論 文

拋物線面反鏡の方眼寫眞について *

〔第 二 稿〕

大 内 孝 一 (本庄製作所)

〔7〕 方眼格子映像の理論 (2)

(映像線が直線に見える爲の條件についての考察)

拋物線面反射鏡の方眼試験に於て、方眼格子線の映像が嚴格に直線に見える爲には、反射面上の映像線と視點 S とは同一平面上になければならない。換言すれば、映像線は反射面 Σ を S を通る平面で切斷して生ずる二次曲線でなければならない事が明かである。之は必要であると同時に充分な條件である。

しかるに既に示した通り視點 S から μ_0 の距離にあつて Z -軸に平行な格子線 $l(\mu_0)$ の映像線は反射面 Σ

$$Y^2 + Z^2 = 4fX \dots\dots\dots (4)$$

と標定嚢面

$$Y = \mu_0 \frac{X^2 - (\lambda - 3f)X + f\lambda}{X^2 + 2fX - \lambda(\lambda - 2f)} \dots\dots\dots (8)$$

との交りであるから、もしも理論的に、映像線が直線に見えるものとすれば (8) 式で示される標定三次曲線は S を通る直線でなければならない。

(8) 式で示される曲線が直線に分解 (degenerate) するのは次の二つの場合である。

[1°] (8) 式の右邊の、 X に關する二つの二次式の商が常數である場合：—

その爲には二つの二次式の係数が比例しなければならないから

$$-\frac{(\lambda - 3f)}{25} = \frac{f\lambda}{-\lambda(\lambda - 2f)} = 1 \dots\dots\dots (17)$$

と云ふ條件が満足されなければならない。この條件を簡単にすると

$$\lambda = f \dots\dots\dots (17')$$

ととなり、逆に $\lambda = f$ ならば標定三次曲線は、

$$Y = \mu_0$$

といふ、 X -軸に平行な直線に degenerate する事が容易に見られる。これば視點距離 λ を f に等しくした場合の映像線は、格子線を含んで、 $X-Z$ 平面に平行な平面で切つた反射面の切口であると云ふ事を意味し、廻轉拋物線面の性質から直觀的に出て來る事柄である。

この場合には併し、映像線を含む平面は一般に視點 S を通過しない事も明かである。この場合に視點 S から映像線を見ると云ふ事は、軸に平行な平面で切つた廻轉拋物線體の切口 (云ふ迄もなくそれは拋物線である) をその截面外の截から見る事になるから、觀察される映像線の

* A Theory of Images on the Parabolic Mirror. By K. Ôuti

形状はやはり固有な (proper) 二次曲線のそれである。

[2°] (8) 式の右邊が X に関する一次式に等しくなる場合:—

(8) 式の右邊の分子を, 何等かの條件に於て無限大となる様な一つの量 K_∞ で割り極限に於て

$$\mu_0 \frac{X^2/K_\infty - (\lambda - 3f) X/K_\infty + f\lambda/K_\infty}{X^2/K_\infty + 2fX/K_\infty - \lambda(\lambda - 2f)/K_\infty}$$

が X の一次式となる爲には,

$$\frac{\lambda - 3f}{K_\infty} \rightarrow \text{有限の量}$$

でなければならないから, この事から直ちに

$$K_\infty = \lambda$$

でなければならない事が解る。この條件に従つて $\lambda \rightarrow \infty$ であるとして (8) 式を degenerate させると

$$Y = \mu_0 \frac{-X + f}{(\lambda - 2f)} \rightarrow 0$$

即ち視點を無限遠の點に置くとき, 標定三次曲線は $Y=0$ 即ち X — 軸に degenerate する。

以上の二つの場合以外には (8) 式の標定三次曲線が直線に degenerate する場合は存在しない。従つて

方眼格子線の映像が厳密に直線として見えると云ふ事は $\mu_0=0$ の場合を除いてはあり得ない。

即ち, 拋物線面鏡の方眼試験に於て, 正しい方眼の映像が正しい方眼に見えなければならぬと云ふ考へは誤りである事が斷定されるのである。

しかも實際の方眼試験に於て觀察される映像は多くの場合, それが理論的にもそうあるべきではあるまいかと思はせる程度の正しい方眼の形状を呈する事は [5] 節に於て述べた通りである。それは何故であるか, またこの事實は極く深い鏡についても成立するであらうか。筆者はその深さが焦點距離の 4~5 倍程度に達する深い鏡について方眼映像を觀察した結果その様な鏡では, λ をどの様に選定しても, 近似的にも正しい方眼映像を見る事の出来ない事を確かめた。

方眼格子の映像が理論的に正しい方眼の形状を定し得ないとすれば, 實際に於てそれが正しい方眼らしく觀察されるのは, 映像線のある部分の形状が直線に近似してゐる爲であると斷ずるのは當然がある。第 6 節でも述べた様に, 視點 S から見て, 格子線 $l(\mu_0)$ の映像線が直線に近似して見える爲の條件は

- (a) 標定三次曲線の第二枝 II (μ_0) の映像發生に關與する部分が直線に近似する, }(18)
 (b) 標定曲線の直線部分の延長が (少く其近似的に) S を通過する.

