拋物線面反射鏡の映像について*

〔第 四 稿〕

大 内 孝 一 (本庄製作所)

〔11〕方眼試験についての結論と雑論

$\lambda = 5f$ の場合の方眼寫像が如何に正しい方眼に近似して居るかは前節の最後の表が示す通りである。計算の結果この際のウネリ圓の半径は11.726cm、鏡の邊周の寫像圓の半径は15.78cmであつて、ウネリ圓と交る寫像曲線は理論上ウネリを有する筈であるが、それは計算では出て來るけれども、グラフ等には殆どあらはす事が出來ない程度の微小なものである。鏡の邊周部に於ける寫像曲線の Deviation も亦非常に小さい。従つてこの様な寫像を正しい方眼であるとして取扱ふ事もある程度迄は許さるべきであらう。

さて實際の方眼試験で得られる寫像について——その寫像曲線が局部的の歪形を有するならば、それによつて鏡面に局部的の歪みの存在する事を指摘するのは勿論正しい。しかしその様な局部的歪形の問題を離れては一般に、より正しい方眼寫眞を提供する鏡がより精確な鏡であると單純に考へられて居る場合が少くない様である。甲の手によつて撮られた甲の製作になる鏡の方眼寫眞と、乙の手によつて撮られた乙の製作になる鏡の方眼寫眞とが、假にこの様な考への下に視點距離を無視して比較されるものとすれば、其處には鏡以外のものゝ比較が混入されて來るのではあるまいか。この意味で方眼試験に對しては、豫め視點距離を一定するか、少く共撮影者側で採用した視點距離を明記するのでなければならぬと筆者は思ふのである。

與へられた視點距離に對して、鏡面の全部に格子線の映像が映る爲に必要な方眼衡立の大きさを定めるには、標定曲線の式(8)を少しく變形して

$$\mu_0 = Y \frac{X^2 + 2fX - \lambda(\lambda - 2f)}{X^2 - (\lambda - 3f)X + f\lambda}$$

と置き、この中のYに對しては鏡の半口径、Xに對しては鏡の深さの數値を代入して μ_0 を計算すれば必要な方眼衡立の一邊の大きさの半分が得られる。次に掲げる表は常用の鏡についてこの計算を行つた結果を示すものである。(第1表)

表中のWの値の計算はすべて計算尺によつたものであつて、大きな精度は望む事が出來ないけれども、實用にはこれで充分である。

この表から見られる様に、視點距離 λ の變化に對するWの變化は相當鋭敏であるから(例へば150cm 反射鏡については視點距離の $0.2f$ (=13cm)の變化に對してWの變化は約40cmである)實際の試験に當つて視點距離を直接測定する代りに、定まつた焦點距離の、定まつた口径の鏡に對しては豫め、ある λ の値に對して丁度鏡の縁邊の所に映像が現はれる様な格子線の

* A Theory of Images on the Parabolic mirror. by K. Öuti.

第 1 表 常用反射鏡の方眼衝立の大きさの表

鏡口径(2Y)	焦 點 距 離	鏡 の 深 さ (λ)	方眼衝立の一邊の長さの最小限 (W)				
			$\lambda=4.6f$	$\lambda=4.8f$	$\lambda=5f$	$\lambda=5.2f$	$\lambda=5.4f$
34cm	15cm	4.8166cm	91.2cm	99cm	109cm	117.6cm	126.8cm
45	21	6.0268	120.6	132	143	154.8	166.6
64	25.4	10.0787	171.2	188.6	212	224	242
75	31	11.3407	200.4	221	240	261	282
90	42	12.0536	241	263	286	310	332
110	48	15.7552	294	323.2	351	381	410
150	65	21.6346	402	442	480	520	560

μ_0 を計算して置き、その様な格子線の映像がまさに鏡の縁邊から消滅しようと云ふ位置に視點距離を調整すると云ふ様な事も可能であらう。

拋物線面鏡の検査方法として、方眼試験が妥當であるか否かと云ふ事は簡單には決め難いが兎に角、方眼の寫像が近似的には如何程正しい方眼であるにもせよ、それが理論的には眞正の方眼であり得ないと云ふ事實を念頭から離す事は出来ないであらう。(15)

