論 說

有限圓筒黒體の黒さ* (二)

正 會 員 山 内 二 郎

(通 信 省 電 氣 試 験 所)

内 容 梗 概

一樣な温度に熱せられた有限圓筒の黒體の黒さについて底のない場合を前稿に論じたが、本稿は底のある場合について論じた。これで光度標準器として用ひられる黒體の設計に長さの決定をなすことが出来る。この度は一般解、1項近似解及3項近似解を示した。

は し が き

先に半無限長圓筒内の相互反射⁽¹⁾及有限圓筒黒體の底のない場合⁽²⁾の黒さについて一般解を示し、Buckleyの與へた1項近似解と2項近似解とを3項近似解で比較して、1項近似解が却つて2項近似解に勝ることを示して置いた。それで本稿では底のある有限圓筒黒體の黒さについて一般解を示し、大體の傾向を見るためには1項近似解により、詳しい値を知るためには3項近似解によるつもりで、異質の底のある場合は3項近似解では觸れないで、たゞ1項近似解のみを示した。同質の底のある場合は光度標準器に相當するのでその黒さを3項近似解でも示した。

1. 基本方程式

前稿(1)式から出發する。

底のある圓筒の場合には、底が軸に垂直ならば、輻射束の分布は軸に對稱であるから、圓筒壁の位置を開いた口からはかつて x とし、又底が一樣に發散してゐるものと假定すれば、發散率 ϵ である圓筒壁では

$$\Phi(x_1) = \epsilon + (1 - \epsilon) \int_0^l \Phi(x) K(x, x_1) dx + (1 - \epsilon) \Phi_0 K_0(l - x_1) \dots \dots (1. 1)$$

又發散率 ϵ_0 である底面では

$$\Phi_0 = \epsilon_0 + (1 - \epsilon_0) \int_0^l \Phi(x) K_0'(l - x) dx \dots \dots \dots (1. 2)$$

但し圓筒の半径を長さの單位にとり、 l は圓筒の長さ、 $K(x, x_1) dx$ は單位發散度のとき x に於ける dx の幅をもつた圓環から x_1 に直射する照度、 $K_0(l - x)$ は底が單位發散度のとき x に生ずる直射照

Blackness of Cylindrical Blackbody of Finite Length (2), by Dr. Z. Yamauti, Member.

(1) 山内：本誌16巻6号117頁 昭和7年6月

(2) 山内：本誌18巻7号 昭和9年7月 141頁

度、 $K_0'(l-x)dx$ は x に於て幅 dx の圓環が單位發散度のとき底に生ずる平均直射照度、 ϕ_0 は底面の全發散度である。もし底がなければ(1.1)式で $\phi_0=0$ で、前稿(2)式となる。

2. 圓筒内の固有照度線係數

固有照度線係數 $K(x, x_1)$ は前稿(3)式に示した様に $x \geq 0$ に於て

$$K(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x(x^2+6)}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} \right) \dots \dots \dots (2.1)$$

であらはされる。

入射光束の相反法則によつて單位發散度の幅 dx の圓環から距離 x の所にある圓板に入射する光束は單位發散度のその圓板からその圓環へ入射する光束に等しいから

$$\pi K_0'(x) dx = 2\pi dx K_0(x)$$

$$\text{即ち} \quad K_0'(x) = 2K_0(x) \dots \dots \dots (2.2)$$

又圓板の前に半無限圓筒を考えると明かに

$$2\pi \int_x^\infty K(x) dx = \pi K_0'(x) \dots \dots \dots (2.3)$$

で、左邊の積分に(3)式を入れて積分すれば

$$\int_x^\infty K(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} - x \right]$$

即ち前稿(28)式左邊となるから、(2.2)及(2.3)式から

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} - x \right] \dots \dots \dots (2.4)$$

これ等の係數の近似値は前論文⁽¹⁾に示した様に一般に次の様にあらはされる。

$$K(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_i e^{r_i x} \dots \dots \dots (2.5)$$

$$K_0(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{r_i} e^{r_i x} \dots \dots \dots (2.6)$$

3. 積分方程式の一般解

3.1 基本聯方程式

核が(2.5)及(2.6)式で與へられれば、原積分方程式の解は

$$\Phi(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n \left[A_i e^{r_i x} + B_i e^{\beta_i(l-x)} \right] \dots \dots \dots (3.1)$$

で與へられやう。核及(3.1)式を(1.2)式に入れて

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) &= A_0 + \sum_{i=1}^n \left[A_i e^{r_i x_1} + B_i e^{\beta_i(l-x_1)} \right] \\ &= \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{2} \int_0^{x_1} \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \left[A_i e^{r_i x} + B_i e^{\beta_i(l-x)} \right] \right) \sum_{j=1}^n C_j e^{r_j(x_1-x)} dx \\ &\quad + \frac{1-\varepsilon}{2} \int_{x_1}^l \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \left[A_i e^{r_i x} + B_i e^{\beta_i(l-x)} \right] \right) \sum_{j=1}^n C_j e^{r_j(x-x_1)} dx \end{aligned}$$

$$-\frac{1-\varepsilon}{2} \Phi_0 \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{r_j} e^{\tau_j(l-x_1)}$$

これを積分して、兩邊の相當項を項々比較して次の關係を得る。

定數項を比較して

$$A_0 = \varepsilon - (1-\varepsilon) A_0 \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{r_j} = \varepsilon + (1-\varepsilon) A_0$$

$$\text{即ち } A_0 = 1 \dots\dots\dots (3. 2)$$

$e^{\alpha_i x_1}$ の係数を比較して

$$1 = (1-\varepsilon) \sum_{j=1}^n \frac{C_j r_j}{a_i^2 - r_j^2} \dots\dots\dots (3. 3)$$

$e^{\beta_i(l-x_1)}$ の係数を比較して

$$1 = (1-\varepsilon) \sum_{j=1}^n \frac{C_j r_j}{\beta_i^2 - r_j^2} \dots\dots\dots (3. 4)$$

(3.3)及(3.4)式を比較して $a_i = \beta_i$ であることを知る。これは半無限圓筒の場合⁽¹⁾と全く同じく、これから a が求められる。従つて以下 β_i を a_i とおく。

$e^{\tau_i x_1}$ 及 $e^{\tau_i(l-x_1)}$ の係数を比較して

$$0 = \frac{A_0}{r_j} - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{a_i - r_j} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i e^{\alpha_i l}}{a_i + r_j} \dots\dots\dots (3. 5)$$

$$0 = \frac{A_0}{r_j} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i e^{\alpha_i l}}{a_i + r_j} - \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{a_i - r_j} - \frac{\Phi_0}{r_i} \dots\dots\dots (3. 6)$$