ことの二つであつて, 任意の格子線 $l(\mu_0)$ についてこの條件が成立すれば (8) 式から見られる様に, 標定曲線の縦座標は μ_0 と云ふ係數に比例する丈であるから。同じ條件は他の格子線についても成立する筈であり。従つて條件 (18) が任意の格子線について成立するならば, 方眼格子の映像として近似的な方眼格子が觀察される。

こゝで條件(18)を解析するに先立ち極く普通に行はれて居る方眼試験に於て、この條件がどの程度に満足されて居るかを見やう。

「圖表 1」 標定曲線 $f=15\text{cm}$ $\mu_0=10\text{cm}$

(圖表 I)⁽⁵⁾ は所謂三十糎反射鏡について(8)式を使つて計算した、種々の λ に對する標定曲線を示すものである。こゝには便宜上曲線の第二枝 II (μ_0) のみを示してあるが第一枝は X-軸上遙か右方に互る領域に、第三枝は遙か左方の領域に存在する。(後にも遭遇する事であるが拋物線面鏡について得られるこの種の曲線については、その變化の「スケール」は極めて雄大であつて、例へばある特殊の點を「グラフ」上に現はさうとすると、數米も先の方へ紙面を擴張するとか、對數目盛りを使用するとかしなければならぬ様な事が屢々起つて来る)。

(圖表 I) に示した標定曲線はすべて

$$\mu_0 = 10\text{cm}$$

として計算してある。 μ_0 の異つた値に對しては、同じ X-座標について、Y-座標を μ_0 に比例して變へる事によつて、容易に所要の標定曲線を書く事が出来る。

(圖表 I) から觀察されるのは、 $\lambda=4.6f$ $\lambda=5f$ 等の曲線が極めてよく條件(18)を満足させて居る事である、これ等の曲線の映像發生に關與する部分は何れも殆ど正しい直線に近い形狀を有し、且つその延長は丁度視點 S の邊を狙つて居る様に見える。

λ の値がずつと小さい所では曲線の映像發生部分は次第に曲率を増して来る上に、その何れの微少部分の延長も視點 S を狙はないばかりか $X < 0$ である様な點で X-軸と交はる様になる。

(5) 便宜上三十糎鏡について計算したが f を長さの單位に取ればあらゆる拋物線面に共通する曲線が得られる。圖表中鎖線で示された曲線の一つは $\mu_0 = \text{常數}$ とし、 λ を變化させた時の標定曲線の極值點の軌跡をあらはす。原點を $\left[-f, \frac{\mu_0}{2}\right]$ におけばその方程式は $xy^2 = \mu_0^2 f$ である。

λ の値が増加すれば一般に映像發生部分の曲率は減少してよりよい直線への近似を示すがその延長は視點 S よりもずつと原點に近い所で X -軸に交はる様になる。即ち λ を大きくすると云ふ事は條件 (18) — (1°) の成立へのよりよい近似を得る所以ではあるが、ある程度以上に λ を大きくする事は條件 (18) — (2°) の成立に背反する結果を招ぐ。従つて、その中間に、映像線が最もよく直線らしく見える様な λ のある値があるであらうと云ふ事が當然考へられる。この様な λ の値を鏡の方眼距離と名づける事にする。

次には、 λ をたとへどの様に適當に選んでも鏡の深さが無制限に大きかつたならば、觀察される格子線の映像は決して直線らしく見えないであらうと云ふ事も容易にこの圖表から結論される。 λ を適當に選んだ時、鏡面上の、格子線の映像が直線らしく見える部分を鏡の直線領域と名づける事にする。直線領域は鏡の深さ、或はその口徑で表す事が出来る。

以下吾々は上に定義した鏡の方眼距離と、直線領域とを數式的に決定しやうと云ふのであるが、勿論之等の値は、通常取り扱はれる極大極小値などの様に整然とした理論的根據の下に取り扱ひ得るものではなく、上記の理論を元として、之にある程度の近似を加味して得られるものである事は云ふ迄もない。

[4] 節で既に求めた様に標定三次曲線

$$Y = \mu_0 \frac{X^2 - (\lambda - 3f)X + f\lambda}{X + 2fX - \lambda(\lambda - 2f)} \dots\dots\dots (8)$$

の微分係數及び、極値條件は夫々

$$\frac{dY}{dX} = \mu_0 \frac{(\lambda - f)\{X^2 - 2X + \lambda(\lambda - 4f)\}}{\{X^2 + 2fX - \lambda(\lambda - 2f)\}^2} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{m1} &= \lambda - 2\sqrt{f\lambda} \\ X_{m2} &= \lambda + 2\sqrt{f\lambda} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