本論文の初頭に於て筆者は反射鏡の所謂ダレについてもう一度考察する事を約束して置いた(第〔5〕節参照)これは第〔8〕節に示した寫像曲線(特に $\lambda=4.6f$, $\lambda=4.8f$ の場合)について見れば自ら解決される事柄である。

初め筆者は30cm及34cmの二種の鏡について所謂ダレの現れるのは34cm鏡に多い事實(但しそれは單に筆者の限られた見聞の範圍に於てであつた)に鑑み、この事が或は寫像曲線の本來の性質に基くものではあるまいかと云ふ疑問を抱いたのであつたが、事實計算から求めた寫像曲線について見れば、方眼距離の附近の λ に對しては、鏡の口径を30cmから34cmに擴大して見ても、實際の鏡に見られるダレに相當する様な急激な寫像曲線の彎曲は現れない。これによつて、鏡の研磨の方面に原因するダレなるものは確かに存在する事が認められるのである。

以上で拋物線面鏡の方眼試験に關する考察を終り、次節以下引き續いて、關聯した二三の問題並に、拋物線面鏡或は他の二次面鏡の映像について論ずるつもりであるが、今までの所論の内には、單なる拋物線面鏡の方眼試験と云ふ制限を離れて、もう少し廣い意味での鏡の映像乃至寫像に關する事柄も含まれて居り、且つ今迄の所論の基調であつた標定曲線をも屢々利用する關係上、標度丈を少しく變更し、本文の方は連續させたい筆者の意嚮である。

この節を終るに臨んで――

本論文の初頭に掲げた内容梗概の中に“寫像の線の一部が最もよく直線に近似する爲の λ の値の範圍は $4f < \lambda < 5f$ である、とあるのは誤りである。又“寫像の線に曲つた部分の現れない爲には鏡の口径は少く共 $2.5f$ よりも小でなければならない、と云ふ文章は、鏡の口径が $2.5f$ よ

(15) この様な意味で、方眼の代りに一點から放射狀に引いた直線群と、その點を中心とする同心圓の群とから成り立つ圖形を用ひるなども一つの便法であらうと思ふ。

りも大となれば寫像曲線が極めて急激に彎曲すると云ふ様な意味を含んで、之を本文中の所論と比較して甚だ穩當でない様に考へられるので、此處に指滴して訂正の意を表したいと思ふ。

〔12〕 拋物線面反射鏡の映像の諸相・變像點

拋物線面鏡の擴がりを必要に應じていくらでも大きく取り得るものとした時、理論上その上に現れる映像の姿は多種多様である。その内にはごく深い鏡にしか現れない爲にあまり人の眼につかないものや、數學的理論の上では存在しても他の物理的原因の爲に實際には現れないもの等もあるが、兎に角それらは實在する映像の色々な型を示して呉れる。

物平面上のある圖形の映像を考へるには、その圖形の構成要素である物點の映像を考へるのが効果的である。物平面上の任意の物點の映像點は、物點と鏡軸とを含む平面によつて全機構を切斷した平面上で、その物點に應ずる標定曲線と反射面の截口曲線との交りとして決定される事は既に示した所であり、軸上に視點を有する廻轉面鏡に關する限り、この様な平面圖形の考察丈で事が足りる。

$\lambda > 0$ の場合に拋物線 Σ と交るのは一般に標定曲線の第一枝及び第二枝であるが、これら二つの枝の存在する領域は漸近線 $X = \lambda - 2f$ によつて區劃され、鏡軸から物點までの距離 μ_0 がどの様に變化しても標定曲線の第二枝は必ずその左方に、第一枝は必ずその右方に存在する。従つて今反射面を $X = \lambda - 2f$ と云ふ平面で切斷して生ずる切口（或はその寫像）を漸近圓と呼ぶならば、反射面の上にもまた標定曲線の第一枝による映像のみが存在する部分と、第二枝による映像のみが存在する部分とがこの漸近圓によつて區劃される。

これら二つの區劃の映像の特質は：——標定曲線の第一枝による映像點の縦座標が $\mu_0 > 0$ の時正であり、 $\mu_0 < 0$ の時負であるのに對し、第二枝による映像點の縦座標は $\mu_0 > 0$ の時負であり、 $\mu_0 < 0$ の時正である事である。⁽¹⁶⁾ 即ち標定曲線の第一枝による映像は物點が視點の右にあれば右に、左にあれば左に見えるのに對し、第二枝による映像は、視點に對して物點の存在する反對の側に見える。前者の様な特質を持つ映像を正像、後者を逆像と呼べば、標定曲線の第一枝による映像は正像であり、第二枝による映像は逆像である。

