拋物線面反射鏡の方眼寫眞について^{(1)*}

大 内 孝 一

(本 庄 製 作 所)

内 容 梗 概

拋物線面鏡の曲面精度の試験に用ひられる方眼寫眞の方法について、その理論的根據を探究したものである。視點に於ける觀察機械の入射瞳が無限に小であるとの假定の下に、方眼紙の任意の格子線の、反射面上の映像線は反射面と、1つの3次の曲面との交りとして決定し得る事を示し、この事から次の結論が導かれる。

- (1) 方眼寫眞に現れる寫像の線は數學的に嚴密な意味では決して直線にはならない
- (2) しかし視點距離 λ (鏡の頂點から觀察點迄の距離) を焦點距離 f に對して適當に選定すれば寫像の線はその一部分が極めてよく直線に近似して來る。従つて鏡の口徑がある範圍を超えない場合には方眼の寫像は大體に於てやはり方眼であると考へても實際上大差はない様に思はれる
- (3) 寫像の線の一部が最もよく直線に近似する爲の λ の値の範圍は

$$4f < \lambda < 5f$$

であり、この時寫像の線に曲つた部分の現はれない爲には鏡の口徑は少く共 $2.5f$ よりも小でなければならない

本文には實際の鏡について計算から求めた數種の寫像曲線を示してある。尙附帶した他の問題をも論じてある。

〔1〕 はしがき——豫備の考察 (1)

拋物線面鏡の精度を試験する方法として所謂方眼寫眞の方法が相當廣く行はれて居る事は事實であるがその理論的根據については筆者も疑問を抱く一人であつた。

方眼寫眞の方法と云ふのは⁽²⁾方眼格子を書いた平面衝立或は類似のものを、試験しやうとする鏡の軸に垂直に置き鏡に映つた方眼格子の像を、衝立の面と鏡の軸との交りの處に設けた小孔から肉眼で見、或は寫眞撮影を行ひ、映像の形狀、歪み等から鏡面の精度を所斷する方法であるが、一般に拋物線面鏡については——少く共筆者の知る範圍では——衝立上の方眼が正しくあれば鏡の上に見える映像もまた正しい方眼でなければならないと考へられて居る様である。果してその様な關係が理論的に成立するか如何か、それを確かめるのが吾々の當面の問題である。

⁽¹⁾同じ問題を黒澤氏は別な方法で論じて居られる。(聯合大會講演)

⁽²⁾根本定義に類する事柄故敢て蛇足の危險を冒した。

* "A Theory of Images on Parabolic Mirror" By K. Ōuti.

先づこゝに鏡 Σ (必ずしも拋物線面鏡である事を必要としない.)、物點 P 及び視點 S が夫々空間的に定まつた位置にあるとする。 P から出た光の内のあるものが Σ の上の一點 P' で反射した後視點 S に置かれた觀察機械の瞳孔に入るとすれば、實際の物理現象では瞳孔の大きが有限である爲 P' に充分に近い Σ 上の他の點の反射光もまた觀察機械の瞳孔に入る。そうしてこれら反射光の反射點の集合は Σ 面上に 1 つの小面積 σ を形成する。 σ からの反射光が全部 1 つの點 P_0 に收斂すればそれは勿論完全な結像の行はれる場合であつて P の尖銳な像が P_0 にあらはれる。併し一般の反射面については完全な結像の行はれない事は「レンズ」の收差論の教へる所であつて觀察機械によつて觀察される P 點の像はある歪みを持つ事になる。之に加へて觀察機械自身の「レンズ」系による結像の誤差も勿論嚴密な意味では存在する)で、吾々の問題である所の方眼格子の映像について云へば、その格子線の映像は一般にはある幅 (勿論場所によつて異ふ大さの) を持つた濃度の一様でない帶狀のものに見えるであらう事は想像するに難くないのである。今觀察機械の瞳孔を出来る丈小さく絞つて見る。さうするとそれに従つて Σ 面上の小面積 σ も縮小して來るから結像の誤差も小さくなる。結局瞳孔が 1 つの點に收縮したと考へた極限に於ては格子線の映像はある 1 つの線に收斂する事が想像される。觀察機械の瞳孔が無限に小さくなれば入射光線の量もまた無限に小さくなるから、それは勿論物理的には到達し得ない境地ではあるが、實際の觀測に差支への無い程度にそれに近づく事は可能であらう。この様な根據の下に以下の所論に於ては視點 S 及物點 P を幾何學的の點として取扱つて行く事にする。