(1.2) 式から

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varepsilon_0 - (1-\varepsilon_0) \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_j}{r_j} \left[\frac{A_0}{r_j} (e^{\tau_i l} - 1) + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{a_i - r_j} (e^{\alpha_i l} - e^{\tau_i l}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{a_i + r_j} (e^{(\alpha_i + \tau_j) l} - 1) \right] \right) \\ &= \varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0) \sum_{j=1}^n \left(\frac{C_j}{r_j} \left[\frac{A_0}{r_j} - \sum_{i=1}^n \frac{A_i e^{\alpha_i l}}{a_j - r_j} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{a_i + r_j} \right] \right. \\ &\quad \left. - (1-\varepsilon_0) \sum_{j=1}^n \left(\frac{C_j}{r_j} e^{\tau_j l} \left[\frac{A_0}{r_j} - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{a_i - r_j} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i e^{\alpha_i l}}{a_i + r_j} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

第3項は(3.5)式によつて零であるから

$$\Phi_0 = \varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0) \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_j}{r_j} \left[\frac{A_0}{r_j} - \sum_{j=1}^n \frac{A_i e^{\alpha_i l}}{a_i - r_j} + \sum_{j=1}^n \frac{B_i}{a_i + r_j} \right] \right)$$

尙 $\sum_{j=1}^n (C_j/r_j^2) = 1$ であるから

$$\Phi_0 = 1 - (1-\varepsilon_0) \sum_{j=1}^n \left(\frac{C_j}{r_j} \left[\sum_{j=1}^n \frac{A_i e^{\alpha_i l}}{a_i - r_j} - \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{a_i + r_j} \right] \right) \dots\dots\dots (3. 7)$$

(3.5), (3.6) 及 (3.7) 式から A 及 B が求められる。

底のない半無限圓筒では (3.5) 式で $l=\infty$ とおけばよいので、これは前論文の(11)式になる。この場合の A_i の値を A_{∞} としておく。

圓筒が底を持つてゐない場合には、(3.6)式に於て $\phi_0=0$ であるから、(3.5) 及(3.6)式を比較して

$$A_i = B_i \dots\dots\dots (3.8)$$

を得る。従つて(3.5)式は前稿の(5)式の様に

$$O = \frac{A_0}{r_j} - \sum_{i=1}^n \left(A_i \left[\frac{1}{a_i - r_j} - \frac{e^{\alpha_i l}}{a_i + r_j} \right] \right) \dots\dots\dots (3.9)$$

となる。

3.2 基本聯立方程式の直接解

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{r_j(a_i - r_j)} \\ b_i &= \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{r_j(a_i + r_j)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.10)$$

と置けば、(3.6)及(3.7)式から ϕ_0 を消去して

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i l} \left[\frac{(1-\varepsilon_0)a_i}{r_j} + \frac{1}{a_i + r_j} \right] = \sum_{j=1}^n B_j \left[\frac{(1-\varepsilon_0)b_i}{r_j} + \frac{1}{a_i - r_j} \right] \quad (3.11)$$

を得る。これから

$$B_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} A_j e^{\alpha_j l} \dots\dots\dots (3.12)$$

の形で求められる。 a_{ji} は ε 及 ε_0 の函数である。

(3.12)式を(3.5)式に入れると

$$O = \frac{A_0}{r_j} - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{a_i - r_j} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha_i l}}{a_i + r_j} \sum_{k=1}^n a_{ki} A_k e^{\alpha_k l}$$

となるから

$$O = \frac{A_0}{r_j} - \sum_{i=1}^n A_i \left[\frac{1}{a_i - r_j} + \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik} e^{(\alpha_k + \alpha_i)l}}{a_k + r_j} \right] \dots\dots\dots (3.13)$$

となり、 l を與へれば、 A_i は計算し得る。 A が求まれば(3.12)式によつて B が求められ、總てのものは定まる。

3.3 A 及 B の近似解

(3.12)式で見える様に l がかなり長いと B は A に比して小さい値であるから (3.5)式の第3項は前2項に比して小さい。よつて前稿(14)式の様に

$$A_i = A_{\infty} + \delta A_i \dots\dots\dots (3.14)$$

とおけば δA_i は小さい値である。これを(3.5)式に入れると

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta A_i}{a_i - r_j} = \sum \frac{B_i e^{\alpha_i l}}{a_i + r_j} \dots\dots\dots (3.15)$$

となる。さて B は A に比して小さいから (3.12) 式に於て A_j に A_{∞} をおいたものは B の一次近似値である。その値を B_{∞} とすれば

$$B_i = B_{i\infty} + \delta B_i \dots\dots\dots (3.16)$$

で,

$$\delta B_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \delta A_j e^{\alpha_j l} \dots\dots\dots (3.17)$$

となる. この δB は ε が大きい l がかなり長ければ極めて小さい値である.

(3.15)式の B に $B_{i\infty}$ をおいて δA を求めることが出来るが, この式は前稿(15)式と同様であるから前稿(18)式と同じ様に

$$\delta A_i = \sum_{j=1}^n B_j e^{\alpha_j l} \frac{A_j}{A} \dots\dots\dots (3.18)$$

として求められ, B が $B_{i\infty}$ とおける場合にはこの式によつて δA が求められ, A_j が求められる.

3. 4 A 及 B の一次近似値と Φ_0 の値

前節に示した通り ε が大きい l がかなり長ければ δA 及 δB は極めて小さく, $A_{i\infty}$ 及 $B_{i\infty}$ が A 及 B の一次近似値である.

これを(3.7)式に入れると

$$\Phi_0 = 1 - (1 - \varepsilon_0) \sum_{i=1}^n \left[a_i A_{i\infty} e^{\alpha_i l} - b_i B_{i\infty} \right]$$

となるから, (3.12)式を入れて

$$\Phi_0 = 1 - (1 - \varepsilon_0) \sum_{i=1}^n \left[a_i - \sum_{j=1}^n b_j a_{ij} \right] A_{j\infty} e^{\alpha_j l} \dots\dots\dots (3.19)$$

となる. この関係は l が相當に長い場合の底の發散率が長さによつてどう 變るかを見る場合には便利である.