さて標定曲線の第一枝と Σ との交りは一般に只一個存在する丈であるが、第二枝が Σ と交る點は一般に二個存在する、云ひ換へれば標定曲線の第一枝による映像圈の各點は各々異つた物點に對應する映像點であるが、標定曲線の第二枝による映像圈では、同一の物點に對應する映像點が二個づゝ存在するのである。そこで吾々は標定曲線の第二枝による映像圈を更に二つに分割して、その各々には同一の物點に對應する映像點が只一個づつしか含まれない様にしようと思ふのであるが、この分割の役目を果して呉れるものは第〔9〕節で定義した限界圓、即ち標定曲線が Σ と接觸する點 l （第13圖）を通過し、鏡軸に垂直な平面による反射面の截口圓である。この圓によつて標定曲線の第二枝による映像圈は二つの所謂基本領域（Fundam-

(16) 標定曲線が實の極を有する時は、その第二枝の一部分が正像を生ずる様になる（第4節）が吾々はこの特殊の場合を除外する。これには相當の理由もあるが後で示す。

第 13 圖

第 14 圖

ental region) に分割される。その各々に於ける映像點の特質を見る爲、適當に近接した μ_1 , μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$) と云ふ二つの μ_0 の値に對する標定曲線を考へて見ると、それ等の縦座標は同じ横座標に對してそれぞれ μ_1 , μ_2 に比例する丈であるから二つの曲線は一種の Parallel curve である。今この二つの標定曲線の第二枝が Σ と交る點を夫々 a_1, b_1, a_2, b_2 とし、同一の基本領域に屬する組 $[a_1, a_2]$ $[b_1, b_2]$ について比較すると、第一の基本領域では點 a_2 の縦座標の絶對値が點 a_1 の縦座標の絶對値よりも大であるのに對し、第二の基本領域では點 b_2 の縦座標の絶對値は點 b_1 の縦座標の絶對値よりも小である事が見れる。そして、二つの交點 a, b は標定曲線が Σ と接觸する時收縮點 l に於て一致するのであるから、上記の二つの領域内の映像は互に他に對して、限界圓を境とする一種の反轉關係にある事が認められる。更に之等の事柄を物平面に關聯して云ふならば ——

第一の基本領域では、鏡軸から物點までの距離の大小がその儘寫像されるに反し、第二の基本領域では鏡軸から物點までの距離の大小が反對に寫像される。例へば物平面にある視點を中心とする大小二個の圓の寫像（或は映像）について前者の領域では大小關係がその儘保有されるが、後者の領域では小圓の寫像が却つて大圓の寫像を包含するのである。後者のやうな特質を持つ映像或は寫像を反轉像と名づけやう。そうすると一般に、鏡軸上に視點を有する拋物線面鏡の映像（或は寫像）には、正像、逆像、及び反轉像の三種があり、限界圓と漸近圓とによつて區劃される三つの映像（寫像）圈はその各々に特有な存在領域である。⁽¹⁷⁾

これらの三種の寫像の姿について切實な實感を得る爲、物平面上にある人間の顔に似た圖形についてその寫像を上理論に基づいて略圖的に畫いて見ると大體第15圖に示す様なものになる。中央の逆像圈では左右、上下の關係が原形と反對に寫像されるが形の上の歪曲は比較的少く、特に鏡の中心部に於てそれは少い。他の寫像圈では物平面上の視點を中心とする無限小の圓が寫像平面上の漸近圓に寫像される爲物平面の視點に近い部分程大きな歪形を蒙り、特

(17) この内限界圓と漸近圓との中間にある部分が常に反轉像圈である。

第 15 圖

に反轉像圈にあつては、前に述べた様な一種の反轉作用のために、顔の中央にあるべき鼻が最も外部に、顔の輪廓が却つて中心部に最も近く寫像され、圖に示す様な奇怪な寫像を現出する。

物平面上の圖形の大きさが（物平面上の）限界圓を超過する場合には、限界圓の外部にある部分の寫像は逆像圈にも反轉像圈にも現はれず、内部にある部分丈が寫像平面の限界圓を境として恰も裏返した様に兩圈連續して現はれるこれは第16圖に示してある。