〔2〕 豫 備 の 考 察 (2)

物點 P 及び視點 S が幾何學的の點に收縮したと考へた場合でも尙 P 點の像點の極根の位置を數學的に決定する事には色々な困難が伴つて來る。併し吾々の問題ではこの事に觸れずに進む事が出来る。即ち結像點を問題にする代りに結像點 P_0 と視點 S とを結ぶ直線が反射面 Σ と交る點 P' を問題とするのである。觀察機械の瞳孔が有限の場合には瞳孔に入る反射光線と Σ との交りは前にも述べた様に Σ 上に 1 つの小面積 σ を區劃するが觀察機械の瞳孔が 1 つの點 P' に收縮すれば σ もまた 1 つの點 P' に一意的に (uniquely) 收縮する。この様な點 P' を吾々は視點 S に關する物點 P の映像點と呼ぶことにする。

反射面 Σ 、視點 S 及物點 P が與へられた時 P の S に關する Σ 上の映像點を求める事は P から出た光の内 Σ 面で反射した後 S を通過する様なものゝ入射點を求める事に外ならない。それは面 Σ の方程式及び S と P との空間座標から導かれる方程式によつて與へられ、一般には有限個の解が存在する。そうして若しも、物點 P が假りに方眼紙の格子線上を動いたとすればそれに應ずる映像點もまた反射面 Σ の上を動いて Σ 上に 1 つの空間曲線を書く。この様な空間曲線を (格子線の) 映像線と呼ぶ事にする。 S から見た時 P の像が見える方向は (若しもそれが見えるとするならば) S と P の映像點 P' とを結ぶ直線の方と一致する事は明かである。

〔3〕基本式の導入

第1圖に示す平面圖形について、

Σ は1つの拋物線、(焦點距離 f) S は軸上にある視點、 P は S と同じ横座標を持つ物點として S に關する P の映像點を Σ 上に求める。

P' に於ける拋物線の法線が直線 SP と交る點を N とすれば
簡単な計算から N の座標は

$$\left[\lambda, y - \frac{y}{2f}(\lambda - x) \right]$$

である事が求められる。また

$$\frac{PS}{P'Q} = \frac{SN}{PN}$$

であるから之に各點の座標を代入して

$$\frac{\sqrt{(x-\lambda)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}} = \frac{y - \frac{y}{2f}(\lambda - x)}{\mu - \left\{ y - \frac{y}{2f}(\lambda - x) \right\}}$$

之を簡單にして整理すると、

$$(xy + \lambda y - \mu x) \left(\frac{\lambda - x}{f} - 2 \right) + \mu(\lambda + x) = 0. \dots\dots\dots (1)$$

を得る。(1)と拋物線の式

$$y^2 = 4fx. \dots\dots\dots (2)$$

とから定めた x, y は映像點 P' の座標である。(1)と(2)から x を消去すると y を定める式として

$$y^5 - \mu y^4 + 8f^2 y^3 - 4\mu f(3f - \lambda)y^2 + 16f^2 \lambda(2f - \lambda)y - 16\mu \lambda f^3 = 0. \dots\dots\dots (3)$$

を得る。之は y に關する5次の方程式であるから一般に P の映像點は5個存在する事が解る⁽³⁾。併しこの式は複雑であつて問題の今後の發展にあづかるのはむしろ(1)式である。