3. 5 $\varepsilon_0 = 1$ の場合

この場合には $\Phi_0 = 1$ であるから, (3.6)式は

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{A_i e^{\alpha_i l}}{a_i + r_j} - \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{a_i - r_j} \dots\dots\dots (3.20)$$

である. これを(3.5)式に加へると $(A_i + B_i)$ について(3.9)式と同じ形となるから, (3.9)式の解即ち底のない場合の A_i を A_{i0} とすれば

$$A_{i0} = A_i + B_i \dots\dots\dots (3.21)$$

(3.5)式から(3.20)式を減ずると, $(A_i - B_i)$ について(3.9)式の $e^{\alpha_i l}$ の符號を更へたものとなるから, その解は A_{i0} から容易に得られる. これを A'_{i0} とすれば

$$A'_{i0} = A_i - B_i \dots\dots\dots (3.22)$$

(3.21)式とから

$$A_i = \frac{1}{2}(A_{i0} + A'_{i0}), \quad B_i = \frac{1}{2}(A_{i0} - A'_{i0}) \dots\dots\dots (3.23)$$

3.6 $\varepsilon=\varepsilon_0=0$ の場合

この場合には $\phi_0=0$ であるから

$$A_i=B_i$$

であり, (3.5)式と(3.6)式とは同一の式となつて

$$0 = \frac{1+2A_1}{r_j} - \sum_{i=2}^n A_i \left[\frac{1}{a_i-r_j} - \frac{e^{a_i l}}{a_i+r_j} \right] \dots\dots\dots (3.24)$$

となり, (3.7)式は

$$0 = 1+2A_1 - \sum_{i=2}^n A_i [a_i e^{a_i l} - b_i] \dots\dots\dots (3.25)$$

(3.24)式及(3.25)式は何れも獨立した未知數 n 個の1次聯立方程式($n+1$)個であるから, 各未知數は零でなければならない。即ち

$$1+2A_1=0$$

$$A_i (i=2, \dots\dots n) = 0$$

従つて

$$\left. \begin{array}{l} B_1=A_1=-0.5 \\ B_i=A_i=0 (i \neq 1) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3.26)$$

である。

3.7 黒體輻射からのちがひ

黒體輻射の發散率は1であるから, 底の發散率が黒體輻射からのちがひを

$$\delta_0 = 1 - \phi_0 \dots\dots\dots (3.27)$$

とすれば, (3.7)式によつて

$$\delta_0 = (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^n [a_i A_i e^{a_i l} - b_i B_i] \dots\dots\dots (3.28)$$

によつて與へられ, 又(3.4)節の場合には(3.19)式によつて與へられる。

又 x に於ける發散率の黒體輻射からのちがひを $\delta(x)$ とすれば

$$\delta(x) = 1 - \phi(x) \dots\dots\dots (3.29)$$

で, (3.1)式によつて

$$\delta(x) = - \sum_{i=1}^n [A_i e^{a_i x} + B_i e^{a_i (l-x)}] \dots\dots\dots (3.30)$$

で與へられる。

従つて $x=0$ に於ては

$$\delta(0) = - \sum_{i=1}^n [A_i + B_i e^{a_i l}] \dots\dots\dots (3.31)$$

であつて, もし A_i が A_{∞} であらはされるときは前論文(22)式によつて

$$\delta(0) = (1 - \sqrt{\varepsilon}) - \sum_{i=1}^n B_i e^{\alpha_i l} \dots\dots\dots (3.32)$$

を得る。

又 $x=l$ に於ては

$$\delta(l) = - \sum_{i=1}^n [A_i e^{\alpha_i l} + B_i] \dots\dots\dots (3.33)$$

となる。

4. 1項 近 似 解

4.1 1項近似の一般解

1項近似解は簡単である。前論文に示した様に $C=1$, $r=-1$, $\alpha=-\sqrt{\varepsilon}$ であるから, (3.5), (3.6)及(3.7)式は夫々

$$O = 1 + \frac{A}{1 - \sqrt{\varepsilon}} + \frac{B e^{-\sqrt{\varepsilon} l}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}$$

$$O = 1 + \frac{A e^{-\sqrt{\varepsilon} l}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} + \frac{B}{1 - \sqrt{\varepsilon}} - \Phi_0$$

$$\Phi_0 = 1 + (1 - \varepsilon_0) \left[\frac{A e^{-\sqrt{\varepsilon} l}}{1 - \sqrt{\varepsilon}} + \frac{B}{1 - \sqrt{\varepsilon}} \right]$$

となる。これを解いて

$$A = - \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{Q} \dots\dots\dots (4.1)$$

$$B = \frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{Q} \cdot D e^{-\sqrt{\varepsilon} l} \dots\dots\dots (4.2)$$

但し

$$Q = 1 - D e^{-2\sqrt{\varepsilon} l} \dots\dots\dots (4.3)$$

$$D = \frac{(1 - \sqrt{\varepsilon})^2 - (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon_0)}{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2 - (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon_0)} = - \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon_0(1 + \sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon_0(1 - \sqrt{\varepsilon})} \quad (4.4)$$

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{Q} e^{-\sqrt{\varepsilon} x} + \frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{Q} \cdot D e^{-\sqrt{\varepsilon}(2l-x)} \dots\dots\dots (4.5)$$

$$\Phi_0 = 1 - \frac{(1 - \varepsilon_0)(1 - D)}{Q} e^{-\sqrt{\varepsilon} l} \dots\dots\dots (4.6)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 1 - \Phi_0 = \frac{(1 - \varepsilon_0)(1 - D)}{Q} e^{-\sqrt{\varepsilon} l} \\ &= \frac{4\sqrt{\varepsilon}(1 - \varepsilon_0)e^{-\sqrt{\varepsilon} l}}{(1 + \sqrt{\varepsilon})[2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon_0(1 - \sqrt{\varepsilon})]Q} \dots\dots\dots (4.7) \end{aligned}$$

$$\delta(l) = 1 - \Phi(l) = (1 - \sqrt{\varepsilon}) - \frac{1 - \frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{\varepsilon}} D}{Q} e^{-\sqrt{\varepsilon} l}$$

$$= \frac{2\sqrt{\epsilon}(1-\sqrt{\epsilon})(2-\epsilon_0 e^{-\sqrt{\epsilon}l})}{[2\sqrt{\epsilon} + \epsilon_0(1-\sqrt{\epsilon})]Q} \dots\dots\dots (4.8)$$

$$\frac{\delta_0}{\delta(l)} = \frac{2}{2-\epsilon_0} \cdot \frac{1-\epsilon_0}{1-\epsilon} \dots\dots\dots (4.9)$$