何れの場合にも鏡の頂點を包含する様な寫像圈にあつては、視點を中心とする圓に圍まれた物平面の物分に對應するのは、矢張り寫像平面の中心を中心とする圓に圍まれた部分であるが他の寫像圈では中心部の缺除した環狀の部分が對應する。

鏡の頂點、換言すれば鏡の近軸部分を包含する寫像圈（映像圈）を主寫像圈（主映像圈）、そこに現れる寫像（映像）を主像寫（主映像）と呼ぼう。

主寫像圈では、物平面上の點が中心に近ければ近い程その寫像は歪形を蒙る事が少いが、殘餘の寫像圈では反對に、中心に近い物平面の部分程大きな歪形を受ける。その状態には恰も寫像平面の中央部に蟠居する主寫像圈を避けて他の寫像が偏在するのに對し、主寫像獨り他を憚らず中央を獨占して居る觀がある。

拋物線面鏡の映像圈の分布を決定する漸近圓と限界圓とは夫々平面

$$X = \lambda - 2f \dots\dots\dots (9)$$

及び平面

$$X = (\lambda - 2f) - 2 \sqrt{f(\lambda - f)} (\sqrt{\lambda - f} - \sqrt{f}) \dots\dots\dots (30)$$

と反射面との交りであるから視度距離 λ が變化すればそれに應じて映像圈の分布も變つて来る。

〔1°〕漸近圓。 $\lambda > 2f$ ならば實であるが $\lambda = 2f$ の時一點に收縮し、 $\lambda < 2f$ ならば虚である

〔2°〕限界圓。 λ の變化によるこの圓の消長は漸近圓のそれを全く同様である。この事は標定曲線と Σ との形狀からある程度迄推測される事ではあるが、(30) 式からもその事を確める

第 16 圖

事が出来る。(30) 式を

$$X = (\lambda - 2f) - 2^3 \sqrt{f(\lambda - f)} (\sqrt{\lambda - f} - \sqrt{f}) = (\lambda - 2f) - 2k$$

と書けば、 $\lambda > 2f$ である限り $k > 0$ である事は一目して解る。従つてその三乗

$$k^3 = f(\lambda - f) \{(\lambda - 2f) - 3k\}$$

もまた正である。 $f(\lambda - f) > 0$ であるから $(\lambda - 2f) - 3k > 0$

従つて $\lambda - 2f > 3k$ でなければならないから次の事が云はれる。

$\lambda > 2f$ ならば限界円は漸近圓と鏡の頂點との中間に存在し、漸近圓と限界圓とで限られる反轉像圈の深さ (X —軸上の長さで表はされた圈の大きいさ) は逆像圈の深さの少くとも 2 分の 1 よりは大である。 $\lambda = 2f$ の時は限界圓は漸近圓と共に消滅する。これらの事から $\lambda > 2f$ である限り限界圓は漸近圓と消長を共にする事が確かめられる。 $\lambda < 2f$ の場合については此處では云はない。

今視點距離 λ を $\lambda > 2f$ である様な或る値から次第に減少して行くと、漸近圓と限界圓とは共に鏡の頂點に向つて移動し、それに従つて主映像圈は縮小され、その外周には反轉像などが隨伴する上に、すべての映像の擴大の度が増大する⁽¹⁸⁾ので鏡面の映像には大きな混亂が現はれる。そうしてこれらの混亂は $\lambda = 2f$ に至つて極限に達するが $\lambda < 2f$ であるに至れば、標定曲線の第二枝による映像は全く鏡面から姿を沒し、鏡の近軸部分は完全に標定曲線の第一枝によつて占領され、其處には整然とした正像が現はれる様になる。この様な鏡の近軸部分に於ける、正像と逆像との交替の行はれる鏡軸上頂點から $2f$ の距離にある點を拋物線面鏡の變像點、距離 $2f$ を變像距離と呼ぼう。⁽¹⁹⁾「變像」の現象は拋物線面鏡のみでなく一般の二次面鏡或はその他の反射面についても存在する。

(未完)

(18) この點に關しては後で別に論ずる所がある。

(19) $2f$ は拋物線の頂點における曲率半徑に外ならない。さらにこの關係は他の反射面についても成立する一般的のものである。