此處で吾々の考察の範圍を空間に擴げる。既に述べた通りの方眼試験の機構について、使用する拋物線面鏡の反射面の方程式を

$$Y^2 + Z^2 = 4fX \dots\dots\dots (4)$$

とし、視點 S を鏡の頂點から λ の距離にある點 $[\lambda, 0, 0]$ に置きこの點を通過して、 $Y-Z$ 面に平行に方眼紙衝立を置いた場合について考へる。すべての機構は X -軸に關して對照であるから方眼紙の互に直角に交る2つの格子線の群を座標軸に對してどの様な方向に置かう共問題の一般性を害ふ事はないので便宜上格子線の1群は Z -軸に平行であるものとし、その内から、視點 S からの距離が μ_0 である様な1つの格子線 l を取つて考察の對照とする。 S から l に

⁽³⁾その内の2個は常に虚である。

第 1 圖

下した垂線の趾を Q , l の上の任意の一點を P , SP と SQ との間の角を δ とすれば勿論

$$SP = \frac{SQ}{\cos \delta} = \frac{\mu_0}{\cos \delta}$$

である。

反射面(4)上の, S' に關する P 點の映像點を P' とすれば, P' に於ける反射面の法線は S , P と共に同一の平面上になければならない。しかるに(4)の法線はすべて X -軸と交るから, P' 點は, 軸と P 點とで定められる平面の上にある。今この平面で全機構を切斷した平面圖形を考へるとこれは本質に於ては全く第1圖に示されたものと同一の圖形であつて, P' 點の空間座標 $[X, Y, Z]$ と第1圖に於て, x, y などと稱して居た量との間に次の關係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} y \cos \delta &= Y \\ y \sin \delta &= Z \\ x &= X. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

及 $\mu = \frac{\mu_0}{\cos \delta}$

(5)式からは

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{Y^2 + Z^2} \\ \cos \delta &= \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + Z^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

なる關係が出て來るがこれら(5), (6)兩式を(1)式に代入すると

$$\sqrt{Y^2 + Z^2} \left[\left(X + \lambda - \mu_0 \frac{X}{Y} \right) \left(\frac{\lambda - X}{Y} - 2 \right) + \mu_0 \frac{\lambda + X}{Y} \right] = 0.$$

を得る。 $\sqrt{Y^2 + Z^2}$ といふ項は上に導入した三角函數の比例常數として入つて來るもので

$$\sqrt{Y^2 + Z^2} = 0$$

の單一解 $[X=0, Y=0]$ は一種の混入解 (st ay solution) であるから之を除外し, 殘餘の部分を整頓すると

$$X^2 Y = \mu_0 X^2 - 2fXY + (\lambda - 2f)\lambda Y - (\lambda - 3f)\mu_0 X + f\mu_0 \lambda \dots\dots\dots (7)$$

或は更に之を Y について整理したもの

$$Y = \mu_0 \frac{X^2 - (\lambda - 3f)X + f\lambda}{X^2 + 2fX - \lambda(\lambda - 2f)} \dots\dots\dots (8)$$

が得られる。之は任意の格子線 l に特有な量 μ_0 , 及 λ と l 上の點の映像點 P' の座標 X, Y, Z との間に成立しなければならない關係を示すものであるから, (7)或は(8)式と拋物線面の方程式

$$Y^2 + Z^2 = 4fX \dots\dots\dots (4)$$

とで定められる空間曲線は格子線 l の各點の映像點の集合, 即ち格子線 l の映像線をあらはす筈である。

(7)及(8)式は Z を含まない。従つてこれは、(8)式を $X-Y$ 面上の1つの3次曲線をあらはすものと考へたとき、この平面3次曲線を(底)とし、その(母線)がすべて Z -軸に平行である所の1つの塙面をあらはす。