ϵ_0 の種々の値に對する種々の値の變化は次稿にまとめてある。

4.2 同質の底のある場合の解

底が壁と同質の場合即ち $\epsilon_0=0$ の場合には

$$D = -\left(\frac{1-\sqrt{\epsilon}}{1+\sqrt{\epsilon}}\right)^2 \frac{2+\sqrt{\epsilon}}{2-\sqrt{\epsilon}} \dots\dots\dots (4.10)$$

$$\delta_0 = \frac{4}{2-\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{1-\sqrt{\epsilon}}{1+\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\epsilon}l}}{Q} \dots\dots\dots (4.11)$$

$$\delta(l) = 2 \cdot \frac{1-\sqrt{\epsilon}}{1+\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{2-\epsilon}{2-\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\epsilon}l}}{Q} \dots\dots\dots (4.12)$$

$$\delta_0/\delta(l) = 2/(2-\epsilon) \dots\dots\dots (4.13)$$

この場合 A, B が ϵ 及 l によつてかはる有様は第1,2表及第1圖に示す通りで、 δ_0 は第3表及第2圖のようになる。尚3項近似の解と比較するために $l=4$ の場合を示せば第3圖點線のようになる。

第1圖 ϵ 及 l による A 及 B の値

第2圖 ϵ 及 l による δ_0 の値

第 1 表 $-A$ の 値

l	$\sqrt{\varepsilon}$						
	1	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0
0	0	0.09928	0.1944	0.3584	0.4704	0.5184	0.5
1	—	09988	1988	3865	5339	5865	—
2	—	09998	1998	3958	5684	6431	—
3	—	10000	2000	3987	5854	6878	—
4	—	—	—	3996	5933	7209	—
5	—	—	—	3999	5970	7452	—
6	—	—	—	4000	5986	7624	—
7	—	—	—	—	5994	7744	—
8	—	—	—	—	5997	7827	—
9	—	—	—	—	5999	7883	—
10	—	—	—	—	6000	7921	—
∞	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0

—印は上のものと等しい意味である。

第 2 表 $-B$ の 値

l	$\sqrt{\varepsilon}$						
	1	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0
0	0	0.0138	0.0504	0.1664	0.3024	0.4224	0.5
1	—	0056	0232	0985	2301	3912	—
2	—	0023	0105	0554	1642	3512	—
3	—	00093	0047	0306	1133	3076	—
4	—	00038	0021	0168	0770	2639	—
5	—	00015	00095	0093	0519	2234	—
6	—	00006	00043	0051	0349	1871	—
7	—	00003	00019	0028	0234	1556	—
8	—	000010	00009	0015	0157	1288	—
9	—	000004	00004	00084	0105	1062	—
10	—	000002	00002	00046	0071	0874	—
∞	0	0	0	0	0	0	0

第 3 表 δ_0 の 値

l	$\sqrt{\varepsilon}$						
	1	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0
0	1	0.19	0.36	0.64	0.84	0.96	1
1	—	078	165	379	639	889	—
2	—	032	075	213	456	798	—
3	—	013	034	118	315	699	—
4	—	0052	015	065	214	600	—
5	—	0021	0068	036	144	508	—
6	—	00086	0031	020	097	425	—
7	—	00035	0014	011	065	354	—
8	—	00014	00062	0059	044	293	—
9	—	00006	00028	0032	029	241	—
10	—	00002	00012	0018	020	199	—

4.3 1項近似の解に於ける必要な黒體の長さ

底のある場合には

$$\delta_0 = \frac{4}{2-\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{1-\sqrt{\epsilon}}{1+\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\epsilon}l}}{Q} \dots\dots\dots (4.11)$$

であるから、 δ_0 が小さいときには

$$l = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \log \frac{4(1-\sqrt{\epsilon})}{\delta_0(1+\sqrt{\epsilon})(2-\sqrt{\epsilon})} \cdot \dots\dots\dots (4.12)$$

種々の ϵ の値に對する δ_0 を與へる長さ l は第4圖點線の様になる。

底のない長さ $2l$ の有限圓筒で中央の點の δ_{2l} は

$$\delta_{2l} = \frac{2(1-\sqrt{\epsilon})e^{-\sqrt{\epsilon}l}}{1 + \frac{1-\sqrt{\epsilon}}{1+\sqrt{\epsilon}}e^{-2\sqrt{\epsilon}l}} \dots\dots\dots (4.13)$$

底のない半無限圓筒の l に於ける δ_∞ は

$$\delta_\infty = (1-\sqrt{\epsilon})e^{-\sqrt{\epsilon}l} \dots\dots\dots (4.14)$$

よつて次の關係がある。

$$\delta_\infty < \delta_0 < \delta_{2l} < 2\delta_\infty \dots\dots\dots (4.15)$$

5. 同質の底の場合の3項近似の解

5.1 一般に必要な數値

3項近似の場合の核の係數は前論文⁽¹⁾に示した様に

$$\left. \begin{array}{lll} C_1 = 0.1104 & C_2 = 1.7123 & C_3 = -0.8227 \\ \gamma_1 = -0.5363 & \gamma_2 = -1.495 & \gamma_3 = -2.343 \\ -\frac{C_1}{\gamma_1} = -0.2058 & -\frac{C_2}{\gamma_2} = 1.1454 & -\frac{C_3}{\gamma_3} = -0.3512 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

尙 a は次の方程式の根の平方根である。

$$Z^3 - Z^2(7.3185 + 0.69183\epsilon) + Z(4.1058 + 10.3798\epsilon) - 3.5270\epsilon = 0 \dots (5.2)$$

$\epsilon=1, 0.75, 0.50, 0.25, 0.10, 0$ の場合の a の値は前論文⁽¹⁾ 4.3節に示してある。又 a 及 b を求めると次表の様になる。

ϵ	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
0.75	- 12.23	- 5.066	- 2.757	0.6414	0.4267	0.2877
0.50	- 4.799	- 2.277	- 1.085	0.6567	0.4644	0.2829
0.25	- 2.367	- 1.228	- 0.5405	0.6965	0.5068	0.2784
0.10	- 1.566	- 0.8024	- 0.3749	0.7651	0.5318	0.2765
0.01	- 1.124	- 0.5706	- 0.2829	0.9049	0.5453	0.2752

