tau_3=\tau_4=50\%$, $s^2=\frac{1}{100}$ とすれば

$$\frac{\tau'_3}{\tau_3} - 1 = 3 \%$$

となり、何れも測光誤差範囲より多い。

7. む す び

8. 上記の様に簡単な場合の誤差を算定し得るが、それ等から想定し得る様に種々の場合に相當の誤差のあることは注意を要する點である。従つてかやうな測定器を用ひた場合にはその測定器の大きさ、測定値の算定法等について記載すべき必要がある。

(昭和 6 年 11 月 2 日)