以下吾々は(8)式によつてあらはされる平面曲線を標定3次曲線 (Characteristic cubic), 同じ式によつてあらはされる塙面を標定塙面 (Characteristic Cylindrical Surface) と呼ぶ事にし、この標定3次曲線の基本的な性質を少ししらべて見る事にする。

[4] 標定3次曲線

數學的に嚴密な意味で標定3次曲線の追跡を行ふ事は相當煩雜であり紙面を多く要するから此處ではその結果を記すに止める。

[1°] 漸近線

(8) 式で $Y \rightarrow \infty$ とすれば

$$X^2 + 2fX - \lambda(\lambda - 2f) = 0$$

従て、 $X = \lambda - 2f$, 又は $X = -\lambda$ となり、

曲線は、 Y -軸に平行な2つの直線

$$X = \lambda - 2f, \quad X = -\lambda \dots\dots\dots (9)$$

を漸近線として有する。

また(8)式で $X \rightarrow \infty$ とすれば

$$Y = \mu_0 \dots\dots\dots (10)$$

となり。之は X -軸に平行な漸近線をあらはす。

[2°] Y -軸との交點。

(8) 式で $X=0$ とおけば曲線と Y -軸との交點として

$$X=0, \quad Y = -\frac{f\mu_0}{\lambda - 2f} \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。

[3°] X -軸との交點

(8) 式で $Y=0$ とおけば曲線と X -軸との交點を與へる式として、2次方程式

$$X^2 - (\lambda - 3f)X + f\lambda = 0 \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。その2つの根を α, β とすれば

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left\{ (\lambda - 3f) + \sqrt{\lambda^2 - 10f\lambda + 9f^2} \right\} \\ \beta &= \frac{1}{2} \left\{ (\lambda - 3f) - \sqrt{\lambda^2 - 10f\lambda + 9f^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

であるが、こゝに注意すべき事は α, β が μ_0 に無關係な事である。之は後に説明する様に映像線の1つの重要な幾何學的性質を暗示するものであつて、こゝで吾々は α, β を標定3次曲

線の極 (pole) と名づけて置く。

(13)式から容易に次の事が解る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda > 9f \text{ 又は } \lambda < f \text{ ならば} \\ a, \beta \text{ は實} \\ 9f > \lambda > f \text{ ならば } a, \beta \text{ は虚,} \\ \lambda = 9f \text{ ならば } a = \beta = 3f \\ \lambda = f \text{ ならば } a = \beta = -f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

[4°] Yの極値

(8) 式から Xに關する Yの微分係數を求め

$$\frac{dY}{dX} = \mu_0 \frac{(\lambda - f) \{X^2 - 2\lambda X + \lambda(\lambda - 4f)\}}{\{X^2 + 2fX - \lambda(\lambda - 2f)\}^2} \dots\dots\dots(15)$$

を得る。之を零に等しいとおけば2次方程式

$$X^2 - 2\lambda X + \lambda(\lambda - 4f) = 0$$

が得られ、その2根

$$\left. \begin{aligned} X_{m1} &= \lambda - 2\sqrt{f\lambda} \\ X_{m2} &= \lambda + 2\sqrt{f\lambda} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

は Yの極値に應ずる横座標をあらはし、 $X = X_{m1}$ の時の Yの値が極大であり $X = X_{m2}$ の時の Yの値が極小である。

[5°] (8) 式で $Y = \mu_0$ とおけば

$$X = \lambda$$

を得る。従て曲線は $X = \lambda$ に應ずる、有限の範圍にある點で漸近線 (10) と交る。

[6°] 一般の3次曲線は少く共1個の實の彎曲點 (point of inflexion) を有するから吾々の標定3次曲線もまた少く共1個彎曲點を有する筈である。その現れるのは

$$X > X_{m2}$$

である様なある點に於てゝある事は容易に見られるが、彎曲點を數式的に定める事は差し當つて必要がないのでその事を指摘するに止めておく。

以上の考察及 Yの値の正負に關する吟味 (之は煩雜であるから省略する) から追跡して得た代表的標定3次曲線が第2圖に示される。

第 2 圖

〔5〕 映像の實驗的觀察

以上で大體標定3次曲線の形狀を知る事が出來た。このものを使つて方眼格子の映像を論ずるに先立ち、實際の鏡について觀察して得られる2, 3の事實を實驗的現象として述べて置く事が記述の上にも、またそれを理解する上にも便利である様に思はれる。