底が壁と同質の場合の a_{ij} の値は次の通りである。

ϵ	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
0.75	0.0948	0.0401	0.0215	0.2866	0.2391	0.1438	-0.0556	-0.0025	0.0048
0.50	0.2396	0.0988	0.0416	0.4015	0.1300	0.0323	-0.0434	-0.0096	0.0022
0.25	0.4773	0.1958	0.0683	0.2430	0.0623	-0.0026	-0.0243	0.0008	0.0100
0.10	0.7000	0.2205	0.0778	0.0973	-0.0132	-0.0230	-0.0094	0.0095	0.0137
0.01	0.9146	0.0190	-0.0537	0.0974	-0.0600	-0.0495	-0.00084	0.0131	0.0142

5.2 $\epsilon=0.75$ の場合 $\epsilon=0.75$ では

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= 0.0948 A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.0401 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.0215 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ B_2 &= 0.2866 A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.2391 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.1438 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ B_3 &= -0.0556 A_1 e^{\alpha_1 l} - 0.0025 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.0048 A_3 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5. 3)$$

 A に A_∞ をおけば

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -0.00349 e^{\alpha_1 l} - 0.00489 e^{\alpha_2 l} + 0.00054 e^{\alpha_3 l} \\ B_2 &= -0.01055 e^{\alpha_1 l} - 0.02917 e^{\alpha_2 l} + 0.00358 e^{\alpha_3 l} \\ B_3 &= 0.00205 e^{\alpha_1 l} + 0.00031 e^{\alpha_2 l} + 0.00012 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5. 4)$$

 $l=4$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -0.00047 \\ B_2 &= -0.00150 \\ B_3 &= +0.00026 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5. 5)$$

となる。

さて δA を B であらはすと

$$\left. \begin{aligned} \delta A_1 &= -0.0194 B_1 e^{\alpha_1 l} - 0.0114 B_2 e^{\alpha_2 l} - 0.0072 B_3 e^{\alpha_3 l} \\ \delta A_2 &= -0.0916 B_1 e^{\alpha_1 l} - 0.0662 B_2 e^{\alpha_2 l} - 0.0470 B_3 e^{\alpha_3 l} \\ \delta A_3 &= +0.0216 B_1 e^{\alpha_1 l} + 0.0176 B_2 e^{\alpha_2 l} + 0.0138 B_3 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5. 6)$$

であるから、(5.5) 式の値を入れると

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= +0.000001 \\ \delta A_2 &= +0.000006 \\ \delta A_3 &= -0.000001 \end{aligned}$$

となり、 $l=4$ の場合既に $A=A_\infty$ とおける。 δ_0 の値は

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -1.145 A_1 e^{\alpha_1 l} - 1.267 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.6893 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ &\quad - 0.1604 B_1 - 0.1067 B_2 - 0.0719 B_3 \dots\dots\dots (5. 7) \end{aligned}$$

であるから、(5.3) 式を入れて

$$\delta_0 = 0.1140 e^{\alpha_1 l} + 0.1584 e^{\alpha_2 l} - 0.0177 e^{\alpha_3 l} \dots\dots\dots (5. 8)$$

となり, $l=4$ の場合 $\delta_0=0.015$ となる.

$\delta(l)$ は (3.33) 式によつて

$$\delta(l) = -A_1 e^{\alpha_1 l} - A_2 e^{\alpha_2 l} - A_3 e^{\alpha_3 l} - B_1 - B_2 - B_3 \dots \dots \dots (5.9)$$

であるから, (5.3) 式を用ひ

$$\delta(l) = -1.326 A_1 e^{\alpha_1 l} - 1.277 A_2 e^{\alpha_2 l} - 1.170 A_3 e^{\alpha_3 l} \dots \dots \dots (5.10)$$

A_∞ を入れて

$$\delta(l) = 0.0488 e^{\alpha_1 l} + 0.1558 e^{\alpha_2 l} - 0.0291 e^{\alpha_3 l} \dots \dots \dots (5.11)$$

となり, $l=4$ の場合 $\delta(l)=0.007$ となる.

5.3 $\epsilon=0.5$ の場合

$\epsilon=0.5$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= +0.2396 A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.0988 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.0416 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ B_2 &= +0.4015 A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.1300 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.0324 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ B_3 &= -0.0434 A_1 e^{\alpha_1 l} - 0.00963 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.00219 A_3 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.12)$$

であつて, A に A_∞ とおけば

$$\left. \begin{aligned} B_{1\infty} &= -0.02827 e^{\alpha_1 l} - 0.02023 e^{\alpha_2 l} + 0.00124 e^{\alpha_3 l} \\ B_{2\infty} &= -0.04738 e^{\alpha_1 l} - 0.02661 e^{\alpha_2 l} + 0.00096 e^{\alpha_3 l} \\ B_{3\infty} &= +0.00512 e^{\alpha_1 l} + 0.00197 e^{\alpha_2 l} + 0.00006 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.13)$$

となり, $l=4$ の場合にもこの式が成立するものとすれば

$$\begin{aligned} B_1 &= -0.00434 \\ B_2 &= -0.00719 \\ B_3 &= +0.000766 \end{aligned}$$

となる.

さて δA を B であらはすと

$$\left. \begin{aligned} \delta A_1 &= -0.0668 B_1 e^{\alpha_1 l} - 0.0436 B_2 e^{\alpha_2 l} - 0.0247 B_3 e^{\alpha_3 l} \\ \delta A_2 &= -0.1611 B_1 e^{\alpha_1 l} - 0.1241 B_2 e^{\alpha_2 l} - 0.0811 B_3 e^{\alpha_3 l} \\ \delta A_3 &= +0.0282 B_1 e^{\alpha_1 l} + 0.0250 B_2 e^{\alpha_2 l} + 0.0192 B_3 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.14)$$

であるから, 上記の B の1次近似値を入れると

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= +0.000046 \\ \delta A_2 &= +0.00011 \\ \delta A_3 &= -0.00002 \end{aligned}$$

となり, 従つて

$$\begin{aligned} A_1 &= -0.11798 + 0.00005 = -0.1179 \\ A_2 &= -0.2047 + 0.0001 = -0.2046 \\ A_3 &= +0.0298 - 0.0000 = +0.0298 \end{aligned}$$

で、この δA は B の値には殆んど影響しないから、 B の値は B_∞ で充分である。

δ_0 の値は

$$\begin{aligned} \delta_0 = & -2.400 A_1 e^{\alpha_{1l}} - 1.139 A_2 e^{\alpha_{2l}} - 0.5425 A_3 e^{\alpha_{3l}} \\ & - 0.3284 B_1 - 0.2322 B_2 - 0.1415 B_3 \dots \dots \dots (5.15) \end{aligned}$$