であるが今假りに

$$\lambda = 4f$$

として見ると

$$X_{m1} = 4f - 2\sqrt{\lambda \times 4f} = 0$$

第 11 圖

第 12 圖

であるから、 $\lambda=4f$ ならば、標定 3 次曲線の第二枝と Y —軸との交りが縦座標の極値をあらはす点である事が解る。従つて曲線の映像發生部分 ab を直線であるとすれば、直線 ab はこの場合 X —軸に平行である。即ち條件 (18) — (2°) が満足される爲には極値点 M をもつと右方に移動させる、換言すれば

$$\lambda > 4f$$

である様にする事が必要である事が解る [第11圖]。第12圖に示す様に $\lambda > 4f$ である場合を考へ視點距離を λ_0 、標定曲線が Y —軸と交る点を $(0, -Y_0)$ とすれば、直線であると假定した映像發生部分 ab が視點 S を通過する爲には

$$\frac{Y_0}{\lambda_0} = \left[\frac{dY}{dX} \right]_{X=0} \dots\dots\dots (19)$$

でなければならない。(8) (15) 兩式から

$$\left[\frac{dY}{dX} \right]_{X=0} = \mu_0 \frac{(\lambda_0 - f)(\lambda_0 - 4f)}{(\lambda_0 - 2f)^2}$$

$$Y_0 = \mu_0 \frac{f}{\lambda_0 - 2f}$$

を得るから、之を (19) 式に代入し

$$f = \frac{(\lambda_0 - f)(\lambda_0 - 4f)}{\lambda_0 - 2f}$$

之から

$$\frac{\lambda_0}{f} = 3 + \sqrt{3} = 4.74$$

$$\text{或は} \quad \lambda_0 = 4.74f^{(6)} \dots\dots\dots (20)$$

を得る、之が求むる所の方眼距離である。

次には直線領域の決定であるが、之には當然方眼距離の決定以上の曖昧さが混入して来る、筆者は率直に拋物線面鏡の直線領域として、標定曲線の

$$X = 0$$

から

$$X = X_{ml}$$

に至る部分によつて生ずる映像が直線領域にあると定める事を提議しやうと思ふ。

そうすると、(16) 式から

(6)之は勿論本文にも斷つてある様に一意的な値ではない。映像發生部分 ab が實際に有する微小な曲率を考慮に入れ、或は他の方法を用ひなどして、恐らく色々な大同小異の値が得られる事であらうと思ふ。筆者の意圖する所は、此處では方眼距離として、「まあこの邊の所であらう」と云ふ値を一つ推奨するにある。筆者はこの値が相當よく實際の場合に當て符する事を確めた。また、この方面の實際家某氏から直接聞いた所によると拋物線面鏡の方眼試験に當つて、同氏は方眼距離として大體 $4.8f$ 位の所を取つて居られると云ふ事であつた。

$$X_{m1} = \lambda - 2\sqrt{f\lambda}$$

であるから、その時の方眼距離を $\lambda = kf$ とすれば

$$X_{m1} = f(k - 2\sqrt{k})$$

従つて直線領域を含む鏡の口径を D_0 とすれば

$$(D_0/2)^2 = 4fX_{m1} = 4f^2(k - 2\sqrt{k})$$

$$\text{或は } D_0 = 4f\sqrt{k - 2\sqrt{k}} \dots\dots\dots(21)$$

この式に前に求めた方眼距離の値を採用すれば

$$D_0 = 2.48f \doteq 2.5f \dots\dots\dots(21')$$

を得る。

$$X = X_{m1}$$

と云ふ點では、標定曲線の切線は X —軸に平行であつて決して視點 S を通過しない事は明かであるから、事實上、上に定めた D_0 の範囲内では、邊周のところでは、映像線が相當彎曲して見える様に思はれる。しかし之以上 D_0 の値を大きく取れば寫像の線は問題なく益々彎曲して来る。この意味で (21') 式は直線領域の一種の限界を規約的に與へた事になる。試みに現在流通して居る數種の探照灯用反射鏡について、 D_0 の値を計算して見ると次表の様な結果が得られる。

鏡 名 稱 [同時に口径をあらはす]	焦 點 距 離 f (cm)	直 線 領 域 D_0 (cm)
30 cm (又は34cm)	15.0	38.0
40 cm (又は45cm)	21.0	52.5
60 cm (又は64cm)	25.4	63.5
75 cm	31.0	77.5
90 cm	42.0	105.0
110 cm	48.0	120.0
150 cm	65.0	162.5

これによつて、殆ど全部の鏡が多少の餘裕を持つて、上に定めた直線領域中に包含されて居る事が見られる、只64厘鏡丈がわずかにこの領域を超過してゐる事が認められるが、その爲に寫像の線が急激に歪曲をあらはすと云ふ様な事のあり得ないのは [圖表 1] の曲線の形狀から推斷しても明かであるが他の鏡に比較して、その寫像の線の、直線への近似が多少共劣つて居る事丈は確かである。

(未完)