普通方眼試験に供されるのは焦點に於ける抱擁角(鏡の口径が焦點に於て張る角の2分の1)が 45° を超えない所謂淺い鏡であつて、此處に述べ様とするのも主としてその様な淺い鏡について行つた觀察から得られる結果である。

既に述べた様な方眼試験の機構に於て視點距離 λ を色々に變へて(云ふ迄もなくあらゆる場合に、視點 S は方眼紙の平面上におく)觀察を行ふと次の事實が觀取される。

〔1°〕 $\lambda = 4f$ の附近に、方眼格子の映像がほぼ完全な方眼格子に見える場所がある。〔第3圖〕もつともある種の鏡では λ をどの様に選定しても、映像線の大部分は方眼格子として認められるが鏡の邊周のところでは映像線が急激に歪曲して見える場合が屢々ある。この様な映像線の歪曲部分は俗にダレと呼ばれ、鏡の研磨の際邊周の所で突然被研磨物質が缺如する爲に生ずる磨きの不均一に起因すると考へられて居る様である。果してそれが正しいか否かをも後で解決し度いと思ふ。〔第4圖〕

〔2°〕 〔1°〕の場合に比して λ の値を大きくして行くと、映像線は第5圖に示す様に鏡の中心部に對して(凹)となり像は小さくなる。

第3圖

第4圖

第5圖

第6圖

第7圖

〔3°〕 〔1°〕の場合に比して λ の値を小さくして行くと、映像線は鏡の中心部に對して(凸)となる(第6圖)。

〔4°〕 なほも λ の値を小さくすれば遂には第7圖に示す様な(閉曲線)狀の映像線があらはれる。この様な閉曲線が如何云ふ風にして成生されたかを見る爲に方眼紙の適宜の格子線を豫め着色して置き、 λ を徐々に小さくし乍ら觀察を行つて見ると、着色された映像線は次第に凸の程度を増し、ある所で可なり急激に兩端がつながつて仕舞ふ。こうして出來た閉曲線を見ると全體が着色されて居るからそれは方眼紙の單一の格子線によつて生ずる映像線である事が解る。次には閉曲線を生ずる方眼紙の格子線上に例へば $\otimes$ と云ふ様な「マーク」を一つ書いて置く。そして、生じた閉曲線を見ると、閉曲線の上には第7圖に示す様に、2つの「マーク」が見られるのである。そして、この2つの「マーク」は映像面の中心部から引いた1つの直線上にあることも觀察される。

これらの事から推論すると、方眼紙の格子線の1部分と、閉曲線状映像線との間には1對2の對應が成立する。換言すれば映像線が閉曲線状を呈する場合には格子線上の1點は鏡面の2ヶ所に映像點を生ずるのである。

最後に、上記の様にして生成された1つの閉曲線を注視し乍ら尙も λ の値を小さくして見ると閉曲線は次第に縮小し、最後には1つの點に收斂した後全く眼界から消え去せる。そうして視點距離をある値から鏡面に極めて近い値まで變化させる間に、同じ様な閉曲線が幾個となく現はれては消え、消えては現はれるのが見られるのである。

〔6〕 方眼格子映像の理論 (1)

本節の主要目的は主として、前節に述べられた現象に對する質的説明を、標定3次曲線を使って與へる事にある。

再び第2圖に示した標定3次曲線について考察する。

視點 S から μ_0 の距離にある格子線 l の映像線は反射面

$$Y^2 + Z^2 = 4fX \quad \dots\dots\dots (4)$$

と標定塙面

$$Y = \mu_0 \frac{X^2 - (\lambda - 3f)X + f\lambda}{X^2 + 2fX - \lambda(\lambda - 2f)} \quad (8)$$