よつて

$$\delta_0 = -2.566 A_1 e^{\alpha_{1l}} - 1.200 A_2 e^{\alpha_{2l}} - 0.5640 A_3 e^{\alpha_{3l}} \dots \dots \dots (5.16)$$

であるから、 $l=4$ に於ては $\delta_0=0.047$ である。

$l=7$ (δ_0 がはゞ 1% に近い、第 6 章参照) に於ては A は A_∞ とおき得るから、 A は A_∞ 、 B は B_∞ とおき得て

$$\delta_0 = +0.3028 e^{\alpha_{1l}} + 0.2457 e^{\alpha_{2l}} - 0.0173 e^{\alpha_{3l}} \dots \dots \dots (5.17)$$

$\delta(l)$ は (5.9) 式に (5.3) 式を入れて

$$\delta(l) = -1.598 A_1 e^{\alpha_{1l}} - 1.219 A_2 e^{\alpha_{2l}} - 1.076 A_3 e^{\alpha_{3l}} \dots \dots \dots (5.18)$$

であるから、 $l \geq 7$ のとき A に A_∞ を入れて

$$\delta(l) = 0.1886 e^{\alpha_{1l}} + 0.2495 e^{\alpha_{2l}} - 0.0321 e^{\alpha_{3l}} \dots \dots \dots (5.19)$$

$l=4$ のとき $\delta(l)=0.030$ である。

5.4 $\epsilon=0.25$ の場合

$\epsilon=0.25$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= +0.4773 A_1 e^{\alpha_{1l}} + 0.1958 A_2 e^{\alpha_{2l}} + 0.0683 A_3 e^{\alpha_{3l}} \\ B_2 &= +0.2430 A_1 e^{\alpha_{1l}} + 0.0623 A_2 e^{\alpha_{2l}} - 0.0260 A_3 e^{\alpha_{3l}} \\ B_3 &= -0.0243 A_1 e^{\alpha_{1l}} + 0.0008 A_2 e^{\alpha_{2l}} + 0.0100 A_3 e^{\alpha_{3l}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.20)$$

となる。

A に A_∞ をおけば

$$\left. \begin{aligned} B_{1\infty} &= -0.1548 e^{\alpha_{1l}} - 0.03910 e^{\alpha_{2l}} + 0.00165 e^{\alpha_{3l}} \\ B_{2\infty} &= -0.07882 e^{\alpha_{1l}} - 0.01245 e^{\alpha_{2l}} - 0.00006 e^{\alpha_{3l}} \\ B_{3\infty} &= +0.00788 e^{\alpha_{1l}} - 0.00016 e^{\alpha_{2l}} + 0.00024 e^{\alpha_{3l}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.21)$$

となり、 $l=4$ の場合にもこの式が成立するものとすれば

$$\begin{aligned} B_1 &= -0.03232 \\ B_2 &= -0.01627 \\ B_3 &= +0.00160 \end{aligned}$$

を得る。

さて δA を B であらはすと

$$\left. \begin{aligned} \delta A_1 &= -0.2077 B_1 e^{\alpha_{1l}} - 0.1439 B_2 e^{\alpha_{2l}} - 0.0752 B_3 e^{\alpha_{3l}} \\ \delta A_2 &= -0.1786 B_1 e^{\alpha_{1l}} - 0.1468 B_2 e^{\alpha_{2l}} - 0.0909 B_3 e^{\alpha_{3l}} \\ \delta A_3 &= +0.0267 B_1 e^{\alpha_{1l}} + 0.0260 B_2 e^{\alpha_{2l}} + 0.0206 B_3 e^{\alpha_{3l}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.22)$$

であるから、上の B の 1 次近似値を入れると $l=4$ の場合

$$\delta A_1 = +0.00136$$

$$\delta A_2 = +0.00117$$

$$\delta A_3 = -0.00018$$

となる。従つて

$$A_1 = -0.3244 + 0.0014 = -0.3230$$

$$A_2 = -0.1997 + 0.0012 = -0.1985$$

$$A_3 = +0.02414 - 0.00018 = +0.02396$$

B の値にこの δA が影響する。それを入れると

$$\delta B_1 = 0.4773 \delta A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.1958 \delta A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.0683 \delta A_3 e^{\alpha_3 l}$$

等になつて

$$\delta B_1 = +0.000137$$

$$\delta B_2 = +0.000069$$

$$\delta B_3 = -0.000007$$

であるから

$$B_1 = -0.03218$$

$$B_2 = -0.01620$$

$$B_3 = +0.00159$$

δB は A には影響しない。

$l=10$ ($\delta_0 \approx 1\%$) に於てはもはや $e^{\alpha_1 l} = 0.01846$, $e^{\alpha_2 l} = 0.000097$, $e^{\alpha_3 l} = 9.10^{-11}$ で B の第1項のみで充分で

$$B_1 = -0.00276$$

$$B_2 = -0.00147$$

$$B_3 = +0.00015$$

となり, δA は

$$\delta A_1 = +0.00001$$

$$\delta A_2 = +0.00001$$

$$\delta A_3 = -0.000001$$

で, A は A_∞ とおける。

l がより長ければ B はもはや第1項のみで充分になる。

次に δ_0 は

$$\begin{aligned} \delta_0 = & -1.775 A_1 e^{\alpha_1 l} - 0.9209 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.4054 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ & - 0.5224 B_1 - 0.3801 B_2 - 0.2088 B_3 \dots \dots \dots (5.23) \end{aligned}$$

で與へられるから, (5.20) 式を入れて

$$\delta_0 = -2.112 A_1 e^{\alpha_1 l} - 1.047 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.4422 A_3 e^{\alpha_3 l} \dots \dots \dots (5.24)$$

で, $l=4$ の場合 $\delta_0=0.144$ となり, A に A_∞ をおき得る場合

$$\delta_0 = 0.6851 e^{\alpha_1 l} + 0.2091 e^{\alpha_2 l} - 0.01066 e^{\alpha_3 l} \dots\dots\dots (5.25)$$

$\delta(l)$ は (5.9) 式に (5.20) 式を入れて

$$\delta(l) = -1.696 A_1 e^{\alpha_1 l} - 1.259 A_2 e^{\alpha_2 l} - 1.052 A_3 e^{\alpha_3 l} \dots\dots\dots (5.26)$$

となる。 $l=4$ のとき $\delta(l)=0.117$ であり、 A に A_∞ をおき得る場合には

$$\delta(l) = 0.5502 e^{\alpha_1 l} + 0.2514 e^{\alpha_2 l} - 0.0254 e^{\alpha_3 l} \dots\dots\dots (5.27)$$

5.5 $\varepsilon=0.1$ の場合

この場合には

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= +0.7000 A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.2205 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.00778 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ B_2 &= +0.0973 A_1 e^{\alpha_1 l} - 0.0132 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.02804 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ B_3 &= -0.00940 A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.00947 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.01368 A_3 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.29)$$

A に A_∞ をおけば

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -0.4078 e^{\alpha_1 l} - 0.02573 e^{\alpha_2 l} + 0.00120 e^{\alpha_3 l} \\ B_2 &= -0.0567 e^{\alpha_1 l} + 0.00154 e^{\alpha_2 l} - 0.00043 e^{\alpha_3 l} \\ B_3 &= +0.00548 e^{\alpha_1 l} - 0.00110 e^{\alpha_2 l} + 0.00021 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.30)$$

となり、 $l=4$ の場合に之が成り立つものとすれば

$$\begin{aligned} B_1 &= -0.1353 \\ B_2 &= -0.0186 \\ B_3 &= +0.00177 \end{aligned}$$

となる。 δA を B であらはすと

$$\left. \begin{aligned} \delta A_1 &= -0.4277 B_1 e^{\alpha_1 l} - 0.2863 B_2 e^{\alpha_2 l} - 0.1441 B_3 e^{\alpha_3 l} \\ \delta A_2 &= -0.1285 B_1 e^{\alpha_1 l} - 0.1147 B_2 e^{\alpha_2 l} - 0.07250 B_3 e^{\alpha_3 l} \\ \delta A_3 &= +0.02040 B_1 e^{\alpha_1 l} + 0.02286 B_2 e^{\alpha_2 l} + 0.01954 B_3 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.31)$$

であるから、上の B を入れると $l=4$ の場合

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= +0.0193 \\ \delta A_2 &= +0.0058 \\ \delta A_3 &= -0.0009 \end{aligned}$$

となる。即ち

$$\begin{aligned} A_1 &= -0.5825 + 0.0193 = -0.5632 \\ A_2 &= -0.1167 + 0.0058 = -0.1109 \\ A_3 &= +0.0154 - 0.0009 = +0.0145 \end{aligned}$$

となり A_1 の他は直接に求めたものと等し。

δB は

$$\delta B_1 = 0.700 \delta A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.220 \delta A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.008 \delta A_3 e^{\alpha_3 l}$$

等で、

$$\delta B_1 = 0.00445$$

$$\delta B_2 = 0.00061$$

$$\delta B_3 = -0.00008$$

となる。 δB_1 の他は δA に影響しない程度である。

δB_1 を入れて $\delta' A_1 = -0.0006$, $\delta' A_2 = -0.0002$ を得るから、

$$A_1 = -0.5638$$

$$A_2 = -0.1111$$

$$\delta' B_1 = -0.00014$$

$$\delta' B_2 = -0.00002$$

従つて

$$B_1 = -0.1310$$

$$B_2 = -0.0180$$

$$B_3 = +0.0017$$

となる。 A_1 及 A_2 は直接に求めたものと 0.0001 の差がある。かやうにして逐次近似で求めることは甚しく不便で、 $l=4$ の場合には直接に A 及 B を求める方が便利である。

$l=17$ ($\delta_0 \div 1\%$) に於ては、 $e^{\alpha_1 l} = 0.00894$, $e^{\alpha_2 l} = 7.10 \cdot 10^{-2}$, $e^{\alpha_3 l} = 10^{-18}$ であるから、 B を求めるには第1項のみで充分である。しかも B_1, B_2, B_3 は順には $\times 1$ 位づつ下つてゐるから δA は $e^{\alpha_1 l}$ の程度の値で $\delta A_1 = +0.00001$, $\delta A_2 = +0.000005$, $\delta A_3 = -0.000001$ で A は A_∞ とおける。

δ_0 は次の式で與へられる。

$$\begin{aligned} \delta_0 = & -1.4095 A_1 e^{\alpha_1 l} - 0.7222 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.3374 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ & - 0.6886 B_1 - 0.4786 B_2 - 0.2488 B_3 \dots \dots \dots (5.32) \end{aligned}$$

で、(5.29) 式を入れて

$$\delta_0 = -1.936 A_1 e^{\alpha_1 l} - 0.8700 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.3327 A_3 e^{\alpha_3 l} \dots \dots \dots (5.33)$$

となる。 A を A_∞ とおき得る場合には

$$\delta_0 = 1.128 e^{\alpha_1 l} + 0.1015 e^{\alpha_2 l} - 0.0051 e^{\alpha_3 l} \dots \dots \dots (5.34)$$

$l=4$ の場合には $\delta_0 = 0.363$ である。

$\delta(l)$ は (5.29) 式によつて

$$\delta(l) = -1.788 A_1 e^{\alpha_1 l} - 1.217 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.993 A_3 e^{\alpha_3 l} \dots \dots \dots (5.35)$$

で、 $l=4$ の場合には $\delta(l) = 0.337$ で、 A が A_∞ におき得るとき

$$\delta(l) = 1.042 e^{\alpha_1 l} + 0.142 e^{\alpha_2 l} - 0.0153 e^{\alpha_3 l} \dots \dots \dots (5.36)$$

である。

5.6 $\epsilon=0.01$ の場合

この場合には

$$\alpha_1 = -0.09222$$

$$\alpha_2 = -0.78691$$

$$\alpha_3 = -2.5880$$

であつて

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= +0.9146 A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.0190 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.0537 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ B_2 &= +0.00974 A_1 e^{\alpha_1 l} - 0.0600 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.0495 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ B_3 &= -0.000844 A_1 e^{\alpha_1 l} + 0.01308 A_2 e^{\alpha_2 l} + 0.0142 A_3 e^{\alpha_3 l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.37)$$

である。この場合に $l=4$ の場合を求めるには δA を求めずに直接に A を求むる方が便利で

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -0.6527 \\ A_2 &= -0.01521 \\ A_3 &= +0.00239 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.38)$$

を得る。これを上式に入れて

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -0.4128 \\ B_2 &= -0.0044 \\ B_3 &= +0.00038 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.39)$$

を得る。したがつて

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -1.1126 A_1 e^{\alpha_1 l} - 0.5649 A_2 e^{\alpha_2 l} - 0.2801 A_3 e^{\alpha_3 l} \\ &\quad - 0.8958 B_1 - 0.5398 B_2 - 0.2724 B_3 \dots\dots\dots (5.40) \end{aligned}$$