との交りである所の空間曲線である事は既に示した所であるが、第2圖から見られる様に標定3次曲線は一般に3つの(枝)(I), (II), (III)から成立つて居る。枝(III)は、 $\lambda > 0$ である限り、即ち吾々の所論の範囲内では常に $X < 0$ である様な領域にあるから、拋物線 Σ と實點で交る様な事はない。

枝(I)もまた浅い鏡の場合は映像成立の範囲外にあつて、吾々の問題とするのは當分の間(II)と云ふ枝だけである。(第8圖)今任意の格子線 l (μ_0)の映像線が規點 S から見たときどの様な形状に見えるかを簡単に考へて見ると浅い鏡の場合には映像の發生に

第 8 圖

關與するのは標定塙面(II)(μ_0)が、鏡の深さ d によつて限られる比較的に微少な部分(a, b)であつて、若しも假りにこの部分を直線と見做し得れば⁽³⁾次の事が云はれる〔第9圖〕。

〔1°〕(a, b)の延長線よりも上方に S が存在すれば、 S から見た映像線は凸⁽⁴⁾に見える。

⁽⁴⁾純然たる「たとへ」である。 ⁽⁵⁾映像面の中心に向つて、以下全部之にならふ。

第 9 圖

〔第9圖(2)〕

〔2°〕 (ab) の延長線が S を通過すれば S から見た映像線は (1つの平面上にあるから) 直線として見える。〔第9圖(1)〕

〔3°〕 (ab) の延長よりも下方に S が存在すれば映像線は凹に見える。〔第9圖(3)〕

之等の事實から考へて見ると、前節で示した——浅い鏡については、 λ の値を適當に選ぶことによつて大約方眼格子に近い映像が得られる——と云ふ事實は、鏡の深さ d がある範囲内にある場合には、第8圖の (ab) と云ふ様な部分が實際に非常に直線に近い形状を有する上、 λ の値を適當に選べばその延長は μ_0 に無關係に少く共近似的に S 點を通過すると云ふ關係が實際に成り立つであらうと云ふ想像を唆るのである。

映像線の凹凸についても勿論同じ様な想像がなされる。これらの事柄が實際にどの程度の近

第 10 圖

似を持つて成立するかを量的に知れば方眼映像がどの程度に正しい方眼に近似して居るかが解る筈で、それは次章以下に於て論及される筈である。

次には閉曲線狀映像線の現象に對する説明であるが

第8圖について；視點距離 λ を減小して行くと

$$X = \lambda - 2f.$$

と云ふ漸近線は鏡面に向つて移動する。而して

$$\lambda = 2f.$$

のときそれは Y -軸と一致するから、それまでの間に、枝(II) (μ_0) が鏡面と2つの點で交る様な範圍が必ず存在する。之が λ を次第に小さくして行くと閉曲線狀の映像線が現れる理由である〔第10圖(1), (2)〕。 λ の減小と共に(II) (μ_0) は次第に左方に追ひやられ、あるところでは Σ と(II) (μ_0) とが接觸する。これが閉曲線狀映像線が一點に收縮した時であり。それ以上 λ を小にすれば(II) (μ_0) は Σ と全く交らなくなるから閉曲線は視界から消え去せる事になる〔第10圖(3)〕。

尙(8)式から見られる様に、標定3次曲線の Y -座標は同じ X の値に對しては μ_0 に比例する。従て方眼紙の平行な格子線の一群に對しては同じ横座標に對して只その縦座標が μ_0 に比例して異なる様な一群の標定曲線が對應し、 λ を次第に小さくして行くと、一群の曲線系が漸次左方に追ひやられる結果閉曲線狀映像線が次々と現れては消えるのである。〔未完〕