の値は

$$\delta_0 = 0.875$$

となり、

$$\delta(4) = 0.869$$

を得る。

5.7 $l=4$ の場合の数値

以上 $l=4$ の場合を示せば次の通りである。

ε	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	δ_0	$\delta(4)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0.75	-0.0368	-0.1220	+0.0249	-0.0005	-0.0015	+0.0003	0.015	0.007
0.50	-0.1179	-0.2046	+0.0298	-0.0043	-0.0072	+0.0008	0.047	0.030
0.25	-0.3230	-0.1985	+0.0240	-0.0322	-0.0132	+0.0016	0.143	0.117
0.10	-0.5639	-0.1110	+0.0145	-0.1310	-0.0180	+0.0017	0.363	0.337
0.01	-0.6527	-0.0152	+0.0024	-0.4128	-0.0044	+0.0004	0.875	0.869
0	-0.5	0	0	-0.5	0	0	1	1

ϵ が 0.75, 0.5, 0.25, 0.1 の場合の發散率分布 (圖では $\delta(x)$ を示す) を示せば第3圖實線の様になる。

第 3 圖

6. 3項近似解による必要な黒體の長さ

3項近似解では必要な黒體の長さを求めることは1項近似解のその様に簡単ではないが、 δ_0 が相當に小さいと割合に簡単になる。

(3.12)式に於て $e^{\alpha_2 l}$ の大さを見るとこの項は省略し得る程度であるから

$$B_i = a_{1i} A_1 e^{\alpha_1 l} + a_{2i} A_2 e^{\alpha_2 l} \dots \dots \dots (6. 1)$$

であらはされ、 A_1 及 A_2 は夫々 $A_{1\infty}$ 及 $A_{2\infty}$ であらはされる。その結果は前章で示した様に

$$\delta_0 = a_1' A_{1\infty} e^{\alpha_1 l} + a_2' A_{2\infty} e^{\alpha_2 l} \dots \dots \dots (6. 2)$$

とおける。しかも第2項は第1項に比してあまり大きくないから

$$\delta_0 = a_1' A_{1\infty} e^{\alpha_1 l} \left(1 + \frac{a_2' A_{2\infty}}{a_1' A_{1\infty}} e^{(\alpha_2 - \alpha_1) l} \right) \dots \dots \dots (6. 3)$$

となり、

$$l = -\frac{1}{\alpha_1} \log \frac{a_1' A_{1\infty}}{\delta_0} - \frac{a_2' A_{2\infty}}{a_1' A_{1\infty}} e^{(\alpha_2 - \alpha_1) l} \dots \dots \dots (6. 4)$$

即ち l の第 1 近似値はこの第 1 項である。この第 1 近似値を第 2 項に入れて l の第 2 近似値を求め、尙第 2 項の値に影響すれば第 3 近似値を逐次代入で求められる。又 ε が小さいと δ_0 が小さいとき第 2 項が省略せられ簡単になる。

この方法によつて黒體からのひらき δ_0 の値を與へてそれに必要な最短の黒體の長さを決定することが出来る。

數例を示せば次の様である。

$\varepsilon=0.75$ の場合には

$$\delta_0 = 0.1140 e^{-0.518l} (1 + 1.39 e^{-0.775l}) \dots\dots\dots (6. 5)$$

であるから

$$l = 1.931 \log_e \frac{0.1140}{\delta_0} + 2.68 e^{-0.755l} \dots\dots\dots (6. 6)$$

$\delta_0=0.01$ とすれば、第 1 項は 4.698 となり、これを l の第 1 近似値として第 2 項に入れると第 2 項は 0.077 となるから l の第 2 近似値は 4.775 となる。それによる第 2 項の減少値は 0.004 であるから、第 3 近似値は 4.770 で、これによる第 2 項は 0.073 であるから、求むる近似値は 4.770 である。

$\delta_0=0.005$ とすれば、第 1 項は 6.036 となり、これを第 1 近似値として第 2 項を求めると 0.028 となるから l の第 2 近似値は 6.064 で、これによる第 2 項の減少値は 0.0006 である。即ち第 3 近似値は 6.063 である。

$\delta_0=0.0025$ とすれば、第 1 項は 7.375 で、これによる第 2 項は 0.010 となるから、 l の第 1 近似値は 7.386 で、これによる第 2 項の減少値は 0.0001 以下であるから、 $l=7.386$

$\varepsilon=0.5$ の場合には

$$\delta_0 = 0.3028 e^{-0.483l} (1 + 0.811 e^{-0.620l}) \dots\dots\dots (6. 7)$$

であるから

$$l = 2.070 \log_e \frac{0.3028}{\delta_0} + 1.68 e^{-0.620l} \dots\dots\dots (6. 8)$$

$\varepsilon=0.25$ の場合には

$$\delta_0 = 0.6851 e^{-0.399l} (1 + 0.3050 e^{-0.525l}) \dots\dots\dots (6. 9)$$

であるから

$$l = 2.506 \log_e \frac{0.6851}{\delta_0} + 0.764 e^{-0.525l} \dots\dots\dots (6. 10)$$

$\delta_0=0.01$ のとき第 1 項は 10.58 で、これによる第 2 項は 0.003 となるから、第 2 項は省略し得る。

$\varepsilon=0.10$ の場合には

$$\delta_0 = 1.128 e^{-0.278l} (1 + 0.090 e^{-0.555l}) \dots \dots \dots (6.11)$$

であるから

$$l = 3.604 \log \frac{1.128}{\delta_0} + 0.324 e^{-0.555l} \dots \dots \dots (6.12)$$

となり、 $\delta_0 = 0.01$ のとき第1項は 17.03 であるから、第2項は省略し得る。

かやうにして求めたものは第4圖實線の様になる。

1項近似解の場合の値が安全な方向への近似値でないことはこれで明かであらう。

7. 異質の底のある場合の3項近似解

この場合には (3.11) 式に立もどつて (3.12) 式を求めて第5章と同様の方法によつて計算せられる。その一般式に就ては茲には省略しておき、次稿に譲る。

む す び

以上述べて來た所によつて底のある場

合の有限圓筒黒體の發散率分布を求め、また實驗的黒體の寸法の決定をすることが出来る。この後者に對しては1項近似解は安全な方向への解ではなく、面倒でも3項近似解に寄らなければならない。

筆を擱くに當つて煩しい數計算を倦ます遂行し援助された山中修三君及び常に何彼と蔭ながら援助された同室の人々に心から感謝する。(昭和9年VI月)

第 4 圖